

强度计算数值计算方法：有限元法（FEM）：有限元法的数学基础

1 绪论

1.1 有限元法的历史背景

有限元法（Finite Element Method, FEM）的起源可以追溯到 20 世纪 40 年代末，由工程师们在解决结构工程问题时首次提出。然而，直到 1956 年，Clough 和 Tocher 在《A Finite Element Stiffness Method for Plane Elasticity Problems》一文中，才正式将这种方法命名为“有限元法”。自那时起，FEM 迅速发展，成为解决复杂工程问题的强有力工具，其应用范围从最初的结构分析扩展到流体力学、热传导、电磁学等多个领域。

1.2 有限元法的应用领域

1.2.1 结构分析

在结构分析中，FEM 被用于预测结构在各种载荷下的响应，包括应力、应变和位移。这对于设计桥梁、建筑物、飞机等大型结构至关重要。

1.2.2 流体力学

FEM 在流体力学中的应用，如计算流体力学（CFD），可以模拟流体流动、压力分布和热传递，对船舶设计、风力发电和空调系统等有重要影响。

1.2.3 热传导

在热传导分析中，FEM 帮助工程师理解热能如何在不同材料中分布，这对于优化热交换器、电子设备散热设计等非常重要。

1.2.4 电磁学

FEM 在电磁学中的应用，如电磁兼容性（EMC）分析，可以预测电磁场的分布，对于设计无线通信设备、雷达系统等至关重要。

1.3 有限元法的基本概念

1.3.1 离散化

有限元法的核心在于将连续的物理域离散化为有限数量的单元，每个单元用一组节点来表示。这种离散化过程使得复杂的连续问题可以转化为一系列相对简单的离散问题。

1.3.2 节点与单元

- **节点**：是有限元网格中的基本点，用于定义单元的边界。在每个节点上，可以定义位移、温度、电势等物理量。
- **单元**：由节点组成，用于近似物理域内的连续体。单元可以是线性的、二次的或更高阶的，形状可以是三角形、四边形、六面体等。

1.3.3 形函数

形函数（Shape Functions）用于在单元内部插值节点上的物理量。例如，对于一个线性单元，形函数可以是线性的，而在二次单元中，形函数则为二次多项式。

1.3.4 虚功原理

虚功原理是有限元法的理论基础之一，它指出在平衡状态下，外力对虚位移做的虚功等于内力对同一虚位移做的虚功。这一原理用于建立有限元方程。

1.3.5 加权残值法

加权残值法是另一种构建有限元方程的方法，它通过最小化残差（即方程的不满足程度）来求解问题。在 FEM 中，通常使用 Galerkin 方法作为加权残值法的一种实现。

1.3.6 矩阵方程

有限元法最终将问题转化为一组矩阵方程，形式为

$$Ku = F$$

，其中 K 是刚度矩阵， u 是未知的位移向量， F 是外力向量。通过求解这个方程，可以得到结构的响应。

1.3.7 例子：使用 Python 进行简单有限元分析

```
import numpy as np
```

```
# 定义刚度矩阵 K
```

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/476241104101010231>