

北京市第一七一中学 2023-2024 学年度第二学期

高二年级数学科目期中调研试卷

(时长: 120 分钟 总分值: 150 分)

一、选择题共 10 题, 每题 4 分, 共 40 分. 在每题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项.

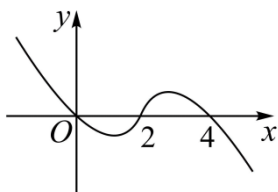
1. 已知抛物线的准线方程为 $y = -1$, 则该抛物线的标准方程为 ()

- A. $x^2 = 2y$ B. $y^2 = 2x$ C. $x^2 = 4y$ D. $y^2 = 4x$

2. $(x-2)^5$ 的展开式中 x 的系数是 ()

- A. 80 B. -80 C. 160 D. -160

3. 已知函数 $y = f(x)$, 其导函数 $y = f'(x)$ 的图象如图, 则对于函数 $y = f(x)$ 的描述正确的是



- A. 在 $(-\infty, 0)$ 上为减函数
 B. 在 $x = 0$ 处取得最大值
 C. 在 $(4, +\infty)$ 上为减函数
 D. 在 $x = 2$ 处取得最小值

4. 设随机变量 X 的概率分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{3}$	m	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

则 $P(|X-3|=1) = ()$

- A. $\frac{7}{12}$ B. $\frac{5}{12}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{6}$

5. 某社区计划在端午节前夕按如下规则设计香囊: 在基础配方以外, 从佩兰、冰片、丁香、石菖蒲这四味中药中至少选择一味添加到香囊, 则不同的添加方案有 ()

- A. 13 种 B. 14 种 C. 15 种 D. 16 种

6. 下列求导的运算中, 正确的是 ()

- A. $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2}$ B. $(\ln(2x-1))' = \frac{1}{2x-1}$

C. $(x^3 e^x)' = 3x^2 e^x$

D. $(2^x + \cos x)' = 2^x - \sin x$

7. 设 $(1+x)^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, 若 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 63$, 则展开式中系数最大的项是 ()

- A. $15x^2$ B. $35x^3$ C. $21x^3$ D. $20x^3$

8. 函数 $f(x) = e^x - kx$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 则 k 的取值范围是 ()

- A. $k \leq 1$ B. $k \leq 2$ C. $k \leq e$ D. $k \leq \frac{1}{e}$

9. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左焦点为 F , 右顶点为 A , 过 F 作 C 的一条渐近线的垂线 FD , D 为垂足. 若 $|DF| = |DA|$, 则 C 的离心率为 ()

- A. $2\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$

10. 定义满足方程 $f'(x) + f(x) = 1$ 的解 x_0 叫做函数 $f(x)$ 的“自足点”, 则下列函数不存在“自足点”的是 ()

- A. $f(x) = x^2 - 3x$ B. $f(x) = x + \frac{1}{x}$
 C. $f(x) = \ln x$ D. $f(x) = e^x - \sin x + 3$

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 题, 每题 5 分, 共 25 分.

11. 已知 $(1+2x)^n$ 的展开式的二项式系数之和为 16, 则 $n =$ _____; 各项系数之和为 _____.(用数字作答)

12. 已知双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 $M(-3, 4)$, 则双曲线的渐近线方程为 _____;

$|MF_1| - |MF_2| =$ _____.

13. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R , $f(-1) = 2$, 对任意 $x \in R, f'(x) > 2$, 则 $f(x) > 2x + 4$ 的解集为 _____.

14. 把 5 件不同产品摆成一排, 若产品 A 与产品 B 相邻, 且产品 A 与产品 C 不相邻, 则不同的摆法有 _____ 种.

15. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + 2t$, $g(x) = e^x - t$. 给出下列四个结论:

- ① 当 $t = 0$ 时, 函数 $y = f(x)g(x)$ 有最小值;
 ② $\exists t \in \mathbf{R}$, 使得函数 $y = f(x)g(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增;

(3) 品牌 F 的牙膏下月进入该超市销售, 定价 25 元/管, 并占有一定市场份额. 原有 5 个品牌的牙膏销售价格不变, 所占市场份额之比不变. 设本月牙膏的平均销售价为每管 μ_1 元, 下月牙膏的平均销售价为每管 μ_2 元, 比较 μ_1, μ_2 的大小. (只需写出结论)

19. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $M(2, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 设过点 $T(t, 0)$ 的直线 l 与椭圆 E 有两个不同的交点 A, B (均不与点 M 重合), 若以线段 AB 为直径的圆恒过点 M , 求 t 的值.

20. 已知函数 $f(x) = a \ln x + xe^x - e$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 当 $a > 0$ 时, 判断 $f(x)$ 的零点个数, 并加以证明;

(3) 当 $a < 0$ 时, 证明: 存在实数 m , 使 $f(x) \geq m$ 恒成立.

21. 已知项数为 $k (k \in \mathbf{N}^*, k \geq 3)$ 的有穷数列 $\{a_n\}$ 满足如下两个性质, 则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P ;

① $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_k$;

② 对任意的 $i, j (1 \leq i \leq j \leq k)$, $\frac{a_j}{a_i}$ 与 $a_j a_i$ 至少有一个是数列 $\{a_n\}$ 中的项.

(1) 分别判断数列 1、2、4、16 和 2、4、8、16 是否具有性质 P , 并说明理由;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P , 求证: $a_k^k = (a_1 a_2 \dots a_k)^2$;

(3) 若数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P , 且 $\{a_n\}$ 不是等比数列, 求 k 的值.

北京市第一七一中学 2023-2024 学年度第二学期

高二年级数学科目期中调研试卷

一、选择题共 10 题，每题 4 分，共 40 分.在每题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知抛物线的准线方程为 $y = -1$ ，则该抛物线的标准方程为 ()

- A. $x^2 = 2y$ B. $y^2 = 2x$ C. $x^2 = 4y$ D. $y^2 = 4x$

【答案】C

【分析】根据准线方程为 $y = -1$ ，可知抛物线的焦点在 y 轴的正半轴，再设抛物线的标准形式为 $x^2 = 2py$ ，根据准线方程求出 p 的值，代入即可得到答案.

【详解】由题意可知抛物线的焦点在 y 轴的正半轴，设抛物线标准方程为： $x^2 = 2py (p > 0)$ ，

\because 抛物线的准线方程为 $y = -1$ ，

$$\therefore \frac{p}{2} = 1, \therefore p = 2,$$

\therefore 抛物线的标准方程为： $x^2 = 4y$ ，

故选：C.

【点睛】本题主要考查抛物线的标准方程、抛物线的简单性质，属于基础题.

2. $(x-2)^5$ 的展开式中 x 的系数是 ()

- A. 80 B. -80 C. 160 D. -160

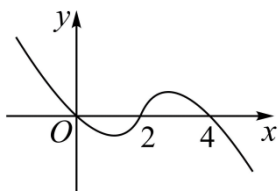
【答案】A

【分析】根据二项式展开式求解即可.

【详解】展开式中 x 的项为 $C_5^4 (-2)^4 x^1 = 80x$.

故选：A.

3. 已知函数 $y = f(x)$ ，其导函数 $y = f'(x)$ 的图象如图，则对于函数 $y = f(x)$ 的描述正确的是



- A. 在 $(-\infty, 0)$ 上为减函数
B. 在 $x = 0$ 处取得最大值
C. 在 $(4, +\infty)$ 上为减函数
D. 在 $x = 2$ 处取得最小值

【答案】C

【详解】分析：根据函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象可知 $f'(0)=0$, $f'(2)=0$, $f'(4)=0$, 然后根据单调性与导数的关系以及极值的定义可进行判定即可.

详解：根据函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象可知：

$$f'(0)=0, f'(2)=0, f'(4)=0$$

当 $x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增; 当 $0 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减;

当 $2 < x < 4$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增; 当 $x > 4$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减.

可知 C 正确, A 错误;

由极值的定义可知, $f(x)$ 在 $x=0$ 处函数 $f(x)$ 取到极大值, $x=2$ 处函数 $f(x)$ 的极小值点, 但极大值不一定为最大值, 极小值不一定是最小值; 可知 B、D 错误.

故选 C.

点睛：由导函数图象推断原函数的性质, 由 $f'(x) > 0$ 得增区间, 由 $f'(x) < 0$ 得减区间, 由 $f'(x) = 0$ 得到的不一定是极值点, 需判断在此点左右 $f'(x)$ 的符号是否发生改变.

4. 设随机变量 X 的概率分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{3}$	m	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

则 $P(|X-3|=1) = ()$

- A. $\frac{7}{12}$ B. $\frac{5}{12}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{6}$

【答案】B

【详解】试卷分析： $P(X=2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$, $|X-3|=1 \Rightarrow x=2$ 或 4 .

则 $P(|X-3|=1) = P(X=2) + P(X=4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$, 故选 B

考点：概率分布

5. 某社区计划在端午节前夕按如下规则设计香囊：在基础配方以外, 从佩兰、冰片、丁香、石菖蒲这四味中药中至少选择一味添加到香囊, 则不同的添加方案有 ()

- A. 13 种 B. 14 种 C. 15 种 D. 16 种

【答案】C

【分析】分四种情况, 利用分类计数原理即可求出结果.

【详解】从佩兰、冰片、丁香、石菖蒲这四味中药中选一种, 有 $C_4^1 = 4$ 种,

从佩兰、冰片、丁香、石菖蒲这四味中药中选二种，有 $C_4^2 = 6$ 种，

从佩兰、冰片、丁香、石菖蒲这四味中药中选三种，有 $C_4^3 = 4$ 种，

从佩兰、冰片、丁香、石菖蒲这四味中药全选，有 $C_4^4 = 1$ 种，

所以从佩兰、冰片、丁香、石菖蒲这四味中药中至少选一种，共有 $4 + 6 + 4 + 1 = 15$ 种，

故选：C.

6. 下列求导的运算中，正确的是 ()

A. $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

B. $(\ln(2x-1))' = \frac{1}{2x-1}$

C. $(x^3 e^x)' = 3x^2 e^x$

D. $(2^x + \cos x)' = 2^x - \sin x$

【答案】A

【分析】根据复合函数的导数公式逐个判断即可

【详解】对 A, $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 故 A 正确;

对 B, $(\ln(2x-1))' = \frac{2}{2x-1}$, 故 B 错误;

对 C, $(x^3 e^x)' = 3x^2 e^x + x^3 e^x$, 故 C 错误;

对 D, $(2^x + \cos x)' = 2^x \ln 2 - \sin x$, 故 D 错误;

故选：A

7. 设 $(1+x)^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, 若 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 63$, 则展开式中系数最大的项是 ()

A. $15x^2$

B. $35x^3$

C. $21x^3$

D. $20x^3$

【答案】D

【分析】利用二项展开式的基本定理确定 n 的数值，再求展开式中系数最大的项。

【详解】在 $(1+x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ 中，

令 $x=0$, 得 $a_0=1$,

令 $x=1$, 得 $2^n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 + 63 = 64$,

$\therefore n=6$;

\therefore 展开式中系数最大的项为 $C_6^3 x^3 = 20x^3$.

故选：D.

8. 函数 $f(x) = e^x - kx$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 则 k 的取值范围是 ()

- A. $k \leq 1$ B. $k \leq 2$ C. $k \leq e$ D. $k \leq \frac{1}{e}$

【答案】C

【分析】

将当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 转化为 $k \leq \frac{e^x}{x}$ $x \in (0, +\infty)$ 时恒成立, 再令 $g(x) = \frac{e^x}{x}$, 用导数法求 $g(x)$

最小值即可.

【详解】因为函数 $f(x) = e^x - kx$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立,

所以 $k \leq \frac{e^x}{x}$ $x \in (0, +\infty)$ 时, 恒成立,

$$\text{令 } g(x) = \frac{e^x}{x},$$

$$g'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2},$$

当 $x < 1$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0$,

所以当 $x = 1$ 时 $g(x)$ 取得最小值 e .

所以 $k \leq e$.

故选: C

【点睛】本题主要考查了不等式恒成立问题, 还考查了转化化归的思想和运算求解的能力, 属于中档题.

9. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左焦点为 F , 右顶点为 A , 过 F 作 C 的一条渐近线的垂线

FD , D 为垂足. 若 $|DF| = |DA|$, 则 C 的离心率为 ()

- A. $2\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$

【答案】B

【分析】

首先利用 $|DF| = |DA|$, 求点 D 的坐标, 再利用 DF 与渐近线垂直, 构造关于 a, c 的齐次方程, 求离心率.

【详解】由条件可知 $F(-c, 0)$, $A(a, 0)$, 由对称性可设条件中的渐近线方程是 $y = \frac{b}{a}x$, 线段 FA 的中垂线方程

是 $x = \frac{a-c}{2}$, 与渐近线方程 $y = \frac{b}{a}x$ 联立方程, 解得 $y = \frac{b(a-c)}{2a}$, 由 $|DF| = |DA|$, 即 $D\left(\frac{a-c}{2}, \frac{b(a-c)}{2a}\right)$,

因为 DF 与渐近线 $y = \frac{b}{a}x$ 垂直, 则 $\frac{\frac{b(a-c)}{2a}}{\frac{a-c}{2} - (-c)} = -\frac{a}{b}$,

化简为 $b^2c - ab^2 = a^3 + a^2c \Leftrightarrow b^2c = ac^2 + a^2c$,

即 $b^2 = ac + a^2$, 即 $c^2 - ac - 2a^2 = 0$, 两边同时除以 a^2 ,

得 $e^2 - e - 2 = 0$, 解得: $e = -1$ (舍) 或 $e = 2$.

故选: B

【点睛】 方法点睛: 本题考查双曲线基本性质, 意在考查数形结合分析问题和解决问题的能力, 属于中档题型, 一般求双曲线离心率的方法是 1. 直接法: 直接求出 a, c , 然后利用公式 $e = \frac{c}{a}$ 求解; 2. 公式法:

$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{b}{c}\right)^2}}$, 3. 构造法: 根据条件, 可构造出 a, c 的齐次方程, 通过等式两边同时除以 a^2 , 进

而得到关于 e 的方程.

10. 定义满足方程 $f'(x) + f(x) = 1$ 的解 x_0 叫做函数 $f(x)$ 的“自足点”, 则下列函数不存在“自足点”的是

()

A. $f(x) = x^2 - 3x$

B. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

C. $f(x) = \ln x$

D. $f(x) = e^x - \sin x + 3$

【答案】 D

【分析】 求出每个选项中函数 $f'(x)$, 判断每个选项中方程 $f'(x) + f(x) = 1$ 是否有解, 由此可得合适的选项.

【详解】 对于 A 选项, $f(x) = x^2 - 3x$, 则 $f'(x) = 2x - 3$, 由 $f(x) + f'(x) = x^2 - x - 3 = 1$,

即 $x^2 - x - 4 = 0$, $\Delta = 1 + 16 > 0$, 因此, $f(x) = x^2 - 3x$ 存在“自足点”, A 满足条件;

对于 B 选项, $f(x) = x + \frac{1}{x}$, 则 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, 由 $f(x) + f'(x) = x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 1 = 1$,

可得 $x^3 + x - 1 = 0$, 其中 $x \neq 0$, 令 $g(x) = x^3 + x - 1$, 则 $g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8} < 0$, $g(1) = 1 > 0$,

所以, 函数 $g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上存在零点, 即函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 存在“自足点”, B 选项满足条件;

对于 C 选项, $f(x) = \ln x$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x}$, 其中 $x > 0$,

因为 $f'(1) + f(1) = 1$, 故函数 $f(x) = \ln x$ 存在“自足点”, C 选项满足条件;

对于 D 选项, $f(x) = e^x - \sin x + 3$, 则 $f'(x) = e^x - \cos x$,

由 $f(x) + f'(x) = 2e^x - \sin x - \cos x + 3 = 1$ ，可得 $2e^x - \sin x - \cos x + 2 = 0$ ，

因为 $\sin x \leq 1$ ， $\cos x \leq 1$ ，

所以， $2e^x - \sin x - \cos x + 2 = 2e^x + (1 - \sin x) + (1 - \cos x) \geq 2e^x > 0$ ，

所以，方程 $2e^x - \sin x - \cos x + 2 = 0$ 无实解，D 选项不满足条件。

故选：D.

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 题，每题 5 分，共 25 分.

11. 已知 $(1+2x)^n$ 的展开式的二项式系数之和为 16，则 $n =$ _____；各项系数之和为 _____。(用数字作答)

【答案】 ①. 4 ②. 81

【分析】根据二项式系数和的公式 $2^n = 16$ ，求解；再根据赋值法求各项系数之和。

【详解】展开式中的二项式系数的和是 $2^n = 16$ ，所以 $n = 4$ ，

令 $x = 1$ ， $(1+2)^4 = 81$ ，即各项系数和为 81.

故答案为：4；81

12. 已知双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 ，点 $M(-3, 4)$ ，则双曲线的渐近线方程为 _____；

$|MF_1| - |MF_2| =$ _____.

【答案】 ①. $\sqrt{2}x \pm y = 0$ ②. -2

【分析】

根据双曲线的方程，求得半实轴 a 、半虚轴 b 的值，代入渐近线方程，即可求得答案；根据 M 点在双曲线的左支上，根据双曲线的定义，即可求得答案。

【详解】因为双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ ，半实轴 $a = 1$ ，半虚轴 $b = \sqrt{2}$ ，

所以渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \sqrt{2}x$ ，即 $\sqrt{2}x \pm y = 0$ ；

因为 $M(-3, 4)$ 满足双曲线方程，且在双曲线的左支上，根据双曲线的定义得 $|MF_2| - |MF_1| = 2a = 2$ ，

所以 $|MF_1| - |MF_2| = -2$.

故答案为： $\sqrt{2}x \pm y = 0$ ；-2

13. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R ， $f(-1) = 2$ ，对任意 $x \in R, f'(x) > 2$ ，则 $f(x) > 2x + 4$ 的解集为

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/477120162106006146>