

(量子力学)
复向量空间

颜文斌
清华大学

内容提要

- 复数
- 复线性空间、内积和复矩阵
- 厄米矩阵和幺正矩阵

复数

- 虚数单位： i , $i^2 = -1$
 - 也有书用记号 j 、 $\sqrt{-1}$
- 复数： $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$
 - 实部： $\operatorname{Re} z = a \in \mathbb{R}$
 - 虚部： $\operatorname{Im} z = b \in \mathbb{R}$
- 复平面：所有复数的集合记为 \mathbb{C}
 - x轴坐标是复数的实部
 - y轴坐标是复数的虚部

复数的运算

- 复数 $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$
- 加法： $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
- 乘法： $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$
- 复共轭： $\bar{z}_1 = z_1^* = a_1 - b_1i$
- 模： $|z_1| = \sqrt{\bar{z}_1 z_1} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$
- 逆： $z_1^{-1} = \frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2}$, $z_1^{-1} z_1 = z_1 z_1^{-1} = 1$

模和幅角

- $z = a + bi = re^{i\theta}$
 - $r = |z|$
 - $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$
- 欧拉公式： $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$
 - $a = r \cos \theta, b = r \sin \theta$
- $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$, 模长相乘, 幅角相加
 - $z^n = r^n e^{in\theta}$

内容提要

- 复数
- 复线性空间、内积和复矩阵
- 厄米矩阵和幺正矩阵

\mathbb{C}^n 和 \mathbb{C}^n 上的运算

- 元素： $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$, $z_i \in \mathbb{C}$
- 线性组合： $c_1 \mathbf{z}_1 + c_2 \mathbf{z}_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$
- 复共轭： $\bar{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{bmatrix}$
- 共轭转置： $\bar{\mathbf{z}}^T = [\bar{z}_1 \quad \cdots \quad \bar{z}_n]$
 - 也记做 $\mathbf{z}^H = \mathbf{z}^\dagger$
- 标准基： $\mathbf{e}_i = [0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0]^T$

例

$$\bullet 4 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + i \\ -1 + 4i \end{bmatrix}$$

$$\bullet \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

$$\bullet \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}^\dagger = [1 \quad -i] = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}^T$$

一般复线性空间

- 定义：域 F 上的向量空间是满足以下公理的集合 V ，且 V 对加法和数乘封闭
 1. $x + y = y + x$
 2. $x + (y + z) = (x + y) + z$
 3. 存在唯一的零向量 0 使得对于任意 x ， $x + 0 = x$
 4. 对任意 x ，存在唯一的向量 $-x$ 使得 $x + (-x) = 0$
 5. 1 乘 x 等于 x
 6. $(c_1 c_2)x = c_1(c_2 x)$
 7. $c(x + y) = cx + cy$
 8. $(c_1 + c_2)x = c_1 x + c_2 x$
- 复线性空间：把数域换成复数

复线性空间的性质

- 所有实线性空间的知识都可以推广到复线性空间，只需要把原来是实数的地方换成复数
- **线性无关**：复向量组 $\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n\}$ 是线性无关的当且仅当方程 $c_1\mathbf{z}_1 + \dots + c_n\mathbf{z}_n = \mathbf{0}$ 只有零解 $c_1 = \dots = c_n = 0$
- 注意： c_1, \dots, c_n 都是复数
- 例： $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}$ 是线性无关的

例：量子力学

- 量子态 (quantum state) : 量子系统在任意时刻的状态可以由一个有限或者无限维线性空间 (态空间) 的向量 $|A\rangle$ 描述, 并且满足态叠加原理。也就是说, 如果 $|A\rangle$ 和 $|B\rangle$ 是量子态, 那么 $c_1|A\rangle + c_2|B\rangle$ 也是量子态, 其中 c_1 和 c_2 是任意两个复数。
 - $|A\rangle$ 叫右矢 (ket, ket vector)
 - 一般量子系统对应的线性空间是无限维的, 但很多时候我们只讨论一个有限维的线性子空间
- P. A. M. Dirac, the principles of quantum mechanics, pp16

We now assume that each state of a dynamical system at a particular time corresponds to a ket vector, the correspondence being such that if a state results from the superposition of certain other states, its corresponding ket vector is expressible linearly in terms of the corresponding ket vectors of the other states, and conversely. Thus the state R results from

内积和内积空间

- \mathbb{C}^n 标准内积：向量 \mathbf{u} 和 \mathbf{v} 的内积为 $\mathbf{u}^\dagger \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \bar{u}_i v_i + \cdots + \bar{u}_n v_n$
- 一般复线性空间 V 的内积 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$
 - 共轭： $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$
 - 对第二个变量线性： $\langle \mathbf{u}, c\mathbf{v} \rangle = c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$
 - 正定性： $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$, 等号成立当且仅当 $\mathbf{u} = 0$
- **注意**：对第一个变量不是简单的线性，而是多一个复共轭
 - $\langle a\mathbf{u} + b\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \overline{\langle \mathbf{w}, a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \rangle} = \overline{a\langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle + b\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle} = \bar{a}\overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle} + \bar{b}\overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle} = \bar{a}\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \bar{b}\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
- 定义了内积的空间叫做**内积空间**

内积和内积空间

- \mathbb{R}^n 标准内积：向量 \mathbf{u} 和 \mathbf{v} 的内积为 $\mathbf{u}^T \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i + \cdots + u_n v_n$
- 一般实线性空间 V 的内积 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$
 - 对称： $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$
 - 对第二个变量线性： $\langle \mathbf{u}, c\mathbf{v} \rangle = c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$
 - 正定性： $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$, 等号成立当且仅当 $\mathbf{u} = 0$
- **注意**：对第二个变量的线性加对称性可以推出对第一个变量线性

内积

- 复线性空间 V 的内积 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$
- 实际上我们只需要知道基之间的内积就可以算出任意向量之间的内积
 - $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 是复线性空间 V 上的一组基, 假设 $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = g_{ij}$ 。根据定义 $g_{ij} = \bar{g}_{ji}$
 - $\forall \mathbf{u}, \mathbf{w} \in V, u = x^1 \mathbf{v}_1 + \dots + x^n \mathbf{v}_n, w = y^1 \mathbf{v}_1 + \dots + y^n \mathbf{v}_n$
 - $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle x^1 \mathbf{v}_1 + \dots + x^n \mathbf{v}_n, y^1 \mathbf{v}_1 + \dots + y^n \mathbf{v}_n \rangle = \sum_{i,j=1}^n \bar{x}^i y^j g_{ij}$

内积空间和对偶空间

- 考虑 V 的对偶空间 V^* , V^* 中的元素是所有 V 到 \mathbb{C} 的线性函数
- 通过内积可以建立的 $V \rightarrow V^*$ 的一一映射
 - $\forall v \in V, g_v: V \rightarrow \mathbb{C}, g_v(w) \equiv \langle v, w \rangle$
 - 线性函数 $g_v(\cdot)$ 是 V^* 中的元素 ($g_v(\cdot)$ 代表一个自变量的函数, \cdot 代表自变量)
- 我们之前对于 V^* 上基的选取相当于取标准的内积
 - $\langle v, w \rangle = v^\dagger w$

例： \mathbb{C}^n 的标准内积

- \mathbb{C}^n 标准内积：向量 \mathbf{u} 和 \mathbf{v} 的内积为 $\mathbf{u}^\dagger \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \bar{u}_i v_i + \dots + \bar{u}_n v_n$
- \mathbb{C}^n 的对偶空间 $(\mathbb{C}^n)^*$
 - \mathbb{C}^n 上的标准基： $\mathbf{e}_i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T$
 - 利用内积得到的对应的 $(\mathbb{C}^n)^*$ 中的元素： $g_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{w}) \equiv w_i$
 - 也就是说： $g_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$ 。换句话说 $g_{\mathbf{e}_i}$ 就是之前的 e^{*i}

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/477142134144006033>