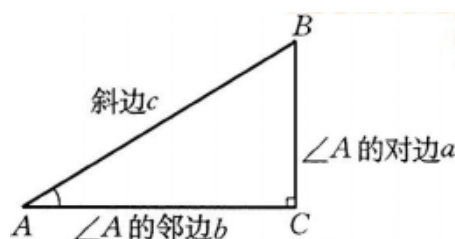
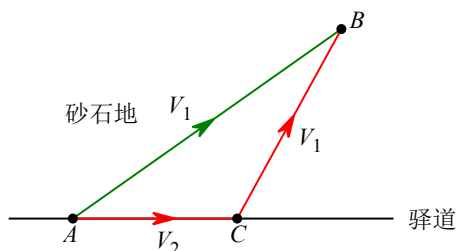


专题 27 最值模型之胡不归模型

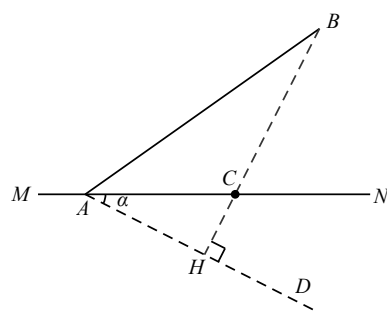
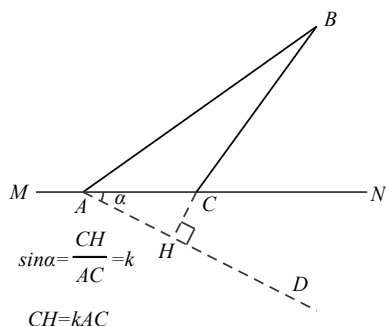
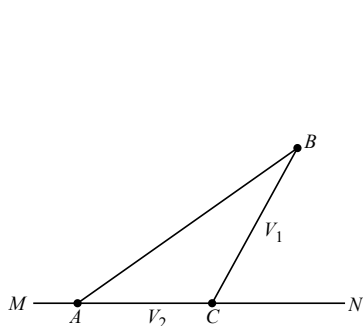
胡不归模型可看作将军饮马衍生，主要考查转化与化归等的数学思想，近年在中考数学和各地的模拟考中常以压轴题的形式考查，学生不易把握。本专题就最值模型中的胡不归问题进行梳理及对应试题分析，方便掌握。在解决胡不归问题主要依据是：点到线的距离垂线段最短。

【模型背景】从前有个少年外出求学，某天不幸得知老父亲病危的消息，便立即赶路回家。根据“两点之间线段最短”，虽然从他此刻位置 A 到家 B 之间是一片砂石地，但他义无反顾踏上归途，当赶到家时，老人刚咽了气，小伙子追悔莫及失声痛哭。邻居告诉小伙子说，老人弥留之际不断念叨着“胡不归？胡不归？”看到这里很多人都会有一个疑问，少年究竟能不能提前到家呢？假设可以提早到家，那么他该选择怎样的一条路线呢？这就是今天要讲的“胡不归”问题。



知识储备：在直角三角形中锐角 A 的对边与斜边的比叫做 $\angle A$ 的正弦，记作 $\sin A$ ，即 $\sin A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\text{斜边}}$ 。

【模型解读】一动点 P 在直线 MN 外的运动速度为 V_1 ，在直线 MN 上运动的速度为 V_2 ，且 $V_1 < V_2$ ， A 、 B 为定点，点 C 在直线 MN 上，确定点 C 的位置使 $\frac{AC}{V_2} + \frac{BC}{V_1}$ 的值最小。（注意与阿氏圆模型的区分）



1) $\frac{AC}{V_2} + \frac{BC}{V_1} = \frac{1}{V_1} \left(BC + \frac{V_1}{V_2} AC \right)$ ，记 $k = \frac{V_1}{V_2}$ ，即求 $BC + kAC$ 的最小值。

2) 构造射线 AD 使得 $\sin \angle DAN = k$ ， $\frac{CH}{AC} = k$ ， $CH = kAC$ ，将问题转化为求 $BC + CH$ 最小值。

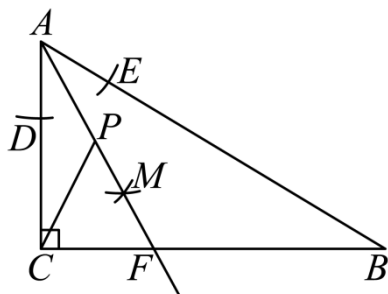
3) 过 B 点作 $BH \perp AD$ 交 MN 于点 C ，交 AD 于 H 点，此时 $BC + CH$ 取到最小值，即 $BC + kAC$ 最小。

【解题关键】在求形如“ $PA + kPB$ ”的式子的最值问题中，关键是构造与 kPB 相等的线段，将“ $PA + kPB$ ”型问题

转化为“ $PA+PC$ ”型。(若 $k>1$, 则提取系数, 转化为小于 1 的形式解决即可)。

【最值原理】 两点之间线段最短及垂线段最短。

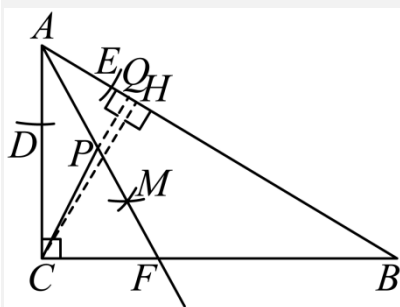
例 1. (2024·辽宁锦州·统考中考真题) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, $AC = 4$, 按下列步骤作图: ①在 AC 和 AB 上分别截取 AD 、 AE , 使 $AD = AE$. ②分别以点 D 和点 E 为圆心, 以大于 $\frac{1}{2}DE$ 的长为半径作弧, 两弧在 $\angle BAC$ 内交于点 M . ③作射线 AM 交 BC 于点 F . 若点 P 是线段 AF 上的一个动点, 连接 CP , 则 $CP + \frac{1}{2}AP$ 的最小值是_____.



【答案】 $2\sqrt{3}$

【分析】 过点 P 作 $PQ \perp AB$ 于点 Q , 过点 C 作 $CH \perp AB$ 于点 H , 先利用角平分线和三角形的内角和定理求出 $\angle BAF = 30^\circ$, 然后利用含 30° 的直角三角形的性质得出 $PQ = \frac{1}{2}AP$, 则 $CP + \frac{1}{2}AP = CP + PQ \geq CH$, 当 C 、 P 、 Q 三点共线, 且与 AB 垂直时, $CP + \frac{1}{2}AP$ 最小, $CP + \frac{1}{2}AP$ 最小值为 CH , 利用含 30° 的直角三角形的性质和勾股定理求出 AB , BC , 最后利用等面积法求解即可。

【详解】 解: 过点 P 作 $PQ \perp AB$ 于点 Q , 过点 C 作 $CH \perp AB$ 于点 H ,



由题意知: AF 平分 $\angle BAC$, $\therefore \angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, $\therefore \angle BAC = 60^\circ$,

$\therefore \angle BAF = \frac{1}{2}\angle BAC = 30^\circ$, $\therefore PQ = \frac{1}{2}AP$, $\therefore CP + \frac{1}{2}AP = CP + PQ \geq CH$,

$\therefore$ 当 C 、 P 、 Q 三点共线, 且与 AB 垂直时, $CP + \frac{1}{2}AP$ 最小, $CP + \frac{1}{2}AP$ 最小值为 CH ,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, $AC = 4$, $\therefore AB = 2AC = 8$, $\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 4\sqrt{3}$,

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot CH$, $\therefore CH = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{4 \times 4\sqrt{3}}{8} = 2\sqrt{3}$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/478015005132006066>