

专题 12 解三角形解答题分类练

一、利用正弦定理与余弦定理求角

1. (2024 届广西玉林市高三上学期联考) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c ,

$$\frac{\cos A}{\cos C} = \frac{a}{2b-c}.$$

(1) 求 A 的大小;

(2) 若 $a = \sqrt{7}$, $c = 3$, D 为 BC 的中点, 求 AD .

【解析】(1) 解: 因为 $\frac{\cos A}{\cos C} = \frac{a}{2b-c}$, 由正弦定理可得 $(2\sin B - \sin C)\cos A = \sin A \cos C$,

所以, $2\sin B \cos A = \sin C \cos A + \sin A \cos C = \sin(A+C) = \sin B$,

因为 $B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\sin B \neq 0$, 所以 $\cos A = \frac{1}{2}$,

因为 $0 < A < \frac{\pi}{2}$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

(2) 解: 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

所以 $(\sqrt{7})^2 = b^2 + 3^2 - 2 \times b \times 3 \times \cos \frac{\pi}{3}$, 所以 $b^2 - 3b + 2 = 0$, 解得 $b = 2$ 或 $b = 1$

当 $b = 1$ 时, $\cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab} = \frac{1 + 7 - 9}{2\sqrt{7}} < 0$, 则 C 为钝角, 不符合题意,

当 $b = 2$ 时, $\cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab} = \frac{4 + 7 - 9}{4\sqrt{7}} > 0$, 则 C 为锐角, 合乎题意, 故 $b = 2$,

因为 D 为 BC 的中点, 则 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$,

所以, $AD^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4}\left(c^2 + b^2 + 2cb \cos \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}\left(9 + 4 + 2 \times 3 \times 2 \times \frac{1}{2}\right)$
 $= \frac{19}{4}$, 故 $AD = \frac{\sqrt{19}}{2}$.

2. (2024 届河北省保定市唐县第一中学高三上学期 9 月月考) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A , B , C 的对边分别为 a , b , c , 且 $b = 2$, $a + c = \sqrt{4 + 3ac}$.

(1) 求角 B ;

(2) 求 AC 边上中线长 BD 的最大值.

【解析】(1) 由 $b = 2$, $a + c = \sqrt{4 + 3ac}$, 可得: $a^2 + c^2 + 2ac = 4 + 3ac$,

即 $a^2 + c^2 - b^2 = ac$,

所以 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$, 而 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$;

(2) 根据余弦定理可得, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, 即 $4 = a^2 + c^2 - ac$,

$\therefore 4 + ac = a^2 + c^2 \geq 2ac$, 即 $ac \leq 4$, 当且仅当 $a = c = 2$ 时, 等号成立.

Q BD 是 AC 边上中线, $\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$,

$$\therefore |\overrightarrow{BD}|^2 = (\overrightarrow{BD})^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2) = \frac{1}{4}(c^2 + ac + a^2)$$

$$= \frac{1}{4}(4 + 2ac) = 1 + \frac{1}{2}ac \leq 1 + 2 = 3,$$

$\therefore |\overrightarrow{BD}| \leq \sqrt{3}$, 当且仅当 $a = c = 2$ 时等号成立, 即 BD 的最大值为 $\sqrt{3}$.

3. (2024 届广东省揭阳市普宁市第二中学高三上学期月考) 在 $\triangle ABC$ 中, 设 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足 $b \cos A - a \cos B = a + c$.

(1) 求角 B ;

(2) 若 $b = 5$, $\triangle ABC$ 的内切圆半径 $r = \frac{\sqrt{3}}{4}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【解析】(1) 因为 $b \cos A - a \cos B = a + c$,

$$\text{由余弦定理得 } b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} - a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = a + c,$$

$$\text{即 } a^2 + c^2 - b^2 = -ac,$$

$$\text{所以 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{又 } B \in (0, \pi),$$

$$\text{所以 } B = \frac{2\pi}{3}$$

(2) 由余弦定理得: $a^2 + c^2 - 25 = -ac$, 则 $a^2 + c^2 = 25 - ac$,

$$\text{由三角形面积公式, } \frac{1}{2}(a + b + c) \cdot r = \frac{1}{2}ac \sin B, \text{ 即 } a + c = 2ac - 5,$$

$$\text{则 } a^2 + c^2 + 2ac = 4(ac)^2 - 20ac + 25,$$

$$\text{所以 } 25 - ac + 2ac = 4(ac)^2 - 20ac + 25, \text{ 解得 } ac = \frac{21}{4},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{21}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{21\sqrt{3}}{16}.$$

二、利用正弦定理与余弦定理求边

4. (2023 届新疆伊犁州霍尔果斯市高三上学期第一次月考) 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, $a \cos C + \sqrt{3} a \sin C - b - c = 0$.

(1) 求 A ;

(2)若 $a=2$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 b 、 c .

【解析】(1) 根据正弦定理, $a\cos C + \sqrt{3}a\sin C - b - c = 0$

变为 $\sin A\cos C + \sqrt{3}\sin A\sin C - \sin B - \sin C = 0$, 即 $\sin A\cos C + \sqrt{3}\sin A\sin C = \sin B + \sin C$,

也即 $\sin A\cos C + \sqrt{3}\sin A\sin C = \sin(A+C) + \sin C$,

所以 $\sin A\cos C + \sqrt{3}\sin A\sin C = \sin A\cos C + \cos A\sin C + \sin C$.

整理, 得 $\sqrt{3}\sin A - \cos A = 1$, 即 $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A - \frac{1}{2}\cos A = \frac{1}{2}$, 所以 $\sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, $A \in (0, \pi)$,

所以 $A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$, 则 $A = \frac{\pi}{3}$.

(2) 由 $A = \frac{\pi}{3}$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{3}$, 得 $bc = 4$.

由余弦定理, 得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = (b+c)^2 - 2bc - 2bc\cos A$,

则 $(b+c)^2 = a^2 + 3bc = 4 + 12 = 16$, 所以 $b+c = 4$. 则 $b=c=2$.

5. (2024 届山东省金科大联考高三上学期 9 月质量检测) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A , B , C 所对的边分别为 a , b , c , 且 $(a-c)(a+c)\sin C = c(b-c)\sin B$.

(1)求 A ;

(2)若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, $\sin B\sin C = \frac{1}{4}$, 求 a 的值.

【解析】(1) 因为 $(a-c)(a+c)\sin C = c(b-c)\sin B$,

所以 $(a-c)(a+c) \cdot c = c(b-c) \cdot b$,

即 $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$,

所以 $\cos A = \frac{1}{2}$, 又 $0 < A < \pi$,

所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

(2) 由正弦定理知, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$,

所以 $bc = (2R)^2 \sin B \sin C = \frac{1}{4} \cdot (2R)^2$,

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{8}(2R)^2 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{16} \cdot (2R)^2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$,

解得 $2R = 4$,

所以 $a = 2R \sin A = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

6. (2024 届河南省洛阳市等三地部分名校高三上学期联考) 已知 $\triangle ABC$ 的周长为 $10 + 2\sqrt{7}$, 且 $\sqrt{7}\sin A + \sqrt{7}\sin B = 5\sin C$.

(1) 求 AB 的长;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $12\sin C$, 求 C .

【解析】(1) 解: 设 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c .

因为 $\sqrt{7}\sin A + \sqrt{7}\sin B = 5\sin C$, 所以 $\sqrt{7}(a+b) = 5c$.

因为 $a+b+c = 10 + 2\sqrt{7}$, 所以 $AB = c = 2\sqrt{7}$;

(2) 因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}ab\sin C = 12\sin C$, 且 $\sin C \neq 0$,

所以 $ab = 24$.

由 (1) 可得 $a+b = 10$.

则 $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 52$.

由余弦定理可得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{52 - 28}{48} = \frac{1}{2}$.

因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{\pi}{3}$.

三、利用正弦定理与余弦定理求三角形面积

7. (2024 届江西省南昌市高三上学期摸底测试) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,

$C = \frac{\pi}{3}$, $a\cos B + b\cos A = abc$.

(1) 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 若 $c = 1$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

【解析】(1) 由已知, 在 $\triangle ABC$ 中有 $a\cos B + b\cos A = abc$, 故 $\sin A\cos B + \sin B\cos A = ab\sin C$,

即 $\sin(A+B) = ab\sin C$,

即 $\sin C = ab\sin C$, 而 $C \in (0, \pi)$, $\therefore \sin C \neq 0$, 所以 $ab = 1$,

又 $C = \frac{\pi}{3}$, 故 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

(2) 由余弦定理, 得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, 可得 $\frac{a^2 + b^2 - 1}{2} = \frac{1}{2}$,

所以 $a^2 + b^2 = 2$,

所以 $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 4$, 即 $a+b = 2$,

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 3.

8. (2023 届安徽省合肥市庐阳区高三上学期 12 月月考) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,

且 $\frac{(c-a)\sin A}{c+b} = \sin C - \sin B$.

(1) 求 B ;

(2) 若 $\frac{1}{\tan A}, \frac{1}{\tan B}, \frac{1}{\tan C}$ 成等差数列, $a=2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【解析】(1) 由正弦定理得 $\frac{(c-a)a}{c+b} = c-b$, 即 $ac = a^2 + c^2 - b^2$,

再由余弦定理可得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$,

因为 $0 < B < \pi$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$;

(2) 因为 $\frac{1}{\tan A}, \frac{1}{\tan B}, \frac{1}{\tan C}$ 成等差数列, 所以 $\frac{2}{\tan B} = \frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan C}$,

即 $\frac{2\cos B}{\sin B} = \frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos C}{\sin C}$,

由正弦定理、余弦定理可得

$$\frac{2\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}{b} = \frac{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{a} + \frac{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}{c},$$

整理得 $a^2 + c^2 = 2b^2$ ①,

又 $a=2, B=\frac{\pi}{3}$, 由余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - ac$ ②,

由①②可得 $a=c=2$,

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

9. (2024 届山东省泰安市肥城市高三上学期 9 月月考) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知

$A=135^\circ, b=2, c=\sqrt{2}$.

(1) 求 $\sin C$ 的值;

(2) 若 D 是 BC 上一点, $AC \perp AD$, 求 $\triangle ABD$ 的面积.

【解析】(1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ 得

$a^2 = 4 + 2 + 2 \times 2 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 10$, 所以 $a = \sqrt{10}$.

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 得 $\sin C = \frac{c\sin A}{a} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

(2) 因为 $AC \perp AD$ ，所以 $\angle CAD = 90^\circ$ ， C 为锐角，

由 $\sin C = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ，得 $\tan C = \frac{1}{3}$ 。

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中， $\tan C = \frac{AD}{AC}$ ，得 $AD = AC \tan C = \frac{2}{3}$ ，

因为 $\angle BAD = 45^\circ$ ，所以 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3}$ 。

四、利用正弦定理与余弦定理求范围与最值问题

10. (2024 届湖南省益阳市高三上学期 9 月月考) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ， $c = 4$ ，且 $(a-b)\sin A + (b+c)\sin B = (4+b)\sin C$ 。

(1) 求 $\cos C$ ；

(2) 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值。

【解析】(1) 因为 $(a-b)\sin A + (b+c)\sin B = (4+b)\sin C$ ，注意到 $c = 4$ 且结合正弦定理

$$a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C$$

有 $(a-b)a + (b+c)b = (c+b)c$ ，整理得 $a^2 + b^2 - c^2 = ab$ ，

所以由余弦定理可得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2}$ 。

(2) 由 (1) 可知 $a^2 + b^2 - c^2 = ab$ ，且注意到 $c = 4$ ，所以有 $a^2 + b^2 - ab = 16 = c^2$ ，

利用基本不等式得 $16 = a^2 + b^2 - ab \geq 2ab - ab = ab$ ，即 ab 有最大值 16，当且仅当 $a = b = 4$ 时取到；

又由 (1) 可知 $\cos C = \frac{1}{2}$ ，所以 $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

综上所述： $S = \frac{1}{2} ab \sin C \leq \frac{1}{2} \times 16 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ ；即 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $4\sqrt{3}$ 。

11. (2024 THUSSAT 中学生标准学术能力诊断性测试高三上学期 9 月测试届) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $c = 2a \cos A \cos B - b \cos 2A$ ($A \leq B$)。

(1) 求 A ；

(2) 若 D 是 BC 上的一点，且 $BD:DC = 1:2$ ， $AD = 2$ ，求 a 的最小值。

【解析】(1) 由 $c = 2a \cos A \cos B - b \cos 2A$ ($A \leq B$)，

$$\therefore \sin C = 2 \sin A \cos A \cos B - \sin B \cos 2A$$

$$\therefore \sin C = \sin 2A \cos B - \sin B \cos 2A = \sin(2A - B) > 0$$

又 $0 < 2A - B < \pi$ ，则 $C = 2A - B$ 或 $C + 2A - B = \pi$ ，

若 $C = 2A - B$ ，则 $A = \frac{\pi}{3}$ ；

若 $C + 2A - B = \pi$ ，则 $A = 2B$ ，又 $A \leq B$ ，不符合题意，舍去，

综上所述 $A = \frac{\pi}{3}$ 。

$$(2) \text{ 由 } 2BD = DC, \therefore AD = \frac{2AB + AC}{3}, \therefore (AD)^2 = \left(\frac{2AB + AC}{3} \right)^2$$

$$\therefore b^2 + 4c^2 + 2bc = 36 \text{ ①}, \text{ 又 } a^2 = b^2 + c^2 - bc \text{ ②},$$

$$\text{①} \div \text{②} \text{ 得: } \frac{36}{a^2} = \frac{4c^2 + b^2 + 2bc}{b^2 + c^2 - bc} = \frac{4\left(\frac{c}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{c}{b}\right) + 1}{\left(\frac{c}{b}\right)^2 - \left(\frac{c}{b}\right) + 1}$$

$$\text{令 } \frac{c}{b} = x, \text{ 又 } A \leq B, \therefore a \leq b, \therefore a^2 \leq b^2, \therefore b^2 + c^2 - bc \leq b^2,$$

$$\therefore c \leq b, \therefore 0 < \frac{c}{b} = x \leq 1,$$

$$\text{令 } f(x) = \frac{4x^2 + 2x + 1}{x^2 - x + 1} (0 < x \leq 1), \text{ 则 } f(x) = 4 + \frac{6x - 3}{x^2 - x + 1}$$

$$\text{令 } 6x - 3 = t, x = \frac{t + 3}{6},$$

$$\text{令 } g(t) = f(x) = 4 + \frac{36t}{t^2 + 27} (-3 < t \leq 3),$$

$$\text{当 } t = 0 \text{ 时 } g(t) = 4, \text{ 当 } t \neq 0 \text{ 时 } g(t) = 4 + \frac{36}{t + \frac{27}{t}} (-3 < t \leq 3),$$

$$\text{由对勾函数性质可得当 } 0 < t \leq 3 \text{ 时, } y = t + \frac{27}{t} \text{ 为减函数, 故 } t + \frac{27}{t} \geq 3 + \frac{27}{3} = 12,$$

$$\text{同理当 } t < 0 \text{ 时 } t + \frac{27}{t} < -12,$$

$$\therefore 1 < g(t) \leq 7, \therefore \frac{36}{a^2} \leq 7, \therefore a \geq \frac{6\sqrt{7}}{7}$$

所以当三角形 ABC 为等边三角形时 a 最小，最小值为 $\frac{6\sqrt{7}}{7}$

12. (2024 届河南省洛阳市洛宁县高三上学期第二次月考) 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c 且 $\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = \sin B \sin C$ 。

(1) 求角 A ；

(2) 若 $a = 4\sqrt{3}$ ，求 $\triangle ABC$ 周长的范围。

【解析】(1) $\because \sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = \sin B \sin C$ ，由正弦定理得 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$ ，

由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$ ， $\because A \in (0, \pi)$ ，

$$\therefore A = \frac{\pi}{3}；$$

(2) 由(1)知 $A = \frac{\pi}{3}$ ，又已知 $a = 4\sqrt{3}$ ，由正弦定理得：

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 8，$$

$$\therefore b = 8\sin B，c = 8\sin C，$$

$$b + c = 8\sin B + 8\sin C = 8\left[\sin B + \sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right)\right] = 8\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos B + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\right) = 8\sqrt{3}\sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right)，$$

$$\text{由 } 0 < B < \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} < B + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}，\text{ 于是 } \frac{1}{2} < \sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1，$$

$$\text{故 } 4\sqrt{3} < b + c \leq 8\sqrt{3}，\text{ 于是 } 8\sqrt{3} < a + b + c \leq 12\sqrt{3}，$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 周长的范围是 } (8\sqrt{3}, 12\sqrt{3}]。$$

13. (2024 届河北省保定市重点高中高三上学期考试) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，

$$\text{若 } \frac{a+b}{c} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin A - \sin B}。$$

(1) 求角 A 的大小；

(2) 若 D 为 BC 上一点， $\angle BAD = \angle CAD$ ， $AD = 3$ ，求 $4b + c$ 的最小值。

$$\text{【解析】(1) 依题意，} \frac{a+b}{c} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin A - \sin B}，$$

$$\text{由正弦定理得 } \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a-b}，a^2 - b^2 = bc + c^2，$$

$$c^2 + b^2 - a^2 = -bc，\text{ 所以 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2} < 0，$$

$$\text{所以 } A \text{ 是钝角，所以 } A = \frac{2\pi}{3}。$$

$$(2) \angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2}A = \frac{\pi}{3}，$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}，\text{ 所以 } \frac{1}{2}bc \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}c \cdot 3 \cdot \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}b \cdot 3 \cdot \sin \frac{\pi}{3}，$$

$$\text{即 } bc = 3(c+b)，\frac{b+c}{bc} = \frac{3}{c} + \frac{3}{b} = 1，$$

$$\text{所以 } 4b + c = (4b + c)\left(\frac{3}{c} + \frac{3}{b}\right) = 15 + \frac{12b}{c} + \frac{3c}{b} \geq 15 + 2\sqrt{\frac{12b}{c} \cdot \frac{3c}{b}} = 27，$$

当且仅当 $\begin{cases} \frac{12b}{c} = \frac{3c}{b} \\ bc = 3(c+b) \end{cases}, c = 2b = 9$ 时等号成立.

五、与三角形中线、角平分线、高有关的解三角形问题

14. (2024 届四川省南充高中高三上学期第一次月考) 已知 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $C = 120^\circ$.

(1) 若 $a = 2b$, 求 $\tan A$ 的值;

(2) 若 $\angle ACB$ 的平分线交 AB 于点 D , 且 $CD = 2$, $AD = \sqrt{7}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【解析】(1) 由 $a = 2b$ 以及正弦定理得 $\sin A = 2 \sin B = 2 \sin(A + C) = 2 \sin\left(A + \frac{2\pi}{3}\right)$

$$= 2 \left(-\frac{1}{2} \sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A \right) = -\sin A + \sqrt{3} \cos A,$$

所以 $2 \sin A = \sqrt{3} \cos A, \tan A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) 依题意, $\angle ACD = \angle BCD = 60^\circ$,

由正弦定理得 $\frac{AD}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sin \angle ADC}, \frac{BD}{\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sin \angle BDC},$

由于 $\sin \angle ADC = \sin \angle BDC$, 所以 $\frac{AD}{BD} = \frac{b}{a}, BD = \frac{\sqrt{7}a}{b},$

所以 $c = \sqrt{7} + \frac{\sqrt{7}a}{b} = \sqrt{7} \left(1 + \frac{a}{b} \right) = \frac{\sqrt{7}(a+b)}{b}, bc = \sqrt{7}(a+b),$

由 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD}, \frac{1}{2} ab \sin 120^\circ = \frac{1}{2} b \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} a \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ,$

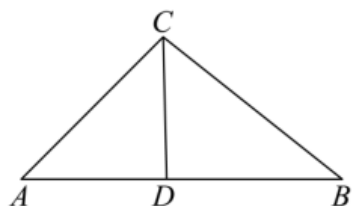
$ab = 2(b+a) = 2 \times \frac{bc}{\sqrt{7}}, c = \frac{\sqrt{7}}{2} a,$

由余弦定理得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 120^\circ = a^2 + b^2 + ab,$

即 $\frac{7}{4} a^2 = a^2 + b^2 + ab, 3a^2 - 4ab - 4b^2 = 0, (a-2b)(3a+2b) = 0, a = 2b,$

则由 $ab = 2(b+a)$ 得 $2b^2 = 6b, b = 3, a = 2b = 6,$

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$



15. (2024 届广东省揭阳市普宁市高三上学期第一次月考) 在 $\triangle ABC$ 中, 记角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $a \cos C + \sqrt{3}a \sin C - b - 2c = 0$.

(1) 求角 A ;

(2) 若 $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{2}{3}$, AD 为 BC 边上的中线, 求 $\tan \angle BAD$.

【解析】(1) 由正弦定理得 $\sin A \cos C + \sqrt{3} \sin A \sin C - \sin B - 2 \sin C = 0$,

因为 $B = \pi - A - C$, 所以 $\sin A \cos C + \sqrt{3} \sin A \sin C - \sin(A + C) - 2 \sin C = 0$,

所以 $\sin A \cos C + \sqrt{3} \sin A \sin C - \sin A \cos C - \cos A \sin C - 2 \sin C = 0$,

即 $\sqrt{3} \sin A \sin C - \cos A \sin C - 2 \sin C = 0$,

又 $C \in (0, \pi)$, $\therefore \sin C \neq 0$, 所以 $\sqrt{3} \sin A - \cos A = 2$,

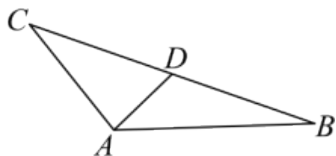
即 $2 \sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = 2$, 又 $A \in (0, \pi)$,

所以 $A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 所以 $A = \frac{2\pi}{3}$.

(2) 因为 $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{2}{3}$, 所以由正弦定理得 $\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{2}{3}$,

设 $\angle BAD = \theta$, 则 $\angle CAD = \frac{2\pi}{3} - \theta$,

因为 AD 为 BC 边上的中线, 所以 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD}$,



即 $\frac{1}{2}c \cdot AD \cdot \sin \theta = \frac{1}{2}b \cdot AD \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right)$,

即 $3 \sin \theta = 2 \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right)$, $3 \sin \theta = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta\right)$,

即 $2 \sin \theta = \sqrt{3} \cos \theta$, 显然 $\cos \theta \neq 0$, 所以 $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

即 $\tan \angle BAD = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

16. (2024 届河北省秦皇岛市部分学校高三上学期开学检测) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,

面积为 S , 已知 $b^2 = \frac{2\sqrt{3}S}{3} + ab \cos C$.

(1) 求 A 的值;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/478021004117006116>