第43课　综合型问题

专题解读

近年来，各地中考试卷中出现的综合型压轴题，常以数学主干知识——代数的核心知识(函数、方程、不等式)和几何的核心知识(用运动变换的观点研究三角形、四边形和圆的基本性质)，结合重要的数学思想方法加以设计，重视数学分类讨论、数形结合、运动变化、建模、化归(转化)等基本思想的考核和数学观察、实验探究等感知能力、归纳类比等合情推理以及演绎推理能力水平的考查．近年来，主要有以下几种类型：

(1)函数、方程(或不等式)综合问题；

(2)几何型综合问题；

(3)函数、方程(或不等式)、几何综合问题．

综合型试题一般难在数学思想方法和数学推理等思维能力的要求上，不是难在解题技巧上，导向性非常明确．

真题评讲

类型一　函数、方程(或不等式)综合问题

【精选考题 1】 (2013·天津)已知抛物线 $y_1=ax^2+bx+c(a\neq 0)$的对称轴是直线 l，顶点为 M.若自变量 x 与函数值 y_1 的部分对应值如下表所示：

x	…	-1	0	3	…
$y_1=ax^2+bx+c$	…	0	$\frac{9}{4}$	0	…

(1)求 y_1 与 x 之间的函数关系式；

(2)若经过点 $T(0，t)$作垂直于 y 轴的直线 l'，A 为直线 l'上的动点，线段 AM 的垂直平分线交直线 l 于点 B，点 B 关于直线 AM 的对称点为 P，记做 $P(x，y_2)$；

①求 y_2 与 x 之间的函数关系式；

②当 x 取任意实数时，若对于同一个 x，有 $y_1<y_2$ 恒成立，求 t 的取值范围.

点评：(1)本题主要考查二次函数的综合知识，涉及到用待定系数法求二次函数的解析式、勾股定理及二次函数的性质，难度较大.

(2)解答此类题目时要抓住函数的图象与性质，注意数形结合思想的运用.

解析：(1)∵抛物线 $y_1=ax^2+bx+c$ 经过点$\left(0, \frac{9}{4}\right)$，

∴$c=\frac{9}{4}$.

∴$y_1=ax^2+bx+\frac{9}{4}$.

∵点$(-1, 0)$，$(3, 0)$在抛物线 $y_1=ax^2+bx+\frac{9}{4}$上，

∴$\begin{cases} a-b+\frac{9}{4}=0, \\ 9a+3b+\frac{9}{4}=0, \end{cases}$ 解得$\begin{cases} a=-\frac{3}{4}, \\ b=\frac{3}{2}. \end{cases}$

∴y_1 与 x 之间的函数关系式为 $y_1=-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}$.

(2)①由 $y_1=-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}$配方，得 $y_1=-\frac{3}{4}(x-1)^2+3$，

∴直线 l 为 $x=1$，抛物线的顶点为 $M(1，3)$．由题意，得 $t\neq3$.

如解图 1，记直线 l 与直线 l'交于点 C，则点 $C(1，t)$．

当点 A 与点 C 不重合时，

由已知，得 AM 与 BP 互相垂直平分，

∴四边形 $ABMP$ 为菱形，∴PA∥直线 l.

∵点 $P(x，y_2)$，∴点 $A(x，t)(x\neq1)$，∴$PM=PA=|y_2-t|$.

过点 P 作 $PQ\perp l$ 于点 Q，则点 $Q(1，y_2)$，

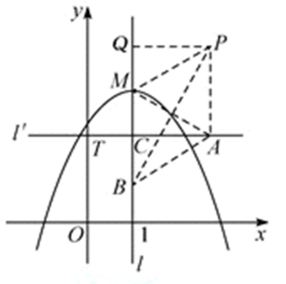
∴$QM=|y_2-3|$，$PQ=AC=|x-1|$，

在 Rt△PQM 中，由 $PM^2=QM^2+PQ^2$，得$(y_2-t)^2=(y_2-3)^2+(x-1)^2$，

整理，得 $y_2=\frac{1}{6-2t}(x-1)^2+\frac{t+3}{2}$，即 $y_2=\frac{1}{6-2t}x^2-\frac{1}{3-t}x+\frac{10-t^2}{6-2t}$.

当点 A 与点 C 重合时，点 B 与点 P 重合，可知点 $P\left(1，\frac{t+3}{2}\right)$，其坐标也满足上式.

∴y_2 与 x 之间的函数关系式为 $y_2=\frac{1}{6-2t}x^2-\frac{1}{3-t}x+\frac{10-t^2}{6-2t}(t\neq3)$.



(解图 1)

②根据题意，借助函数图象：

当抛物线y_2开口方向向上时，$6-2t>0$，即$t<3$时，

抛物线y_2的顶点$M(1，3)$，抛物线y_2的顶点$\left(1，\dfrac{t+3}{2}\right)$，由$3>\dfrac{t+3}{2}$，可知不符合题意；

当抛物线y_2开口方向向下时，$6-2t<0$，即$t>3$时，

$y_1-y_2=-\dfrac{3}{4}(x-1)^2+3-\left[\dfrac{1}{6-2t}(x-1)^2+\dfrac{t+3}{2}\right]=\dfrac{3t-11}{4(3-t)}(x-1)^2+\dfrac{3-t}{2}$.

若$3t-11\neq 0$，要使$y_1<y_2$恒成立，

只要抛物线$y=\dfrac{3t-11}{4(3-t)}(x-1)^2+\dfrac{3-t}{2}$开口方向向下，且顶点$\left(1，\dfrac{3-t}{2}\right)$在$x$轴下方即可.

$\because 3-t<0$，$\therefore 3t-11>0$，解得$t>\dfrac{11}{3}$，符合题意；

若$3t-11=0$，则$y_1-y_2=-\dfrac{1}{3}<0$，$\therefore t=\dfrac{11}{3}$也符合题意.

综上所述，可以使$y_1<y_2$恒成立的t的取值范围是$t\geq\dfrac{11}{3}$.

名师点拨

1．函数、方程(或不等式)综合问题，常常以函数为主线，一般需要先建立函数模型并求出函数解析式，重点考查函数的图象及性质和方程及不等式的有关理论的综合．解题时要注意函数的图象信息与方程的代数信息的相互转化，数形结合，充分利用函数思想和方程思想．例如：函数图象与 x 轴交点的横坐标即为相应的方程的根；点在函数图象上即点的坐标满足函数的解析式等．

2．函数与方程虽是两个不同的数学概念，但它们之间相互联系、相互渗透，一个函数若有表达式，那么这个表达式就可以看成是一个方程，它的两端可以分别看成函数．因此，许多有关方程的问题可用函数的方法解决；反之，许多有关函数的问题也可以用方程的方法解决．同理：不等式与函数一样可以借助图象和坐标建立联系．

【预测演练 1－1】　给出下列命题及函数 $y=x$，$y=x^2$ 和 $y=\frac{1}{x}$.

①如果 $\frac{1}{a}>a>a^2$，那么 $0<a<1$；

②如果 $a^2>a>\frac{1}{a}$，那么 $a>1$；

③如果 $\frac{1}{a}>a^2>a$，那么 $-1<a<0$；

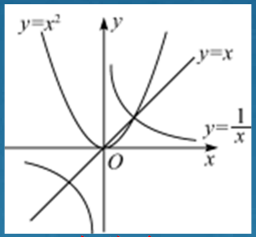
④如果 $a^2>\frac{1}{a}>a$ 时，那么 $a<-1$.

则　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(　　)

A．正确的命题是①④　B．错误的命题是②③④

C．正确的命题是①②　D．错误的命题只有③

解析：三个函数图象如解图 2.



(解图 2)

易得 $x=1$ 时，三个函数的函数值都是 1，∴交点坐标为(1，1).

根据对称性，$y=x$ 和 $y=\frac{1}{x}$在第三象限的交点坐标为(－1，－1).

如果$\frac{1}{a}>a>a^2$，那么 $0<a<1$，故①正确;

如果 $a^2>a>\frac{1}{a}$，那么 $a>1$ 或$-1<a<0$，故②错误;

如果$\frac{1}{a}>a^2>a$，那么 a 值不存在，故③错误;

如果 $a^2>\frac{1}{a}>a$，那么 $a<-1$，故④正确.

综上所述，正确的命题是①④.

答案：A

【预测演练 1－2】　设 a，b 是任意两个不等实数，我们规定：满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的所有取值的全体叫做闭区间，表示为$\{a,b\}$，对于一个函数，如果它的自变量 x 与函数值 y 满足：当 $m\leqslant x\leqslant n$ 时，有 $m\leqslant y\leqslant n$，我们就称此函数是闭区间$\{m,n\}$上的“闭函数”．

(1)反比列函数 $y=\frac{2013}{x}$是闭区间$\{1,2013\}$上的“闭函数”吗？请判断并说明理由；

(2)若一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$是闭区间$\{m,n\}$上的“闭函数”，求此函数的解析式；

(3)若二次函数 $y=\frac{1}{5}x^2-\frac{4}{5}x-\frac{7}{5}$是闭区间$\{a,b\}$上的“闭函数”，求实数 a，b 的值．

解析：(1)是，理由如下：

∵当 $1\leq x\leq 2013$ 时，$1\leq y\leq 2013$，∴$y=\frac{2013}{x}$是闭区间$\{1,2013\}$上的闭函数.

(2) Ⅰ.当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而增大，∴$mk+b\leq y\leq nk+b$，

∴$\begin{cases}m=mk+b,\\n=nk+b,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k=1,\\b=0.\end{cases}$ ∴$y=x$.

Ⅱ.当 $k<0$ 时 y 随 x 的增大而减小，∴$nk+b\leq y\leq mk+b$，

∴$\begin{cases}m=nk+b,\\n=mk+b,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k=-1,\\b=m+n.\end{cases}$ ∴$y=-x+m+n$.

(3)二次函数 $y=\frac{1}{5}x^2-\frac{4}{5}x-\frac{7}{5}$ 的对称轴为 $x=2$.

且当 $x\le 2$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>2$ 时，y 随 x 的增大而增大，分三种情形讨论.

Ⅰ.当 $b\le 2$ 时，y 随 x 的增大而减小，

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{5}(a^2-4a-7)=b, & ① \\ \frac{1}{5}(b^2-4b-7)=a, & ② \end{cases}$$

①－②，得 $(a+b+1)(a-b)=0$.

$\because a\neq b$，$\therefore b=-1-a$.

把 $b=-1-a$ 代入①，得 $a^2+a-2=0$，

解得 $a_1=-2$，$a_2=1$，

$\therefore$ 对应的 $b_1=1$，$b_2=-2$.

$\because b>a$，$\therefore a=-2$，$b=1$.

Ⅱ.当 $a<2<b$ 时，此时最小值为 $-\frac{11}{5}=a$.

根据闭函数的定义，知 b 可能为 $\frac{1}{5}a^2-\frac{4}{5}a-\frac{7}{5}$，也可能为 $\frac{1}{5}b^2-\frac{4}{5}b-\frac{7}{5}$.

当 $b=\frac{1}{5}a^2-\frac{4}{5}a-\frac{7}{5}$时，$b=\frac{1}{5}\times\left(-\frac{11}{5}\right)^2-\frac{4}{5}\times\left(-\frac{11}{5}\right)-\frac{7}{5}=\frac{166}{125}<2$，不符合；

当 $b=\frac{1}{5}b^2-\frac{4}{5}b-\frac{7}{5}$时，解得 $b=\frac{9\pm\sqrt{109}}{2}$.

$\because b>2$，$\therefore b=\frac{9+\sqrt{109}}{2}$.

Ⅲ.当 $a\geq2$ 时，y 随 x 的增大而增大，

$\therefore\begin{cases}\frac{1}{5}(a^2-4a-7)=a,\\ \frac{1}{5}(b^2-4b-7)=b,\end{cases}$ 由 $a<b$，解得$\begin{cases}a=\frac{9-\sqrt{109}}{2},\\ b=\frac{9+\sqrt{109}}{2}.\end{cases}$

$\because\frac{9-\sqrt{109}}{2}<2$，$\therefore$舍去.

综上所述，$\begin{cases}a=-2,\\ b=1\end{cases}$ 或$\begin{cases}a=-\frac{11}{5},\\ b=\frac{9+\sqrt{109}}{2}.\end{cases}$

真题评讲

类型二　几何型综合问题

【精选考题 2－1】　(2013·浙江杭州)如图 43－1，射线 QN 与等边△ABC 的两边 AB，BC 分别交于点 M，N，且 $AC \parallel QN$，$AM=MB=2$ cm，$QM=4$ cm.动点 P 从点 Q 出发，沿射线 QN 以每秒 1 cm 的速度向右移动，经过 ts，以点 P 为圆心，$\sqrt{3}$cm 为半径的圆与△ABC 的边相切(切点在边上)，请写出 t 可取的一切值：_____(单位：秒).

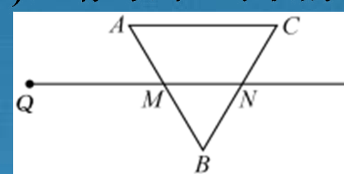


图 43－1

点评：(1)本题主要考查学生综合运用定理进行计算的能力，涉及的知识点有等边三角形的性质、平行线的性质、勾股定理、含 30°角的直角三角形的性质、切线的性质的应用，是一道填空题压轴题，难度较大.

(2)求出 $AB=AC=BC=4$ cm，$MN=\frac{1}{2}AC=2$ cm，$\angle BMN=\angle BNM=\angle C=\angle A=60°$，分情况画出图形，结合图形求解即可.

(3)分三种情况分类讨论是解决本题的关键.

解析：∵△ABC 是等边三角形，

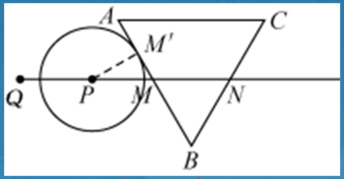
∴$AB=AC=BC=AM+MB=4$ cm，$\angle A=\angle C=\angle B=60°$.

∵$QN \parallel AC$，$AM=BM$，∴N 为 BC 的中点，

∴$MN=\frac{1}{2}AC=2$ cm，$\angle BMN=\angle BNM=\angle C=\angle A=60°$.

分三种情况讨论:

①如解图 3，



(解图 3)

当⊙P 切 AB 于点 M'时，连结 PM'，

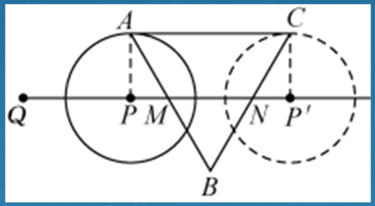
则 $PM'=\sqrt{3}$cm，$\angle PM'M=90°$.

∵$\angle PMM'=\angle BMN=60°$，

∴$M'M=1$ cm，$PM=2MM'=2$ cm，

∴$QP=4-2=2$ (cm)，即 $t=2$.

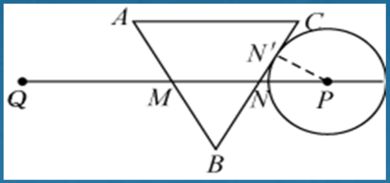
②∵△ABC是正三角形，边长为4cm，
∴点B到AC的距离为$2\sqrt{3}$cm，∴MN到AC的距离为$\sqrt{3}$ cm.
如解图4，



(解图4)

当⊙P与AC切于点A时，连结PA，
则$\angle CAP=\angle APM=90°$，$\angle PMA=\angle BMN=60°$，$AP=\sqrt{3}$cm，
∴$PM=1$ cm，∴$QP=4-1=3$ (cm)，即$t=3$.
当⊙P与AC切于点C时，连结PC，
则$\angle CP'N=\angle ACP'=90°$，$\angle P'NC=\angle BNM=60°$，$CP'=\sqrt{3}$ cm，
∴$P'N=1$ cm，∴$QP'=4+2+1=7$ (cm)，即$t=7$.
∴当$3\le t\le 7$时，⊙P和AC边相切.

③如解图 5，



(解图 5)

当⊙P 切 BC 于点 N'时，连结 PN'，

则 $PN'=\sqrt{3}$ cm，$\angle PN'N=90°$.

$\because \angle PNN'=\angle BNM=60°$，

$\therefore N'N=1$ cm，$PN=2NN'=2$ cm，

$\therefore QP=4+2+2=8$ (cm)，即 $t=8$.

综上所述，$t=2$ 或 $3\leq t\leq 7$ 或 $t=8$.

答案：$t=2$ 或 $3\leq t\leq 7$ 或 $t=8$

【精选考题 2－2】 (2013·江苏南京)对于两个相似三角形，如果沿周界按对应点顺序环绕的方向相同，那么称这两个三角形互为顺相似；如果沿周界按对应点顺序环绕的方向相反，那么称这两个三角形互为逆相似．例如，如图 43－2①，$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，且沿周界 $ABCA$ 与 $A'B'C'A'$ 环绕的方向相同，因此$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$互为顺相似；如图 43－2②，$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，且沿周界 $ABCA$ 与 $A'B'C'A'$环绕的方向相反，因此$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$互为逆相似．

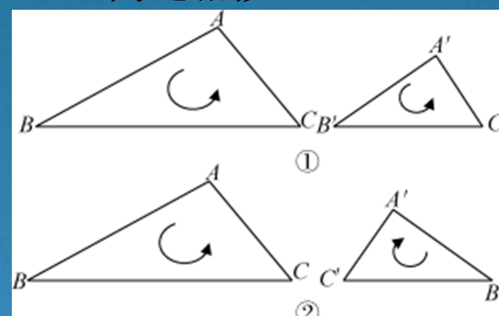


图 43－2

(1)根据图 43－3①②③满足的条件，可得下列三对相似三角形：①$\triangle ADE$ 与$\triangle ABC$；②$\triangle GHO$ 与$\triangle KFO$；③$\triangle NQP$ 与$\triangle NMQ$.其中，互为顺相似的是①，互为逆相似的是②③；(填写所有符合要求的序号．)

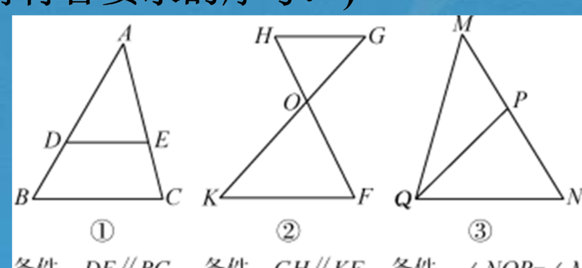


图 43－3

(2)如图43－4，在锐角△*ABC*中，∠*A*＜∠*B*＜∠*C*，点*P*在△*ABC*的边上(不与*A*，*B*，*C*重合)过点*P*画直线截△*ABC*，使截得的一个三角形与△*ABC*互为逆相似，请根据点*P*的不同位置，探究过点*P*的截线的情形，画出图形并说明截线满足的条件，不必说明理由.

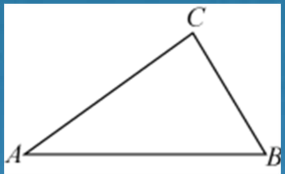


图43－4

点评：(1)本题是创新型中考压轴题，主要考查相似三角形的知识点、分类讨论的数学思想以及接受与理解新生事物的能力，难度较大.

(2)准确理解题设条件中“顺相似”“逆相似”的定义是正确解题的先决条件，在分析与解决问题的过程中，要考虑全面，根据点*P*在△*ABC*边上的位置分为三种情况分类讨论，逐一分析求解，避免漏解.