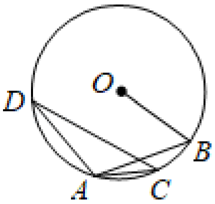
专题15 圆中常作的辅助线（原卷版）

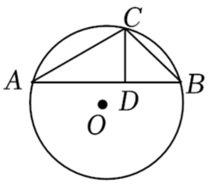
第一部分 典例剖析

类型一 连半径

1．（2023秋•温州期中）如图，在⊙O中，$\angle BAC=15°$，$\angle ADC=20°$，则$\angle ABO$的度数为 ____.



2．（2023•双柏县模拟）如图，△ABC内接于⊙O，$\angle CAB=30°$，$\angle CBA=45°$，$CD\perp AB$于点D，若⊙O的半径为2，则CD的长为（　　）



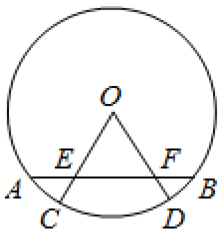
A．1　　　　B．$2\sqrt{2}$　　　　C．$\sqrt{2}$　　　　D．$\sqrt{3}$

二、作弦心距

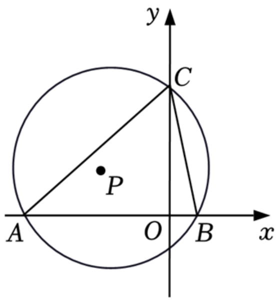
3．（2023秋•雁塔区校级期中）如图，AB为⊙O的弦，半径OC，OD分别交AB于点E，F．且$\widehat{AC}=\widehat{DB}$．

（1）求证：$AE=BF$；

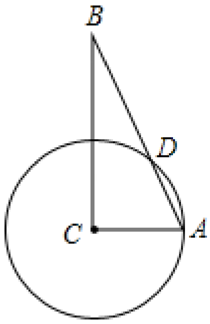
（2）作半径$ON\perp AB$于点M，若$AB=12$，$MN=3$，求OM的长．



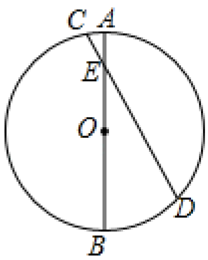
4．（2023秋•慈溪市期中）如图，⊙P与x轴交于点A（﹣5，0），B（1，0），与y轴的正半轴交于点C．若$\angle ACB=60°$，则点C的纵坐标为 ____.



5．（2023秋•肇源县期末）已知：如图，在△ABC中，∠ACB＝90°，∠B＝25°，以点C为圆心、AC为半径作⊙C，交AB于点D，求$\widehat{AD}$的度数．

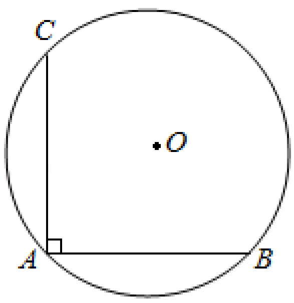


6．（2023•浦东新区模拟）如图，已知AB是圆O的直径，弦CD交AB于点E，∠CEA＝30°，OE＝4，DE＝$5\sqrt{3}$，求弦CD及圆O的半径长．



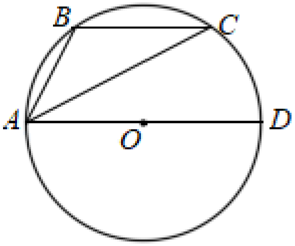
类型三 圆周角为直角，连接直径

7．如图，AB，AC是⊙O的两条弦，且∠CAB＝90°，若AB＝10，AC＝8，求⊙O的半径．



类型四 有直径，做直径所对的圆周角

8．（2023•济宁一模）如图，△ABC是⊙O的内接三角形，AB＝BC，∠BAC＝30°，AD是直径，AD＝8，则AC的长为____．



9．（2023秋•南宁期末）如图1，已知 AB 为⊙O 的直径，C 为⊙O 上一点，AC 平分∠DAB，$AD\perp CD$ 于点 D，并与⊙O 交于点 E．

（1）求证：CD 是⊙O 的切线；

（2）若 $DE=8$，$DC=12$，求⊙O 的半径；

（3）如图2，F 为 $\widehat{AB}$ 中点，连接 EF，在（2）的条件下，求 EF 的长．

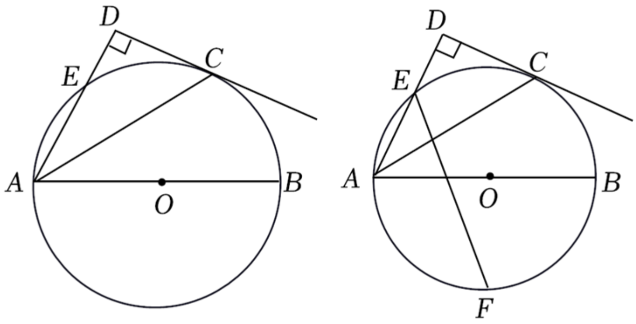


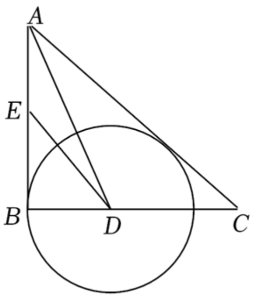
图1　　图2

类型五 见切线作半径

10．（2023•八步区一模）如图，在 Rt△ABC 中，∠BAC 的角平分线交 BC 于点 D，E 为 AB 上一点，$DE=DC$，以 D 为圆心，DB 的长为半径作⊙D，$AB=5$，$BE=3$．

（1）求证：AC 是⊙D 的切线；

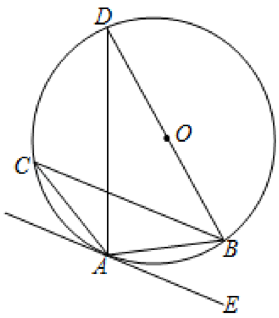
（2）求线段 AC 的长．



11．（2023秋•临邑县期末）如图，BD 为△ABC 外接圆⊙O 的直径，且∠$BAE=$∠C．

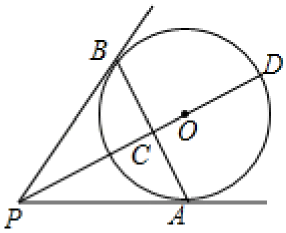
（1）求证：AE 与⊙O 相切于点 A；

（2）若 $AE\parallel BC$，$BC=2\sqrt{3}$，$AC=2$，求⊙O 的直径．



类型六 连切点

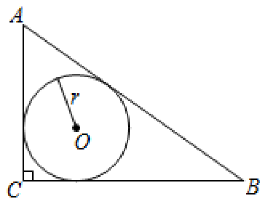
12．（2023•湘西州）如图，PA、PB 为圆 O 的切线，切点分别为 A、B，PO 交 AB 于点 C，PO 的延长线交圆 O 于点 D．下列结论不一定成立的是（　　）



A．$\triangle BPA$ 为等腰三角形　　　　B．AB 与 PD 相互垂直平分

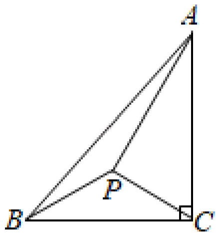
C．点 A、B 都在以 PO 为直径的圆上　　　D．PC 为$\triangle BPA$ 的边 AB 上的中线

13．（2023•青海）如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=3$，$BC=4$，则$\triangle ABC$ 的内切圆半径 $r=$____．



类型七 构造弦或圆

14．（2023•鄂州）如图，Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=2\sqrt{3}$，$BC=3$．点 P 为$\triangle ABC$ 内一点，且满足 $PA^2+PC^2=AC^2$．当 PB 的长度最小时，$\triangle ACP$ 的面积是（　　）



A．3　　　B．$3\sqrt{3}$　　　C．$\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　　D．$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

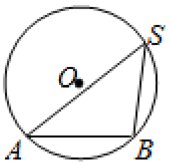
15．（2023•江宁）如图，⊙O 经过菱形 $ABCD$ 的 B，D 两点，分别交 AB，BC，CD，AD 于点 E，F，G，H．

（1）求证 $AE=AH$；

（2）连接 EF，FG，GH，EH，若 BD 是⊙O 的直径，求证：四边形 $EFGH$ 是矩形．

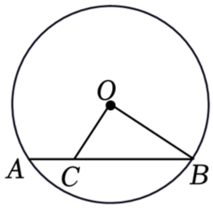
第二部分 专题提优训练

1．（2023 秋•宝应县期末）如图，点 A、B、S 在圆上，若弦 AB 的长度等于圆半径的$\sqrt{3}$倍，则$\angle ASB$ 的度数是（　　）

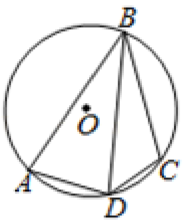


A．30°　　B．60°　　C．90°　　D．120°

2．（2023 秋•逊克县期末）如图，⊙O 的半径为 2，弦 $AB=2\sqrt{3}$，$AC=\frac{1}{4}AB$，则 OC 的长为 ____．



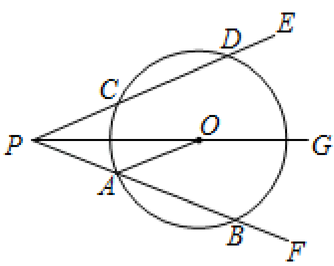
3．（2023•吉林三模）如图，四边形 $ABCD$ 内接于⊙O，连接 BD．若$\widehat{AC}=\widehat{BC}$，$\angle BDC=50°$，则$\angle ADC$ 的大小是______度．



4．（2023 秋•郧阳区期中）如图，射线 PG 平分$\angle EPF$，O 为射线 PG 上一点，以 O 为圆心，13 为半径作⊙O，分别与$\angle EPF$ 的两边相交于 A、B 和 C、D，连接 OA，且 $OA\parallel PE$．

（1）求证：$AP=AO$；

（2）若弦 $AB=24$，求 OP 的长．



5．（2023 秋•思明区校级期中）已知△ABC 内接于⊙O，$AB=AC$，点 D 是⊙O 上的点．

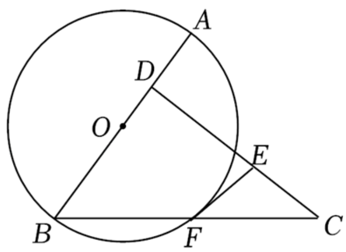
（1）如图 1，若 $\angle BAC=40^\circ$，BD 为⊙O 的直径，连接 CD，求 $\angle DBC$ 和 $\angle ACD$ 的大小；

（2）如图 2，若 $CD\parallel BA$，连接 AD，延长 OC 到 E，连接 DE，使得 $3\angle BAC-\angle E=90^\circ$，判断 DE 与⊙O 关系并证明．

6．（2023•东明县二模）如图，AB 是⊙O 的直径，点 D 在直径 AB 上（D 与 A，B 不重合），$CD\perp AB$，且 $CD=AB$，连接 CB，与⊙O 交于点 F，在 CD 上取一点 E，使 $EF=EC$．

（1）求证：EF 是⊙O 的切线；

（2）连接 AF，若 D 是 OA 的中点，$AB=8$，求 CF 的长．

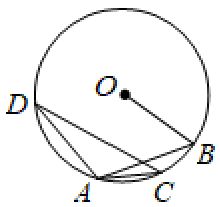


专题 15 圆中常作的辅助线（解析版）

第一部分 典例剖析

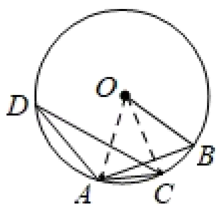
类型一 连半径

1．（2023 秋•温州期中）如图，在⊙O 中，$\angle BAC=15°$，$\angle ADC=20°$，则$\angle ABO$ 的度数为 _____.



思路引领：连接 AO，根据同弧所对圆周角与圆心角的关系求出$\angle AOB$，进而求解.

解：连接 AO，CO，



则$\angle AOC=2\angle ADC$，$\angle BOC=2\angle BAC$，

∴$\angle AOB=\angle BOC+\angle AOC=2\angle BAC+2\angle ADC=2\times15°+2\times20°=70°$，

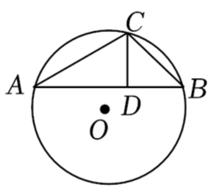
∵$OA=OB$，

∴$\angle ABO=\frac{1}{2}$（$180°-\angle AOB$）$=55°$，

故答案为：$55°$.

总结提升：本题考查圆周角定理，解题关键是通过添加辅助线求解.

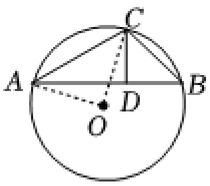
2．（2023•双柏县模拟）如图，△ABC 内接于⊙O，$\angle CAB=30°$，$\angle CBA=45°$，$CD\perp AB$ 于点 D，若⊙O 的半径为 2，则 CD 的长为（　　）



A．1　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{3}$

思路引领：连接 OA，OC，根据圆周角定理得圆心角为 $90°$，根据勾股定理求出 AC，再根据在直角三角形中，$30°$ 所对的直角边等于斜边的一半即可求出 CD.

解：如图，连接 OA，OC.



∵$\angle COA=2\angle CBA=2\times45°=90°$，

在 Rt△AOC 中，根据勾股定理得：

$AC=\sqrt{OA^2+OC^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

∵$CD\perp AB$，$\angle CAB=30°$，

∴$CD=\frac{1}{2}AC=\sqrt{2}$.

故选：C.

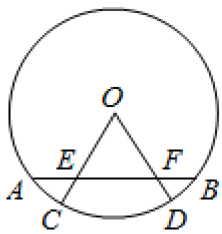
总结提升：本题考查了圆周角定理，勾股定理，含 30°角的直角三角形，其中构造圆心角，利用圆周角定理是解题的关键.

三、作弦心距

3．（2023 秋•雁塔区校级期中）如图，AB 为⊙O 的弦，半径 OC，OD 分别交 AB 于点 E，F．且$\widehat{AC}=\widehat{DB}$.

（1）求证：$AE=BF$；

（2）作半径 $ON\perp AB$ 于点 M，若 $AB=12$，$MN=3$，求 OM 的长.



思路引领：（1）连接 OA、OB，证明△AOE≌△BOF（ASA），即可得出结论；

（2）连接 OA，由垂径定理得出 $AM=\frac{1}{2}AB=6$，设 $OM=x$，则 $OA=ON=x+3$，在 Rt△AOM 中，由勾股定理得出方程，解方程即可.

（1）证明：连接 OA、OB，如图 1 所示：

∵$OA=OB$，

∴$\angle A=\angle B$，

∵$\widehat{AC}=\widehat{BD}$，

∴$\angle AOE=\angle BOF$，

在△AOE 和△OBF 中，

$\begin{cases}\angle A=\angle B\\OA=OB\\\angle AOE=\angle BOF\end{cases}$，

∴△AOE≌△BOF（ASA），

∴$AE=BF$.

（2）解：连接 OA，如图 2 所示：

∵$OM\perp AB$，

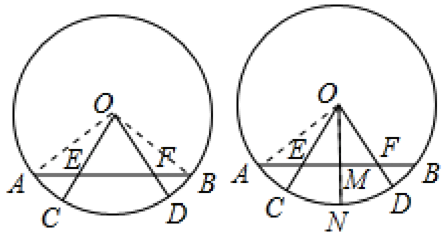
∴$AM=\frac{1}{2}AB=6$，

设 $OM=x$，则 $OA=ON=x+3$，

在 Rt△AOM 中，由勾股定理得：$6^2+x^2=(x+3)^2$，

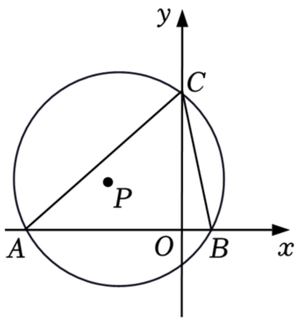
解得：$x=4.5$，

∴$OM=4.5$.



总结提升：本题考查垂径定理，勾股定理，全等三角形的判定和性质等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题，属于中考常考题型.

4.（2023 秋•慈溪市期中）如图，⊙P 与 x 轴交于点 A（﹣5，0），B（1，0），与 y 轴的正半轴交于点 C．若∠ACB＝60°，则点 C 的纵坐标为 _____.



思路引领：过 P 点作 $PH\perp AB$ 于 H 点，$PD\perp OC$ 于 D 点，连接 PA、PB、PC，如图，根据垂径定理得到 $AH=BH=3$，则 $OH=2$，再根据圆周角定理得到∠APB＝2∠ACB＝120°，所以∠APH＝60°，则利用含 30 度角的直角三角形三边的关系计算出 $PH=\sqrt{3}$，$PA=2\sqrt{3}$，接着利用四边形 $PHOD$ 为矩形得到 $OD=\sqrt{3}$，$PD=2$，然后利用勾股定理计算出 CD，从而得到 OC 的长.

解：过 P 点作 $PH\perp AB$ 于 H 点，$PD\perp OC$ 于 D 点，连接 PA、PB、PC，如图，

∵A（﹣5，0），B（1，0），

∴$OA=5$，$OB=1$，

∵$PH\perp AB$，

$\therefore AH=BH=\frac{1}{2}AB=3$，

$\therefore OH=2$，

$\because \angle APB=2\angle ACB=2\times 60^\circ=120^\circ$，

$\therefore \angle APH=60^\circ$，

在 Rt△PAH 中，$\because PH=\frac{\sqrt{3}}{3}AH=\sqrt{3}$，

$\therefore PA=2PH=2\sqrt{3}$，

$\because \angle PHO=\angle PDO=\angle HOD=90^\circ$，

∴四边形 $PHOD$ 为矩形，

$\therefore OD=PH=\sqrt{3}$，$PD=OH=2$，

在 Rt△PCD 中，$\because PC=PA=2\sqrt{3}$，$PD=2$，

$\therefore CD=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-2^2}=2\sqrt{2}$，

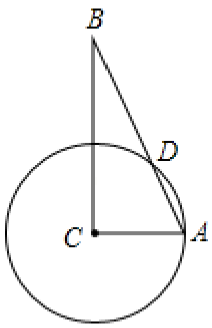
$\therefore OC=OD+CD=\sqrt{3}+2\sqrt{2}$，

∴点 C 的纵坐标为$\sqrt{3}+2\sqrt{2}$.

故答案为：$\sqrt{3}+2\sqrt{2}$.

总结提升：本题考查了垂径定理：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧．也考查了圆周角定理．

5．（2023 秋•肇源县期末）已知：如图，在△ABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle B=25^\circ$，以点 C 为圆心、AC 为半径作⊙C，交 AB 于点 D，求$\widehat{AD}$的度数．



思路引领：因为弧与垂径定理有关；与圆心角、圆周角有关；与弦、弦心距有关；弧与弧之间还存在着和、差、倍、半的关系，因此这道题有很多解法，仅选几种供参考．

解：解法一：（用垂径定理求）

如图，过点 C 作 $CE\perp AB$ 于点 E，交$\widehat{AD}$于点 F，

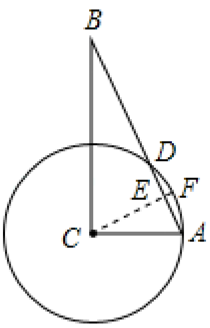
$\therefore \widehat{DF}=\widehat{AF}$，

又$\because \angle ACB=90^\circ$，$\angle B=25^\circ$，

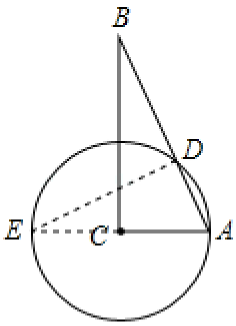
$\therefore \angle FCA=25^\circ$，

∴$\overset{\frown}{AF}$的度数为 25°，

∴$\overset{\frown}{AD}$的度数为 50°；



解法二：（用圆周角求）如图，延长 AC 交⊙C 于点 E，连接 ED，



∵AE 是直径，

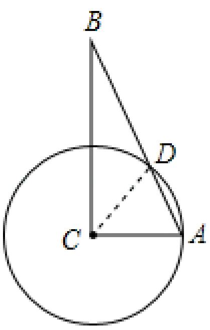
∴$\angle ADE=90°$，

∵$\angle ACB=90°$，$\angle B=25°$，

∴$\angle E=\angle B=25°$，

∴$\overset{\frown}{AD}$的度数为 50°；

解法三：（用圆心角求）如图，连接 CD，



∵$\angle ACB=90°$，$\angle B=25°$，∴$\angle A=65°$，

∵$CA=CD$，∴$\angle ADC=\angle A=65°$，

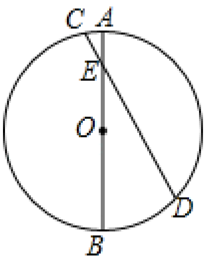
∴$\angle ACD=50°$，

∴$\overset{\frown}{AD}$的度数为 50°．

总结提升：

本题可以利用：1、垂径定理：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分这条弦所对的两段弧．2、圆周角定理：在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于这条弧所对的圆心角的一半．

6．（2023•浦东新区模拟）如图，已知 AB 是圆 O 的直径，弦 CD 交 AB 于点 E，$\angle CEA=30°$，$OE=4$，$DE=5\sqrt{3}$，求弦 CD 及圆 O 的半径长．

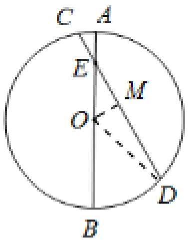


思路引领：过点 O 作 $OM\perp CD$ 于点 M，联结 OD，根据垂径定理解答即可．

解：过点 O 作 $OM\perp CD$ 于点 M，联结 OD，

$\because \angle CEA=30°$，$\therefore \angle OEM=\angle CEA=30°$，

在 $Rt\triangle OEM$ 中，$\because OE=4$，



$\therefore OM=\frac{1}{2}OE=2$，$EM=OE\cdot cos30°=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，

$\because DE=5\sqrt{3}$，

$\therefore DM=DE-EM=3\sqrt{3}$，

$\because OM$ 过圆心，$OM\perp CD$，

$\therefore CD=2DM$，

$\therefore CD=6\sqrt{3}$，

$\because OM=2$，$DM=3\sqrt{3}$，

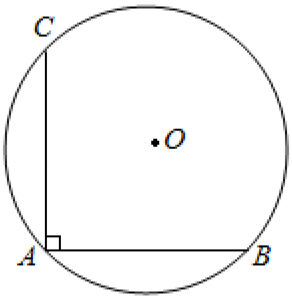
$\therefore$ 在 $Rt\triangle DOM$ 中，$OD=\sqrt{OM^2+DM^2}=\sqrt{2^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{31}$，

$\therefore$ 弦 CD 的长为 $6\sqrt{3}$，$\odot O$ 的半径长为 $\sqrt{31}$．

总结提升：此题考查了垂径定理和直角三角形．有关弦、半径、弦心距的问题常常利用它们构造的直角三角形来研究，所以连半径、作弦心距是圆中的一种常见辅助线添法．

类型三 圆周角为直角，连接直径

7．如图，AB，AC 是$\odot O$ 的两条弦，且 $\angle CAB=90°$，若 $AB=10$，$AC=8$，求$\odot O$ 的半径．



思路引领：连接 BC，由圆周角定理得 BC 是⊙O 的直径，由勾股定理求出 $BC=2\sqrt{41}$，则 $OB=\sqrt{41}$.

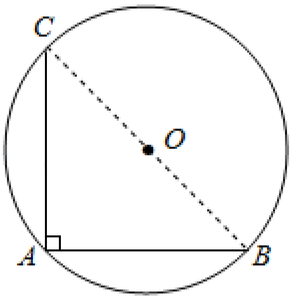
解：连接 BC，如图所示：

∵$\angle CAB=90^\circ$，

∴BC 是⊙O 的直径，$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{10^2+8^2}=2\sqrt{41}$，

∴$OB=\sqrt{41}$，

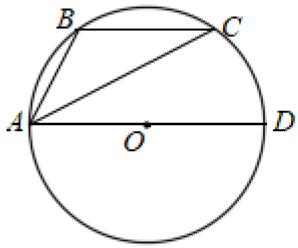
即⊙O 的半径为$\sqrt{41}$.



总结提升：本题考查了圆周角定理和勾股定理；熟练掌握圆周角定理和勾股定理是解题的关键.

类型四 有直径，做直径所对的圆周角

8.（2023•济宁一模）如图，△ABC 是⊙O 的内接三角形，$AB=BC$，$\angle BAC=30^\circ$，AD 是直径，$AD=8$，则 AC 的长为____.



思路引领：连接 CD，根据等腰三角形的性质得到$\angle ACB=\angle BAC=30^\circ$，根据圆内接四边形的性质得到$\angle D=180^\circ-\angle B=60^\circ$，求得$\angle CAD=30^\circ$，根据直角三角形的性质即可得到结论.

解：连接 CD，

∵$AB=BC$，$\angle BAC=30^\circ$，