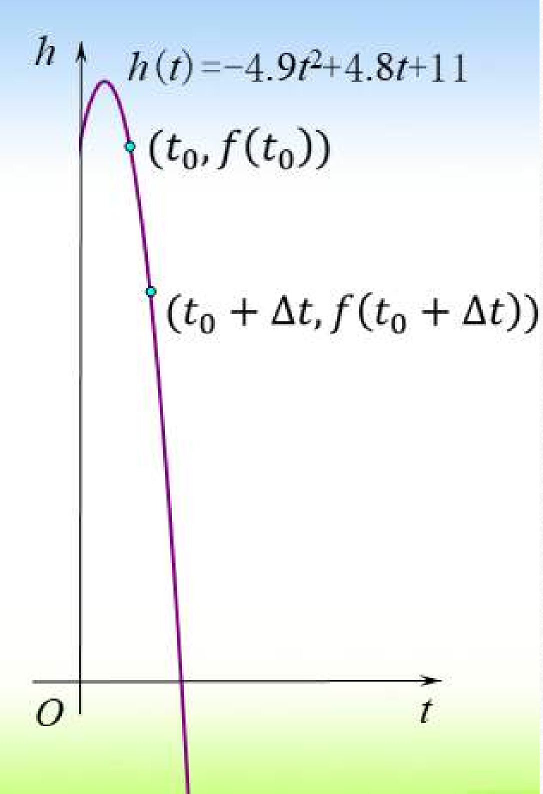
第五章　§5.1.2　导数的概念及其几何意义

复习引入

前面我们研究了两类变化率：

1.物理学：平均速度和瞬时速度

设高台跳水运动员起跳高度h与时间t的函数为 $s=h(t)$，



则t_0到t的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{h(t_0+\Delta t)-h(t_0)}{\Delta t},$$

而在t_0时刻的瞬时速度为

$$\boldsymbol{v(t_0)}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(t_0+\Delta t)-h(t_0)}{\Delta t}.$$

2.几何学：割线斜率和切线斜率

设抛物线解析式为$y=f(x)$，

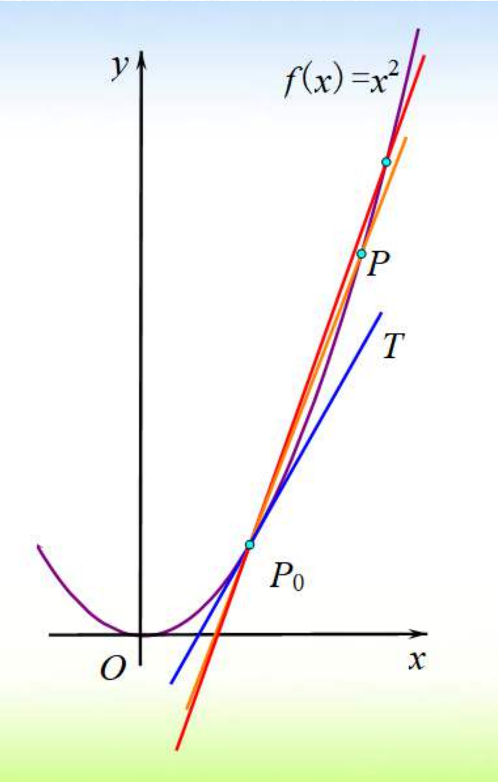
$P_0(x_0,\ f(x_0))$，$P(x_0+\Delta x,\ f(x_0+\Delta x))$，

则割线P_0P的斜率为

$$k=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

而在 $P_0(x_0,\ f(x_0))$处切线的斜率为

$$\boldsymbol{k}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$



复习引入

★ 解决这两类问题思想方法具有一致性吗？

物理学

无限逼近（极限）

★ 答案表示形式具有一致性吗？

平均变化率的极限

瞬时变化率

几何学

共同点：都采用了由“平均变化率”无限逼近“瞬时变化率”的思想方法。

今天我们继续研究更一般的问题.

知识建构

1.平均变化率

对于函数$y=f(x)$，设自变量x从x_0变化到$x_0+\Delta x$，相应地，函数值y就从$f(x_0)$变化到$f(x_0+\Delta x)$．这时，x的变化量为Δx，y的变化量为Δy $=$ <u>$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$</u>,我们把比值$\frac{\Delta y}{\Delta x}$，即$\frac{\Delta y}{\Delta x}=$ <u>$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$</u>叫做函数$y=f(x)$从$x_0$到$x_0+\Delta x$的**平均变化率**.

知识建构

2.导数

如果当 $\Delta x \to 0$ 时，平均变化率$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$无限趋近于一个确定的值，即$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$有极限，则称 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处<u>可导</u>，并把这个确定的值叫做 $y=f(x)$在<u>$x=x_0$</u>处的<u>导数</u>(也称为瞬时变化率)，记作<u>$f'(x_0)$</u>或<u>$y'|_{x=x_0}$</u>，即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=$<u>$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$</u>.

知识建构

例：问题1中运动员在t=1时的瞬时速度为$v(1)$就是函数$h(t)$在t=1处的导数$h'(1)$，

$$v(1)=h'(1)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(1+\Delta t)-h(1)}{\Delta t}=-5.$$

问题2中抛物线$f(x)=x^2$在点$P_0(1, 1)$处的切线P_0T的斜率k_0就是函数$f(x)=x^2$在$x=1$处的导数$f'(1)$，即

$$k_0=f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=2.$$

知识建构

3.导数的几何意义

容易发现，平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$表示的是割线 P_0P 的斜率，

当 P 点沿着曲线无限趋近于 P_0 点时，割线 P_0P 无限趋近于一个确定的位置，

这个确定的位置的直线 P_0T 称为曲线 $y=f(x)$在点 P_0 处的切线，

因此函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$就是切线 P_0T 的斜率 k_0，

即 $k_0=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$，这就是导数的几何意义.

注意点：

(1)曲线在点$(x_0, f(x_0))$处切线的斜率即函数$y=f(x)$在$x=x_0$处的导数；

(2)瞬时变化率、曲线在该点切线的斜率、函数在该点的导数，三者等价.

知识建构

注：1.当$\Delta x \neq 0$时，比值的极限存在，则$f(x)$在$x=x_0$处可导；

若$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的极限不存在，则$f(x)$在$x=x_0$处不可导或无导数.

2. $f'(x_0)$与x_0的值有关，不同的x_0其导数值一般也不相同；

学有所用

用导数定义求函数在某一点处的导数

例1 求函数$y=\dfrac{1}{x}$在$x=1$处的导数$f'(1)$.

解：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$$=\frac{\dfrac{1}{1+\Delta x}-1}{\Delta x}$$

$$=-\frac{1}{1+\Delta x}.$$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{1}{1+\Delta x}\right)=-1.$$

从而 $f'(1)=-1$.

小结：

求 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处导数的一般步骤：

1、求平均变化率，先写出

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，并化简；

2、求极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，

则 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

学有所用

练习：求曲线$y=-2x^2+1$在点(1,-1)处的切线方程.

解：$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\frac{[-2(1+\Delta x)^2+1]-(-1)}{\Delta x}$

$$=\frac{-4\Delta x-2(\Delta x)^2}{\Delta x}=-4-2\Delta x$$

$$\therefore k=f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(-4-2\Delta x)=-4$$

$\therefore$ 曲线$y=-2x^2+1$在点$(1,-1)$处的切线方程为

$y+1=-4(x-1)$ 即：$4x+y-3=0$

解惑提高

(1)如何求曲线$f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线方程?

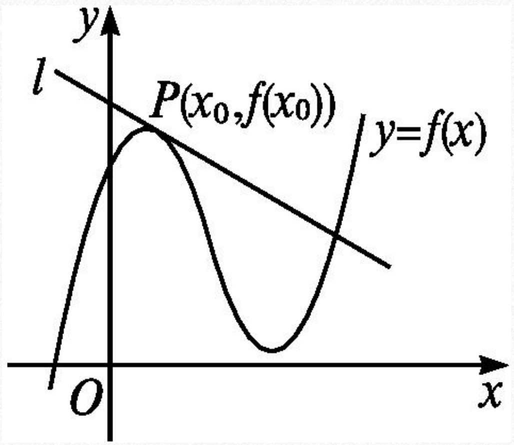
提示: 根据导数的几何意义,求出函数$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的导数,即曲线在该点处的切线的斜率,再由直线方程的点斜式求出切线方程.

(2)曲线$f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线与曲线过点(x_0,y_0)的切线有什么不同?

提示: 曲线$f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线,点$(x_0,f(x_0))$一定是切点,只要求出$k=f'(x_0)$,利用点斜式写出切线方程即可;而曲线$f(x)$过某点(x_0,y_0)的切线,给出的点(x_0,y_0)不一定在曲线上,即使在曲线上也不一定是切点.

(3)曲线在某点处的切线是否与曲线只有一个交点?

提示: 不一定.曲线$y=f(x)$在点$P(x_0,f(x_0))$处的切线l与曲线$y=f(x)$的交点个数不一定只有一个,如图所示.



练习 已知抛物线$y=x^2+x+1$,则过原点的切线方程为______.

思考:过原点的切线，原点一定是切点吗？ **不一定**

解析： 设切点坐标为$(x_0，y_0)$，则

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2+(x_0+\Delta x)+1-(x_0^2+x_0+1)}{\Delta x}$$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x_0+1+\Delta x)=2x_0+1$，则斜率 $k=2x_0+1$，

故所求的切线方程为 $y-y_0=(2x_0+1)(x-x_0)$，

将(0,0)及 $y_0=x_0^2+x_0+1$ 代入上式得：$-(x_0^2+x_0+1)=-x_0(2x_0+1)$，

解得 $x_0=1$ 或 $x_0=-1$，

所以 $k=3$ 或 $k=-1$，

所以切线方程为 $y=3x$ 或 $y=-x$，

即 $3x-y=0$ 或 $x+y=0$.

答案： $3x-y=0$ 或 $x+y=0$

小结：过曲线外的点$P(x_1, y_1)$求曲线的切线方程的步骤

↓

求出$y=f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0)$．

↓

利用Q在曲线上和$f'(x_0)=k_{PQ}$，解出x_0，y_0及$f'(x_0)$．

↓

点斜式切线方程为$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$，化为一般式.

练习：若函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处可导，则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$等于(B　)

A．$f'(x_0)$　　B．$2f'(x_0)$　　C．$-2f'(x_0)$　　D．0