《电磁学》

高斯定理的应用

王伟良

应用高斯定理求电场分布

电荷是电场的源，电荷分布决定着电场的分布.

当电荷分布存在某种对称性(symmetry)，使我们由此可以判断出存在这样的高斯面（gaussian surface）———每个高斯面上所有点的场强E 都相等，而且E 的方向与高斯面法向的夹角处处一致，那么高斯定理

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

中左方的积分将会变得很简单,这比由库仑定律得到的矢量积分式

$$\vec{E}(\vec{x}) = \int \mathrm{d}\vec{E}(\vec{x}) = \int_V \frac{\rho(\vec{x}')\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathrm{d}V'$$

求电场就要方便得多.

下面讨论三种重要的对称性

球对称性

轴对称性+沿轴平移对称性

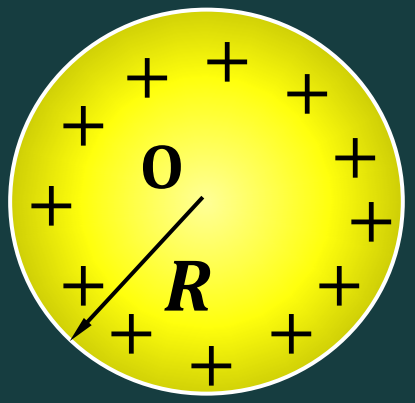
二维平移对称性的情形。

均匀带电球壳的电场强度

一半径为R，均匀带电Q的薄球壳．求球壳内外任意点的电场强度.

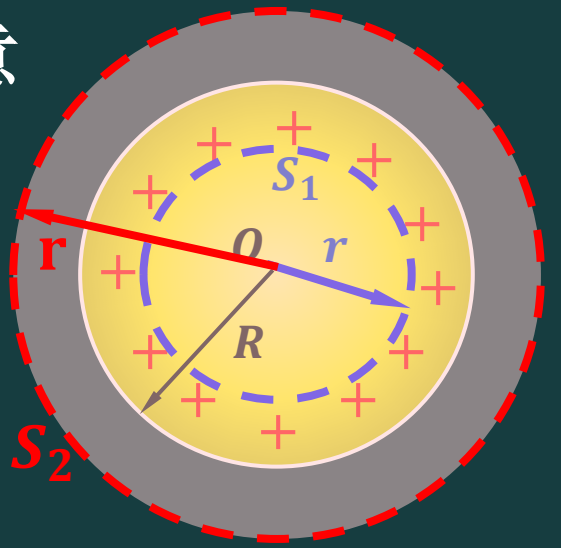
解（1）$0 < r < R$

（2）$r > R$



均匀带电球壳的电场强度

一半径为R，均匀带电Q的薄球壳．求球壳内外任意点的电场强 度.



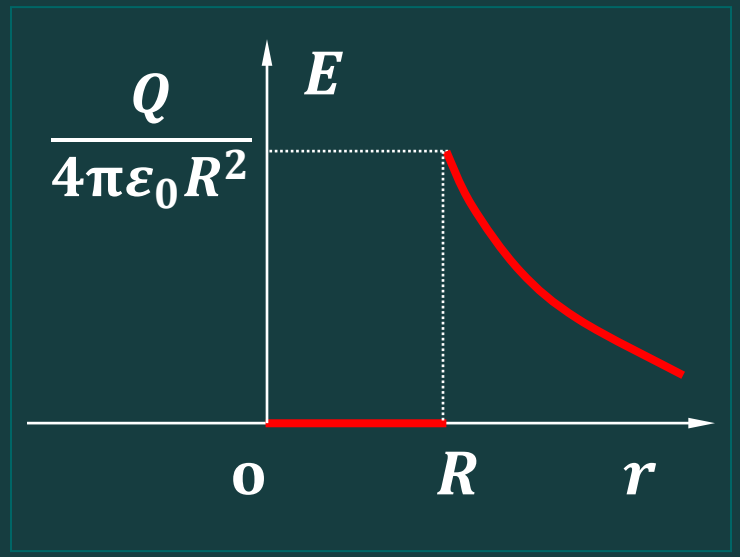
解 （1） $0 < r < R$

$$\oint_{S_1} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \qquad \vec{E} = 0$$

（2） $r > R$

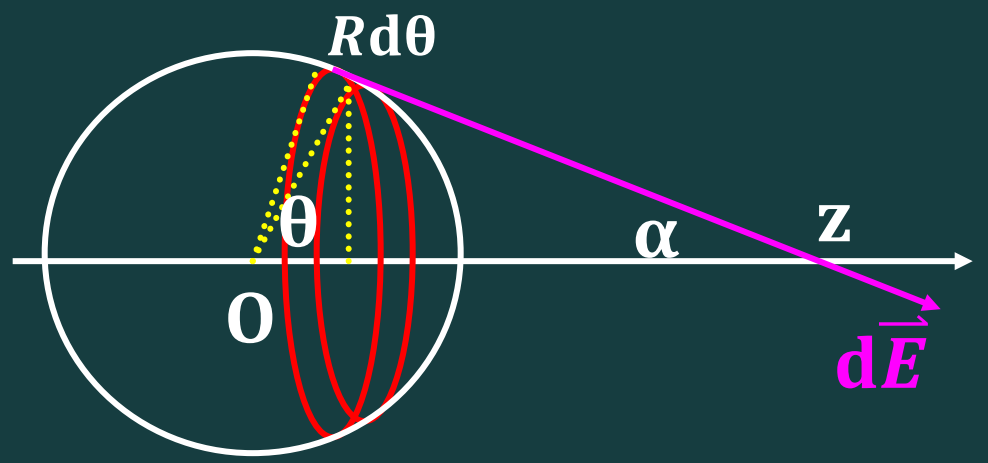
$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$



球外电场相当于全部电荷Q集中于球心O的点电荷所产生

均匀带电球壳的电场强度（积分法）



环面积

$2\pi R\sin\theta\, R\mathrm{d}\theta$

环上电荷

$2\pi R^2\sigma\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$

$$\mathrm{d}E_z=\mathrm{d}E\cos\alpha$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi R^2\sigma\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{[(R\sin\theta)^2+(z-R\cos\theta)^2]}\frac{z-R\cos\theta}{\sqrt{(R\sin\theta)^2+(z-R\cos\theta)^2}}$$

$$E_z=\frac{2\pi R^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{(z-R\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{[(R\sin\theta)^2+(z-R\cos\theta)^2]^{3/2}}$$

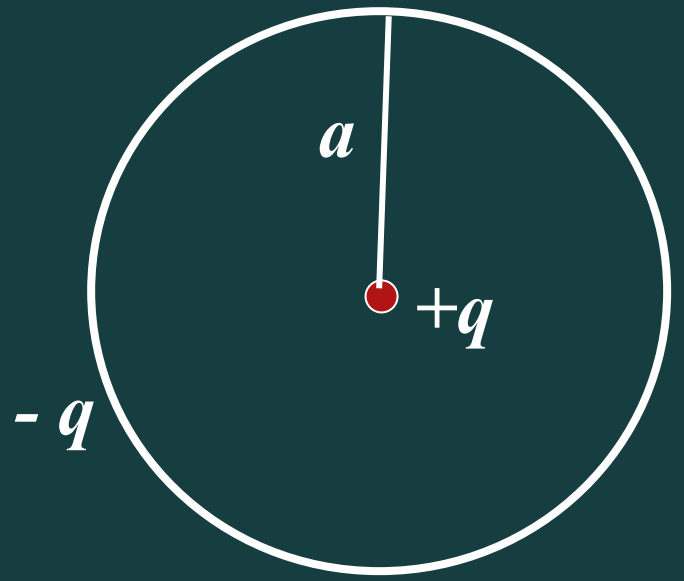
$$=\frac{Q/2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-1}^{1}\frac{(z-R\cos\theta)\mathrm{d}\cos\theta}{[(R\sin\theta)^2+(z-R\cos\theta)^2]^{3/2}}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$$ 或0

问题：某一球面内部（或任意闭合曲面内部）包含的净电荷为零，其内部电场是否必定为零？

已知一高斯面上场强处处为零，在它所包围的空间内任一点都没有电荷吗？

问题：

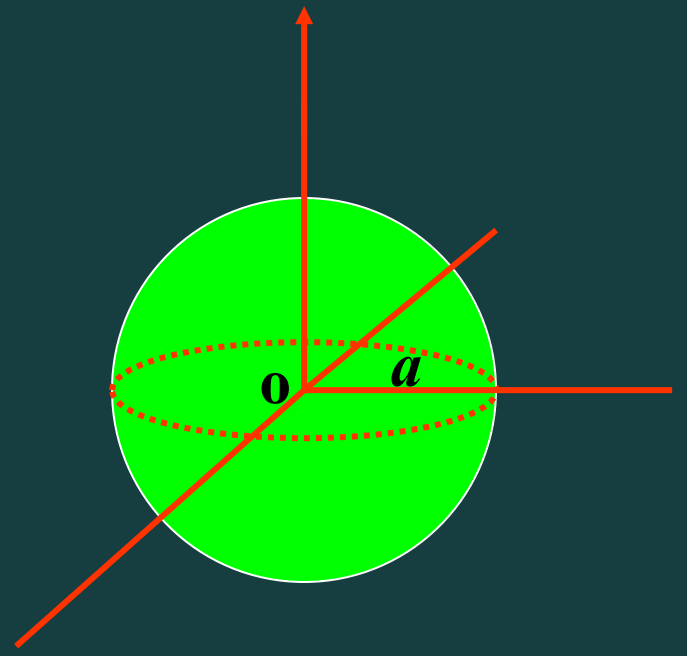
球心有一点电荷+q，半径为a的球壳均匀地分布着电荷-q，球壳内、外两区域的电场分布如何？



[例1-6]半径为 a 的球体均匀带电荷 q，求电场分布

[解] 电荷密度函数

$$\rho = \begin{cases} 3q/4\pi a^3 = \text{constant} & (r \le a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}$$



[例1-6]半径为 a 的球体均匀带电荷 q，求电场分布 (教材p26)

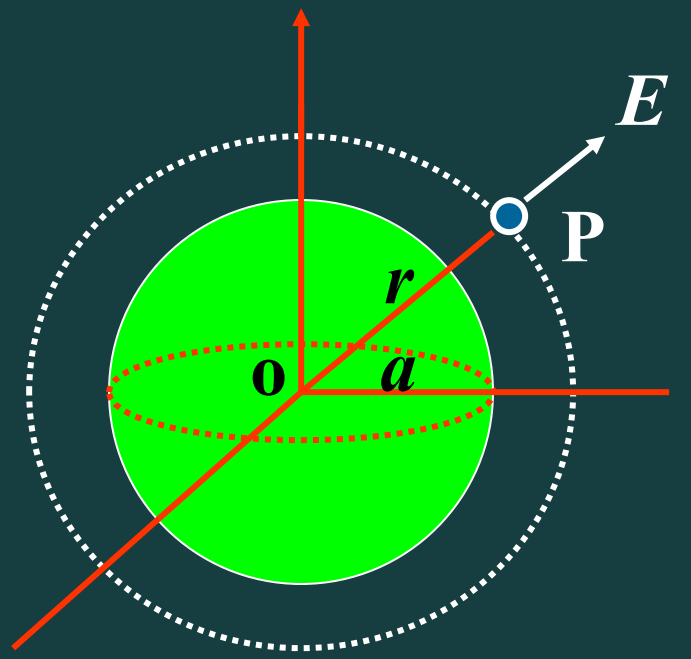
[解] 电荷密度函数

$$3q/4\pi a^3 = \text{constant} \quad (r \le a)$$

$$\rho = \begin{cases} 3q/4\pi a^3 = \text{constant} & (r \le a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}$$

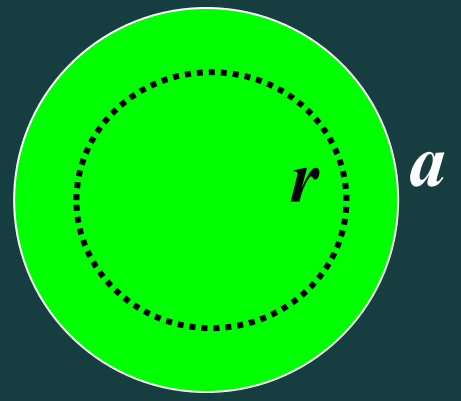
有球对称性.如上例一样,球外任意半径 r 的球面包含的电量均为q，故由高斯定理我们同样得到球外任一点P的场强

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$



由高斯定理

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o}\int_V \rho \mathrm{d}V$$



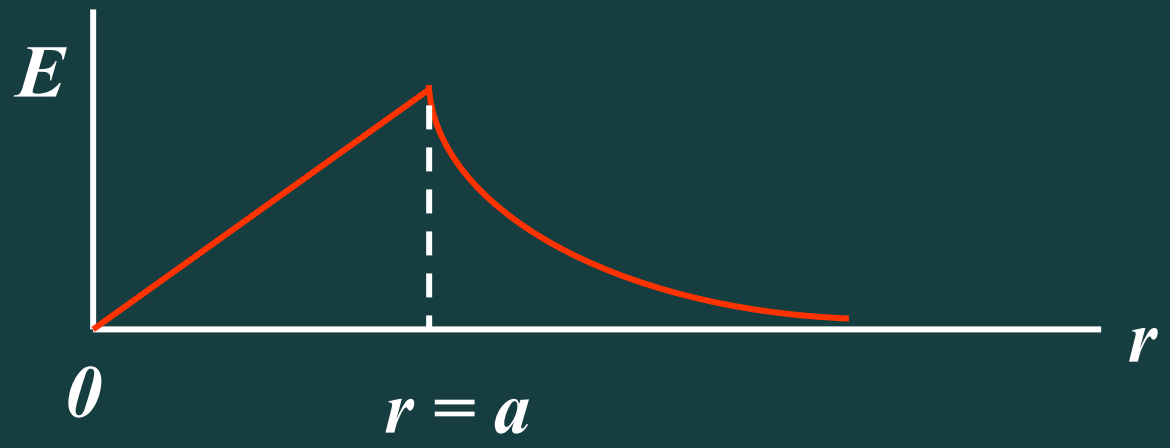
得

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4\pi r^3}{3}$$

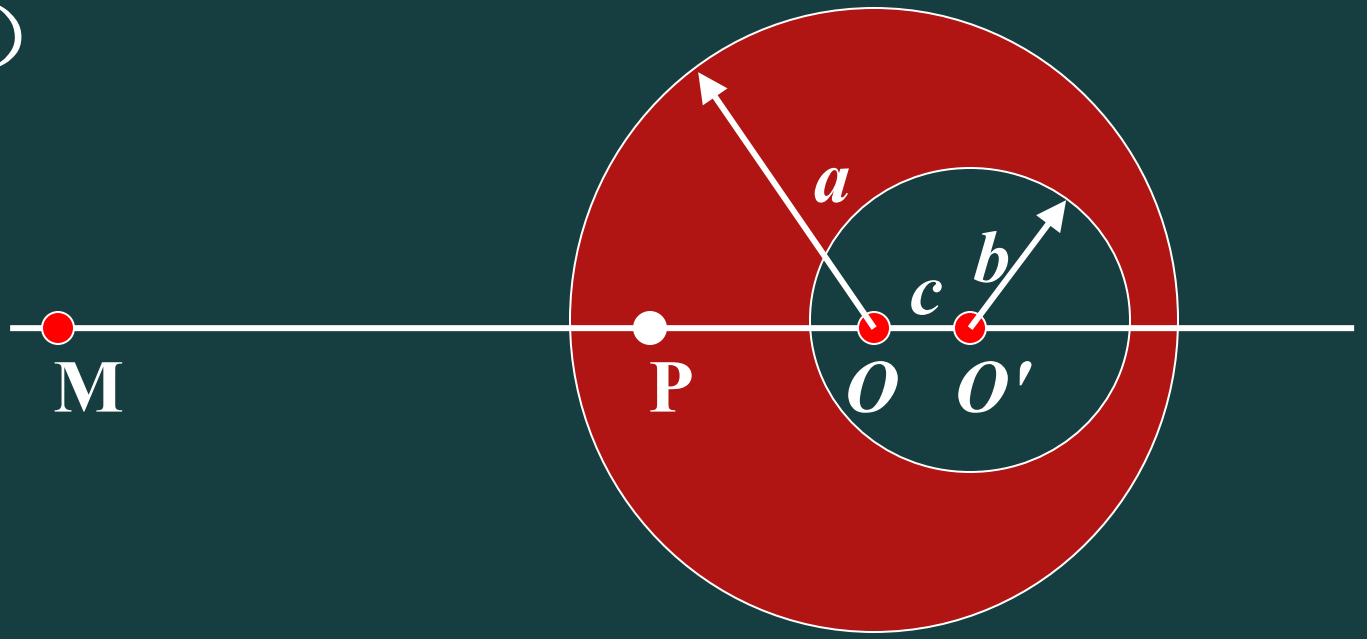
即 $\vec{E} = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r = \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\vec{e}_r$ （当$r \le a$）

球内场强按r呈线性分布。

电场分布函数 $E(r)$的曲线为

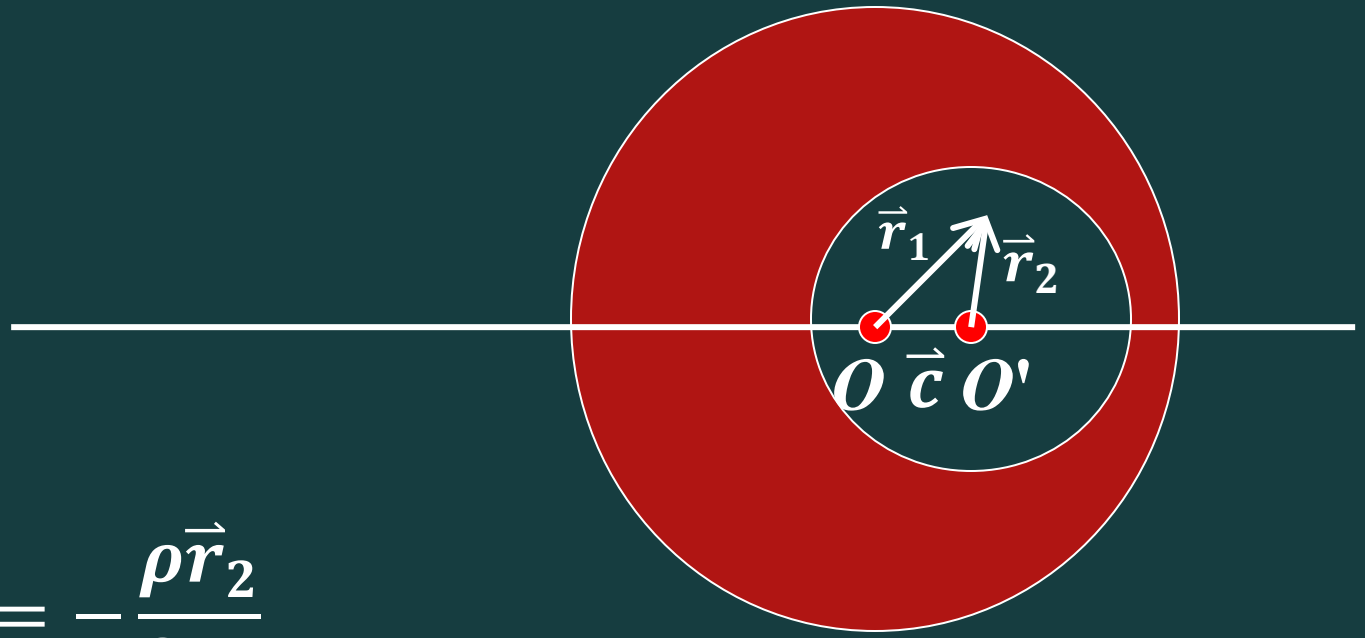


- 在球心为O，半径为a、电荷体密度为ρ的均匀带电球体内偏心挖去一个半径为b的小球（球心为O'）。
  - （1）试证空心小球内存在均匀电场并写出场强表达式（以c代表从O到O'的距离）；
  - （2）求O、O'连线延长线上M点和P点的场强。（以r_M、r_P分别代表M、P与O的距离。）



提示：此带电体可视为电荷体密度为ρ的球O与电荷体密度为$-\rho$的球O'的叠加。

- 在球心为O，半径为a、电荷体密度为ρ的均匀带电球体内偏心挖去一个半径为b的小球（球心为O'）。
  - （1）试证空心小球内存在均匀电场并写出场强表达式（以c代表从O到O'的距离）；



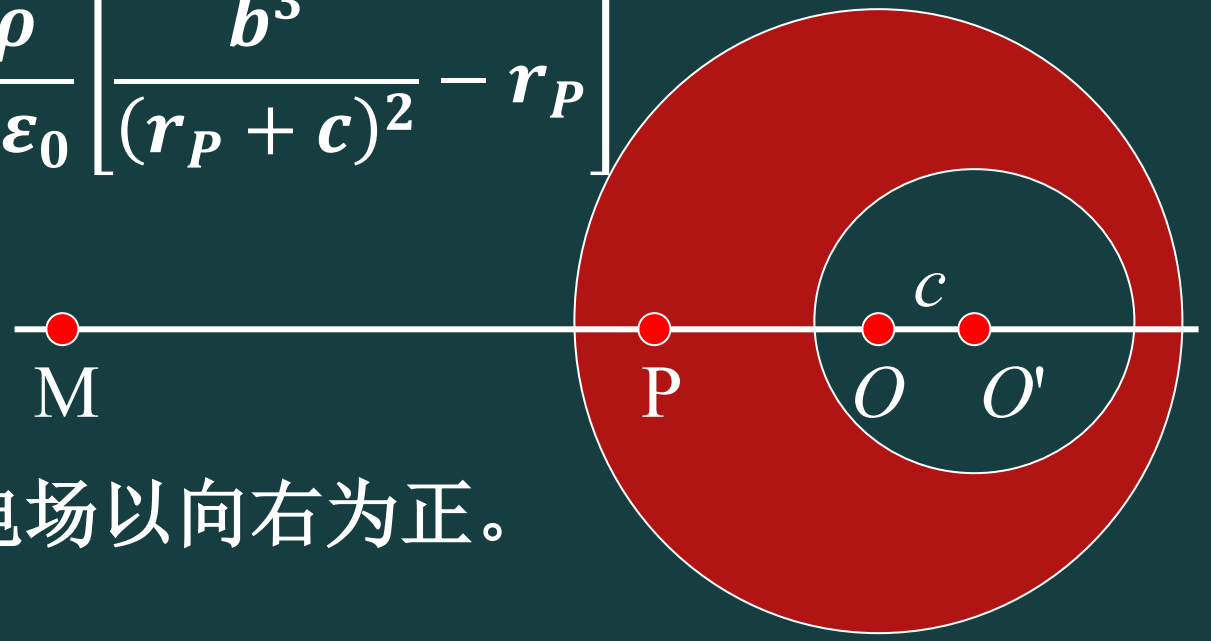
$$\vec{E}_\rho = \frac{\rho\vec{r}_1}{3\varepsilon_0}, \vec{E}_{-\rho} = -\frac{\rho\vec{r}_2}{3\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_\rho + \vec{E}_{-\rho} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{c}$$

- 在球心为O，半径为a、电荷体密度为ρ的均匀带电球体内偏心挖去一个半径为b的小球（球心为O'）。
  - （2）求O、O'连线延长线上M点和P点的场强。（以r_M、r_P分别代表M、P与O的距离。）

$$E_M = -\frac{\rho\frac{4}{3}\pi a^3}{4\pi\varepsilon_0 r_M^2} + \frac{\rho\frac{4}{3}\pi b^3}{4\pi\varepsilon_0 (r_M + c)^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{b^3}{(r_M + c)^2} - \frac{a^3}{r_M^2}\right]$$

$$E_P = -\frac{\rho\frac{4}{3}\pi r_P^3}{4\pi\varepsilon_0 r_P^2} + \frac{\rho\frac{4}{3}\pi b^3}{4\pi\varepsilon_0 (r_P + c)^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{b^3}{(r_P + c)^2} - r_P\right]$$



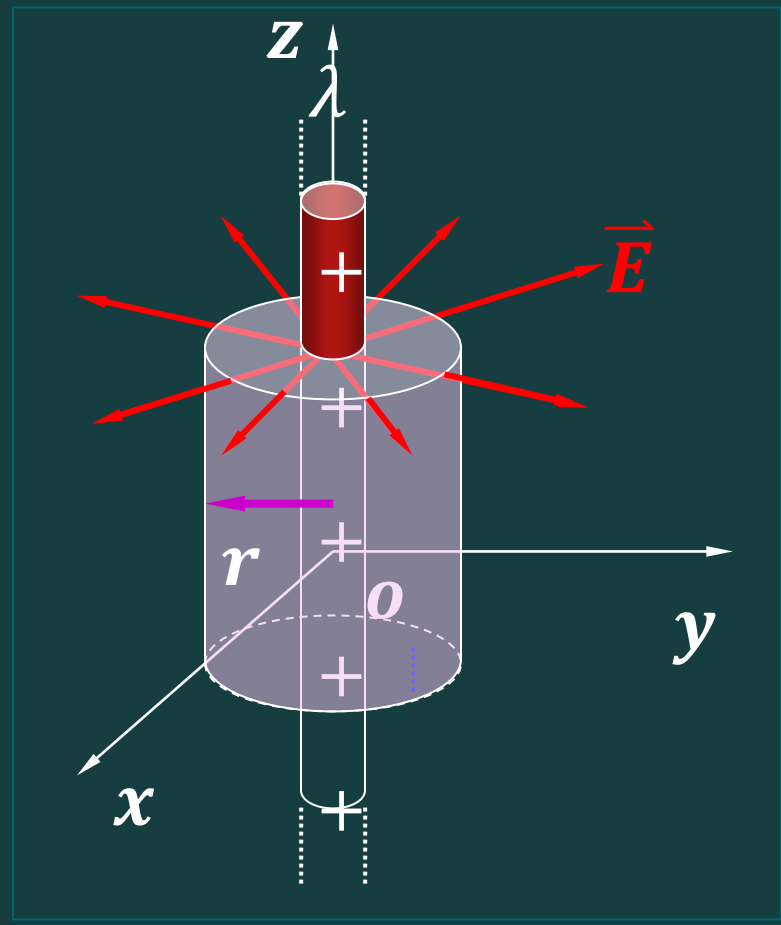
电场以向右为正。

- 下图所示，半径为R的均匀带电球内挖去半径为r的小球，能否用高斯定理求各点的场强？



无限长均匀带电直线的电场强度

无限长均匀带电直线，单位长度上的电荷，即电荷线密度为λ，求距直线为r处的电场强度.



解：轴对称+沿Z轴平移对称

选取闭合的柱形高斯面

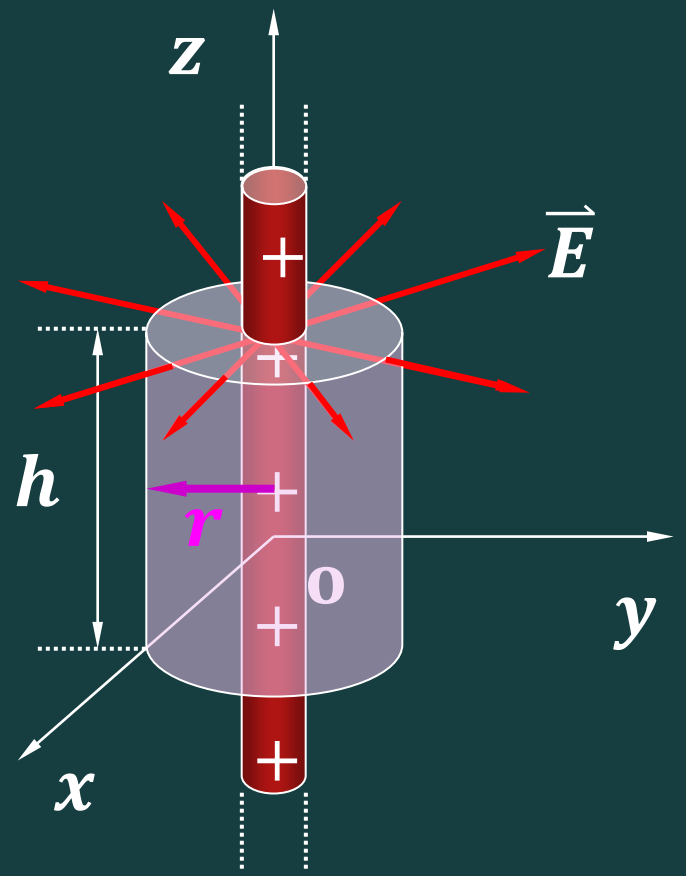
$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} =$$

$$\int_{\text{柱面}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{\text{上底}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{\text{下底}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{\text{柱面}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{\text{柱面}} E\,dS = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$2\pi r h E = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/478077026054006050