湖南省衡阳市2024届高三下学期高考适应性练习卷（三）数学试题

（答案在最后）

命题人：

（考试时间：120分钟　　试卷满分：150分）

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x\in\mathbf{R}|-5<x<5\},B=\left\{x\in\mathbf{Z}\left|\frac{x-1}{x-4}\le 0\right.\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{x|1\le x\le 4\}$　　B. $\{x|1\le x<4\}$　　C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$

【答案】C

【解析】

【分析】化简集合 B，进行交集运算.

【详解】$A=\{x\in\mathbf{R}|-5<x<5\}=(-5,5),B=\left\{x\in\mathbf{Z}\left|\frac{x-1}{x-4}\le 0\right.\right\}=\{x\in\mathbf{Z}|(x-1)(x-4)\le 0$ 且

$x-4\neq 0\}=\{1,2,3\}$.

故 $A\cap B=\{1,2,3\}$.

故选：C.

2. 设 $a\in\mathrm{R},z=\frac{2+a\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$，则“$a>1$”是“$|z|>\sqrt{5}$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】根据复数模的计算公式及充分条件、必要条件的定义判断即可

【详解】由题意得 $z=\frac{2\mathrm{i}-a}{\mathrm{i}^2}=a-2\mathrm{i}$，所以 $|z|=\sqrt{a^2+(-2)^2}=\sqrt{a^2+4}$，

因为 $|z|>\sqrt{5}$，所以 $a^2+4>5$，解得 $a>1$ 或 $a<-1$，

故“$a>1$”是“$|z|>\sqrt{5}$”的充分不必要条件.

故选：A

3. 已知 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 为两个不共线的单位向量，则（　　）

A. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)//\vec{a}$

B. $\vec{a}\perp\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$

C. 若$\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{\pi}{3}$，则$\left\langle\vec{a}-\vec{b},\vec{b}\right\rangle=\frac{\pi}{3}$

D. 若$\left\langle\vec{a}+\vec{b},\vec{a}\right\rangle=\frac{\pi}{4}$，则$\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{\pi}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据向量共线和向量数量积的定义，向量垂直，向量的模以及向量夹角公式判断即可.

【详解】选项 A：若$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)//\vec{a}$，则$\vec{a}=\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$，即$(1-\lambda)\vec{a}=\lambda\vec{b}$，

与$\vec{a}$与$\vec{b}$为两个不共线的单位向量矛盾，故选项 A 说法错误；

选项 B：设$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ，则$0<\theta<\pi$，$\cos\theta<1$，

所以$\vec{a}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\left(\vec{a}\right)^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta=1-\cos\theta\neq0$，故选项 B 说法错误；

选项 C：若$\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{\pi}{3}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，

所以$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}-\left(\vec{b}\right)^2=-\frac{1}{2}$，$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=1$，即$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=1$，

所以$\cos\left\langle\vec{a}-\vec{b},\vec{b}\right\rangle=\frac{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\left|\vec{b}\right|}=-\frac{1}{2}$，

又$0\leq\left\langle\vec{a}-\vec{b},\vec{b}\right\rangle\leq\pi$，所以$\left\langle\vec{a}-\vec{b},\vec{b}\right\rangle=\frac{2\pi}{3}$，故选项 C 说法错误；

选项 D：因为$\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\left(\vec{a}\right)^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=1+\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}\right)^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left(\vec{b}\right)^2=2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$，

所以$\cos\left\langle\vec{a}+\vec{b},\vec{a}\right\rangle=\frac{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{a}}{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\left|\vec{a}\right|}=\frac{1+\vec{a}\cdot\vec{b}}{\sqrt{2+2\vec{a}\cdot\vec{b}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，化简得$1+\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{1+\vec{a}\cdot\vec{b}}$，

设$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ，则$0<\theta<\pi$，$\cos\theta\neq-1$，所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta\neq-1$，

所以$\sqrt{1+\vec{a}\cdot\vec{b}}=1$，即$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，所以$\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{\pi}{2}$，故选项 D 说法正确；

故选：D

4. 已知直线$x+2y+2=0$与抛物线C：$y^2=ax$的图象相切，则C的焦点坐标为（　　）

A. $\left(-\frac{1}{2},0\right)$　　B. $(-1,0)$　　C. $\left(\frac{1}{2},0\right)$　　D. $(1,0)$

【答案】C

【解析】

【分析】联立直线与抛物线方程，利用相切有$\Delta=0$求得a，从而得解.

【详解】依题意，联立$\begin{cases}x+2y+2=0\\y^2=ax\end{cases}$，消去$x$，得$y^2+2ay+2a=0$，

则$\Delta=4a^2-8a=0$，因为$a\neq 0$，所以$a=2$，

故抛物线C方程为$y^2=2x$，则其焦点坐标为$\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

故选：C.

5. 若$a>b>1,x=\ln\dfrac{a+b}{2},y=\dfrac{1}{2}(\ln a+\ln b),z=\sqrt{\ln a\cdot\ln b}$，则（　　）

A. $x<z<y$　　B. $y<z<x$

C. $z<x<y$　　D. $z<y<x$

【答案】D

【解析】

【分析】应用对数运算性质及基本不等式判断各式的大小关系.

【详解】由$x=\ln\dfrac{a+b}{2},y=\dfrac{1}{2}(\ln a+\ln b)=\ln\sqrt{ab},z=\sqrt{\ln a\cdot\ln b}$，

而$a>b>1$，则$\ln a>\ln b>0$，所以$\dfrac{1}{2}(\ln a+\ln b)>\sqrt{\ln a\cdot\ln b}$，即$y>z$，

由$\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$，则$\ln\dfrac{a+b}{2}>\ln\sqrt{ab}$，即$x>y$，

综上，$x>y>z$.

故选：D

6. 设数列$\{a_n\}$的前n项之积为T_n，满足$a_n+2T_n=1$（$n\in\mathrm{N}^*$），则$a_{2024}=$（　　）

A. $\dfrac{1011}{1012}$　　B. $\dfrac{1011}{1013}$　　C. $\dfrac{4047}{4049}$　　D. $\dfrac{4048}{4049}$

【答案】C

【解析】

【分析】由已知递推式可得数列$\{\dfrac{1}{T_n}\}$是等差数列，从而可得T_n，进而可得a_{2024}的值.

【详解】因为$a_n+2T_n=1(n\in\mathrm{N}^*)$，

所以$a_1+2T_1=1$，即$a_1+2a_1=1$，所以$a_1=\dfrac{1}{3}$，

所以$\dfrac{T_n}{T_{n-1}}+2T_n=1(n\geq 2,n\in\mathrm{N}^*)$，