

2023-2024 学年安徽省定远县二中高三下学期第一次质量检测试题（数学试题理）试题

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. “中国剩余定理”又称“孙子定理”，最早可见于中国南北朝时期的数学著作《孙子算经》卷下第二十六题，叫做“物不知数”，原文如下：今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二。问物几何？现有这样一个相关的问题：将 1 到 2020 这 2020 个自然数中被 5 除余 3 且被 7 除余 2 的数按照从小到大的顺序排成一列，构成一个数列，则该数列各项之和为（ ）

- A. 56383 B. 57171 C. 59189 D. 61242

2. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F ， P 为抛物线上一点， $A(1,1)$ ，当 $\triangle PAF$ 周长最小时， PF 所在直线的斜率为（ ）

- A. $-\frac{4}{3}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$

3. 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，过 F_1 的直线 l 与双曲线 C 的左、右两支分别交于 A, B 两点，若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BF_2} = 0, \frac{|BF_2|}{|AF_2|} = \frac{4}{5}$ ，则双曲线 C 的离心率为（ ）

- A. $\sqrt{13}$ B. 4 C. 2 D. $\sqrt{3}$

4. 设集合 $M = \{x | x^2 + 3x + 2 > 0\}$ ，集合 $N = \{x | (\frac{1}{2})^x \leq 4\}$ ，则 $M \cup N =$ （ ）

- A. $\{x | x \geq -2\}$ B. $\{x | x > -1\}$ C. $\{x | x \leq -2\}$ D. $\mathbb{R}$

5. 下列函数中，在区间 $(0, +\infty)$ 上为减函数的是（ ）

- A. $y = \sqrt{x+1}$ B. $y = x^2 - 1$ C. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ D. $y = \log_2 x$

6. 已知 EF 为圆 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$ 的一条直径，点 $M(x, y)$ 的坐标满足不等式组 $\begin{cases} x - y + 1 \leq 0, \\ 2x + y + 3 \geq 0, \\ y \leq 1. \end{cases}$ 则 $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF}$ 的

取值范围为（ ）

A. $\left[\frac{9}{2}, 13\right]$

B. $[4, 13]$

C. $[4, 12]$

D. $\left[\frac{7}{2}, 12\right]$

7. 已知直线 $2mx + ny = 2$ ($m > 0, n > 0$) 过圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ 的圆心, 则 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值为 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

8. 数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线, 例如: 四叶草曲线就是其中一种, 其方程为 $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$. 给出下列四个结论:

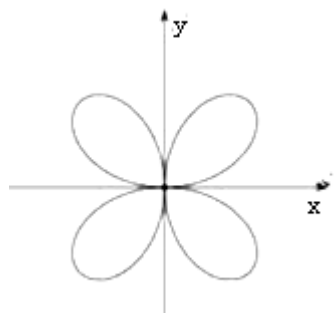
① 曲线 C 有四条对称轴;

② 曲线 C 上的点到原点的最大距离为 $\frac{1}{4}$;

③ 曲线 C 第一象限上任意一点作两坐标轴的垂线与两坐标轴围成的矩形面积最大值为 $\frac{1}{8}$;

④ 四叶草面积小于 $\frac{\pi}{4}$.

其中, 所有正确结论的序号是 ()



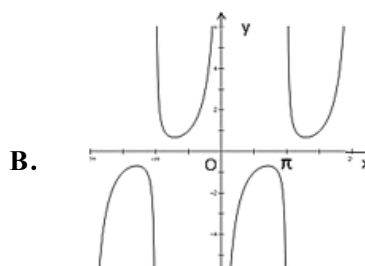
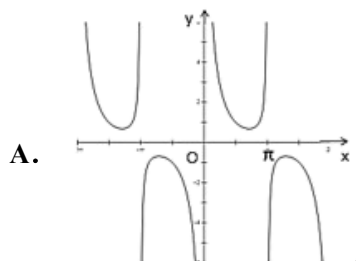
A. ①②

B. ①③

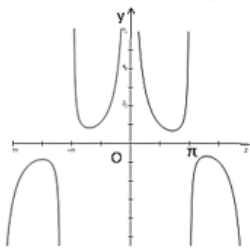
C. ①③④

D. ①②④

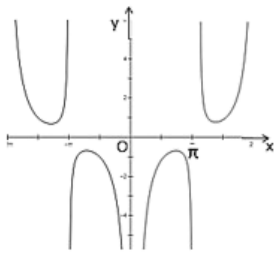
9. $f(x) = \frac{e^{\cos x}}{\sin x}$ 在原点附近的部分图象大概是 ()



C.



D.



10. 函数 $y = \sin x(3\sin x + 4\cos x)$ ($x \in R$) 的最大值为 M ，最小正周期为 T ，则有序数对 (M, T) 为 ()

- A. $(5, \pi)$ B. $(4, \pi)$ C. $(-1, 2\pi)$ D. $(4, 2\pi)$

11. 设集合 $A = \{4, 5, 7, 9\}$, $B = \{3, 4, 7, 8, 9\}$, 全集 $U = A \cup B$, 则集合 $C_U(A \cap B)$ 中的元素共有 ()

- A. 3 个 B. 4 个 C. 5 个 D. 6 个

12. 已知函数 $f(x) = x^3 - ax - 1$ ，以下结论正确的个数为 ()

①当 $a = 0$ 时，函数 $f(x)$ 的图象的对称中心为 $(0, -1)$ ；

②当 $a \geq 3$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上为单调递减函数；

③若函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上不单调，则 $0 < a < 3$ ；

④当 $a = 12$ 时， $f(x)$ 在 $[-4, 5]$ 上的最大值为 1.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 + 2a_1 = 4$ ， $a_3^2 = a_5$ ，则该数列的前 5 项的和为_____.

14. 从 2、3、5、7、11、13 这六个质数中任取两个数，这两个数的和仍是质数的概率是_____ (结果用最简分数表示)

15. 若实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} x+2y-3 \geq 0 \\ 2x+y-3 \geq 0 \\ x+y-3 \leq 0 \end{cases}$ ，则 $2x+3y$ 的最小值为_____.

16. 已知单位向量 a, b 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$ ，则 $|a - 2b| =$ _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln x$.

(1) 设 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ ，求函数 $g(x)$ 的单调区间，并证明函数 $g(x)$ 有唯一零点.

(2) 若函数 $h(x) = e^x - af(x-1)$ 在区间 $(1, 1+e^{-a})$ 上不单调，证明： $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} > a$.

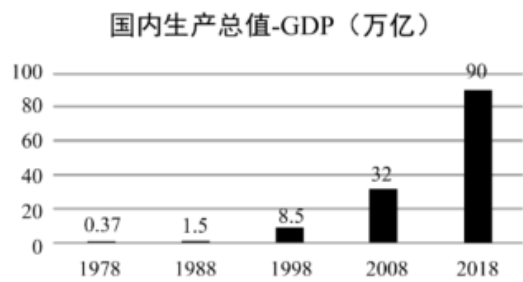
18. (12 分) 设函数 $f(x) = ax(2 + \cos x) - \sin x$, $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导数.

- (1) 若 $a = 1$, 证明 $f'(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上没有零点;
- (2) 在 $x \in (0, +\infty)$ 上 $f(x) > 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

19. (12 分) 已知椭圆 C 的中心在坐标原点 O , 其短半轴长为 1, 一个焦点坐标为 $(1, 0)$, 点 A 在椭圆 C 上, 点 B 在直线 $y = \sqrt{2}$ 上, 且 $OA \perp OB$.

- (1) 证明: 直线 AB 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切;
- (2) 设 AB 与椭圆 C 的另一个交点为 D , 当 $\triangle AOB$ 的面积最小时, 求 OD 的长.

20. (12 分) 根据国家统计局数据, 1978 年至 2018 年我国 GDP 总量从 0.37 万亿元跃升至 90 万亿元, 实际增长了 242 倍多, 综合国力大幅提升.



将年份 1978, 1988, 1998, 2008, 2018 分别用 1, 2, 3, 4, 5 代替, 并表示为 t ; y 表示全国 GDP 总量, 表中

$$z_i = \ln y_i \ (i = 1, 2, 3, 4, 5), \quad \bar{z} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 z_i.$$

$\bar{t}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{t})^2$	$\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})$	$\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{t})(z_i - \bar{z})$
3	26.474	1.903	10	209.76	14.05

- (1) 根据数据及统计图表, 判断 $\hat{y} = bt + a$ 与 $\hat{y} = ce^{dt}$ (其中 $e = 2.718L$ 为自然对数的底数) 哪一个更适宜作为全国 GDP 总量 y 关于 t 的回归方程类型? (给出判断即可, 不必说明理由), 并求出 y 关于 t 的回归方程.
- (2) 使用参考数据, 估计 2020 年的全国 GDP 总量.

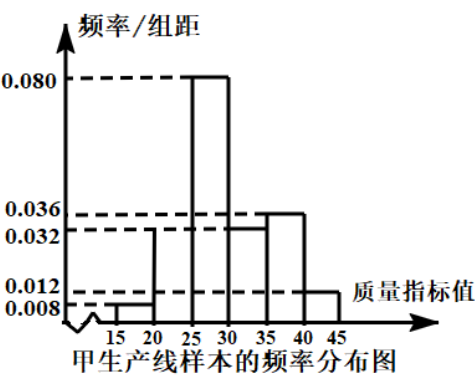
线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 中斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

参考数据：

n	4	5	6	7	8
e^n 的近似值	55	148	403	1097	2981

21.（12 分）某企业原有甲、乙两条生产线，为了分析两条生产线的效果，先从两条生产线生产的大量产品中各抽取了 100 件产品作为样本，检测一项质量指标值. 该项指标值落在 $[20,40)$ 内的产品视为合格品，否则为不合格品.



乙生产线样本的频数分布表

质量指标	$[15,20)$	$[20,25)$	$[25,30)$	$[30,35)$	$[35,40)$	$[40,45]$	合计
频数	2	18	48	14	16	2	100

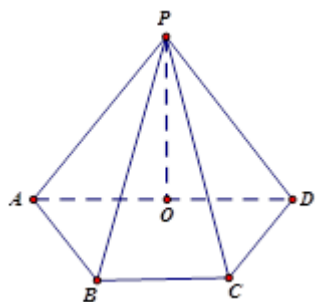
- (1) 根据甲生产线样本的频率分布直方图，以从样本中任意抽取一件产品且为合格品的频率近似代替从甲生产线生产的产品中任意抽取一件产品且为合格品的概率，估计从甲生产线生产的产品中任取 5 件恰有 2 件为合格品的概率；
- (2) 现在该企业为提高合格率欲只保留其中一条生产线，根据上述图表所提供的数据，完成下面的 2×2 列联表，并判断是否有 90%把握认为该企业生产的这种产品的质量指标值与生产线有关？若有 90%把握，请从合格率的角度分析保留哪条生产线较好？

	甲生产线	乙生产线	合计
合格品			
不合格品			
合计			

附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n = a + b + c + d$.

$P(K^2 \geq k_0)$	0.150	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

22. (10 分) 在四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 中, $BC \parallel AD$, $CD \perp AD$, $PO \perp$ 平面 $ABCD$, O 是 AD 的中点, 且 $PO = AD = 2BC = 2CD = 2$



(I) 求证: $AB \parallel$ 平面 POC ;

(II) 求二面角 $O-PC-D$ 的余弦值;

(III) 线段 PC 上是否存在点 E , 使得 $AB \perp DE$, 若存在指出点 E 的位置, 若不存在请说明理由.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、C

【解析】

根据“被 5 除余 3 且被 7 除余 2 的正整数”, 可得这些数构成等差数列, 然后根据等差数列的前 n 项和公式, 可得结果.

【详解】

被 5 除余 3 且被 7 除余 2 的正整数构成首项为 23,

公差为 $5 \times 7 = 35$ 的等差数列, 记数列 $\{a_n\}$

则 $a_n = 23 + 35(n-1) = 35n - 12$

令 $a_n = 35n - 12 \leq 2020$, 解得 $n \leq 58\frac{2}{35}$.

故该数列各项之和为 $58 \times 23 + \frac{58 \times 57}{2} \times 35 = 59189$.

故选：C.

【点睛】

本题考查等差数列的应用，属基础题。

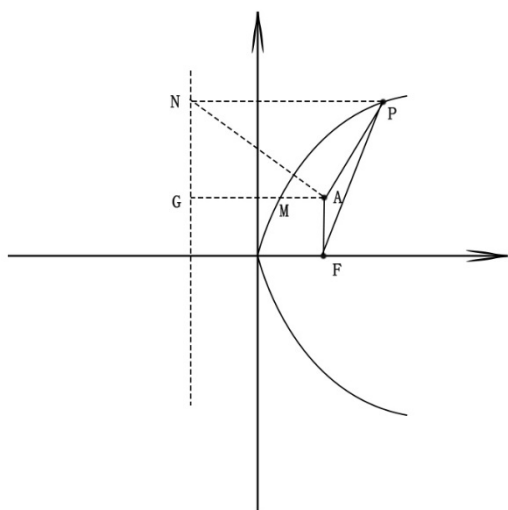
2、A

【解析】

本道题绘图发现三角形周长最小时 A,P 位于同一水平线上，计算点 P 的坐标，计算斜率，即可.

【详解】

结合题意，绘制图像



要计算三角形 PAF 周长最小值，即计算 PA+PF 最小值，结合抛物线性质可知，PF=PN，所以

$PF + PA = PA + PN \geq AN \geq AG$ ，故当点 P 运动到 M 点处，三角形周长最小，故此时 M 的坐标为 $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ ，所以斜

率为 $k = \frac{1-0}{\frac{1}{4}-1} = -\frac{4}{3}$ ，故选 A.

【点睛】

本道题考查了抛物线的基本性质，难度中等.

3、A

【解析】

由已知得 $AB \perp BF_2$ ， $|BF_2| = 4x$ ，由已知比值得 $|AF_2| = 5x$ ， $|AB| = 3x$ ，再利用双曲线的定义可用 a 表示出 $|AF_1|$ ，

$|AF_2|$ ，用勾股定理得出 a, c 的等式，从而得离心率.

【详解】

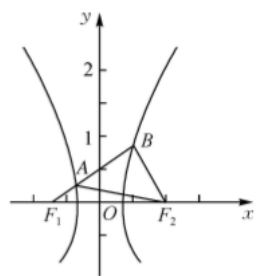
$\vec{AB} \cdot \vec{BF_2} = 0, \vec{AB} \neq 0, \vec{BF_2} \neq 0, \therefore \angle ABF_2 = 90^\circ$. 又 $\frac{|\vec{BF_2}|}{|\vec{AF_2}|} = \frac{4}{5}$, $\therefore$ 可令 $|\vec{BF_2}| = 4x$, 则 $|\vec{AF_2}| = 5x, |\vec{AB}| = 3x$. 设

$|\vec{AF_1}| = t$, 得 $|\vec{AF_2}| - |\vec{AF_1}| = |\vec{BF_1}| - |\vec{BF_2}| = 2a$, 即 $5x - t = (3x + t) - 4x = 2a$, 解得 $t = 3a, x = a$, $\therefore |\vec{BF_2}| = 4a$,

$|\vec{BF_1}| = |\vec{AB}| + |\vec{AF_1}| = 6a$,

由 $|\vec{BF_1}|^2 + |\vec{BF_2}|^2 = |\vec{F_1F_2}|^2$ 得 $(6a)^2 + (4a)^2 = (2c)^2$, $c^2 = 13a^2$, $c = \sqrt{13}a$, $\therefore$ 该双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{13}$.

故选: A.



【点睛】

本题考查求双曲线的离心率, 解题关键是由向量数量积为 0 得出垂直关系, 利用双曲线的定义把双曲线上的点 A, B 到焦点的距离都用 a 表示出来, 从而再由勾股定理建立 a, c 的关系.

4、D

【解析】

试题分析: 由题 $M = \{x | x^2 + 3x + 2 > 0\} = \{x | x < -2 \text{ 或 } x > -1\}$,

$N = \left\{x \mid \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 4\right\} = \left\{x \mid \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right\} = N = \{x | x \geq -2\}$, $\therefore M \cup N = R$, 选 D

考点: 集合的运算

5、C

【解析】

利用基本初等函数的单调性判断各选项中函数在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调性, 进而可得出结果.

【详解】

对于 A 选项, 函数 $y = \sqrt{x+1}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数;

对于 B 选项, 函数 $y = x^2 - 1$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数;

对于 C 选项, 函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为减函数;

对于 D 选项, 函数 $y = \log_2 x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数.

故选: C.

【点睛】

本题考查函数在区间上单调性的判断, 熟悉一些常见的基本初等函数的单调性是判断的关键, 属于基础题.

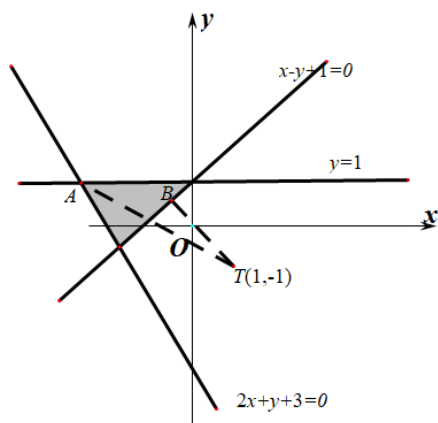
6、D

【解析】

首先将 $\vec{ME} \cdot \vec{MF}$ 转化为 $|\vec{MT}|^2 - 1$, 只需求出 MT 的取值范围即可, 而 MT 表示可行域内的点与圆心 $T(1, -1)$ 距离, 数形结合即可得到答案.

【详解】

作出可行域如图所示



设圆心为 $T(1, -1)$, 则 $\vec{ME} \cdot \vec{MF} = (\vec{MT} + \vec{TE}) \cdot (\vec{MT} + \vec{TF}) =$

$$(\vec{MT} + \vec{TE}) \cdot (\vec{MT} - \vec{TE}) = |\vec{MT}|^2 - |\vec{TE}|^2 = |\vec{MT}|^2 - 1,$$

过 T 作直线 $x - y + 1 = 0$ 的垂线, 垂足为 B , 显然 $MB \leq MT \leq MA$, 又易得 $A(-2, 1)$,

$$\text{所以 } MA = \sqrt{[1 - (-2)]^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{13}, \quad TB = \frac{|1 - (-1) + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{故 } \vec{ME} \cdot \vec{MF} = |\vec{MT}|^2 - 1 \in \left[\frac{7}{2}, 12\right].$$

故选: D.

【点睛】

本题考查与线性规划相关的取值范围问题, 涉及到向量的线性运算、数量积、点到直线的距离等知识, 考查学生转化与划归的思想, 是一道中档题.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/485113211243011300>