第二章 自动控制系统的数学模型

2.1 微分方程式的编写
2.2 非线性数学模型的线性化
2.3 传递函数
2.4 系统动态结构图
2.5 系统传递函数和结构图的等效变换
2.6 信号流图

重点掌握：

微分方程

传递函数

系统结构图及信号流图

梅逊公式

- Differential Equations of Physical Systems.
- The Transfer function of Linear Systems.
- Block Diagram and Signal-flow Graph.
- Mason's gain formula

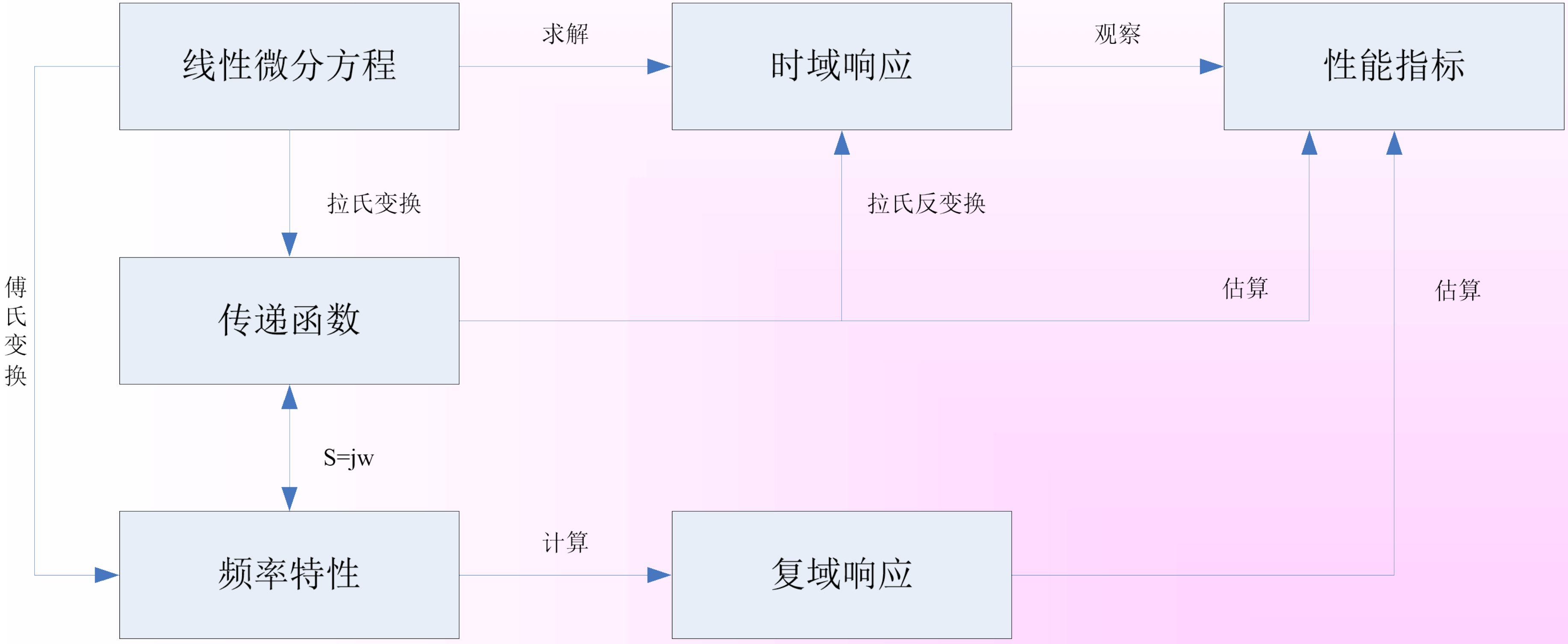
数学模型：描述系统的输入、输出变量以及系统内部各个变量之间的数学表达式。

Mathematical model:Descriptions of the behavior of a system using mathematics.

常用数学模型：

微分方程（或差分方程）
传递函数（或结构图）
频率特性
状态空间表达式（或状态模型）

由数学模型求取系统性能指标的主要途径



建模方法

1、解析法（机理分析法）

根据系统工作所依据的物理定律列写运动方程

2、实验法（系统辨识法）

给系统施加某种测试信号，记录输出响应，并用适当的数学模型去逼近系统的输入输出特性

2.1 微分方程式的编写

The differential equations describing the dynamic performance of a physical system are obtained by utilizing the physical laws of the process.

Step1:确定系统中各元件的输入、输出变量。

Step2:按信号传递顺序列写微分方程。

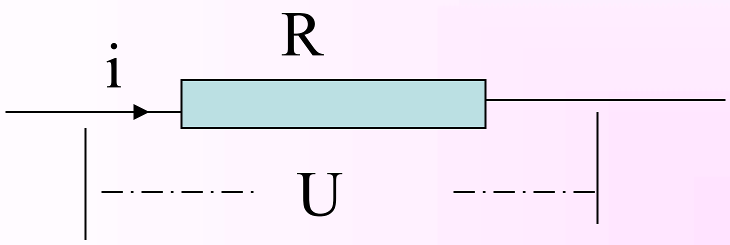
Step3:化简（线性化、消去中间变量），写出输入、输出变量间的数学表达式。

Step4:变换成标准形式。即与输出量有关的项写在方程左边，与输入量有关的项写在方程右边，方程两边变量的导数项均按降幂排列。

理想元件的微分方程

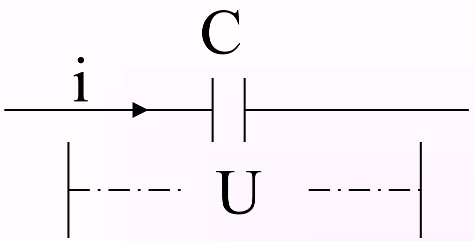
Differential Equations for Ideal Elements

(1) 电阻（Electrical Resistance ）



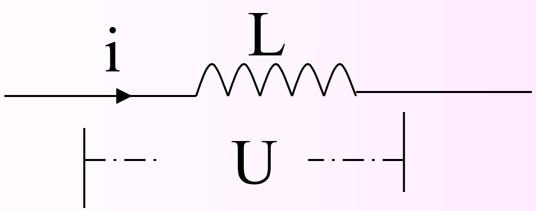
$$i = \frac{U}{R}$$

(2) 电容（ Electrical Capacitance ）



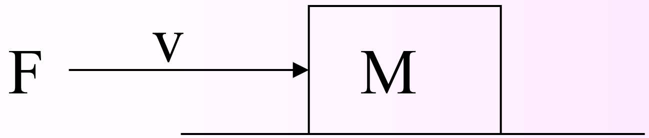
$$i = C\frac{dU}{dt}$$

(3) 电感（ Electrical Inductance ）



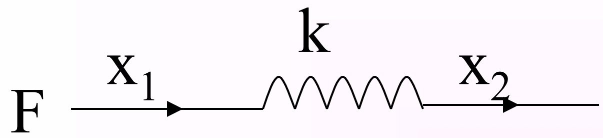
$$U = L\frac{di}{dt}$$

(4) 质量块（ Mass block ）



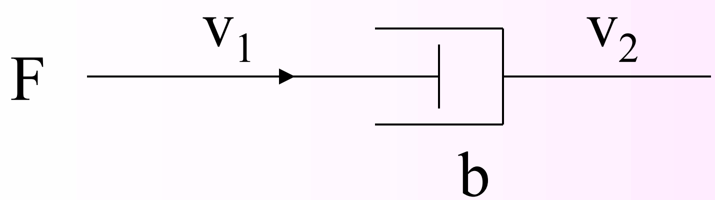
$$F = M\frac{dv}{dt}$$

(5) 弹簧（ Spring ）



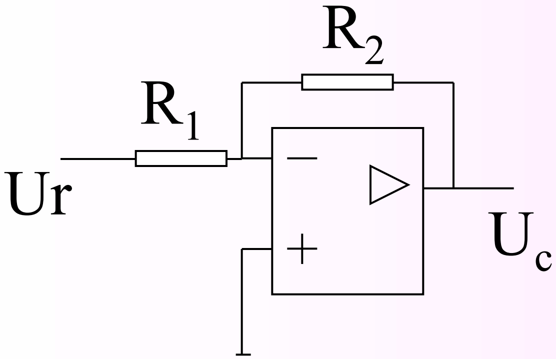
$$F = k(x_1 - x_2)$$

(6) 阻尼器（ Damper ）



$$F = b(v_1 - v_2)$$

(7) 运算放大器（ Operational amplifier ）



$$\frac{U_r}{R_1} = -\frac{U_c}{R_2}$$

例题讲解

2.2 非线性数学模型的线性化

系统的微分方程描述

系统名称	微分方程	微分方程备注
非线性系统	$f\frac{dy}{dx}+ky^2+y=F(t)$	非线性微分方程
线性系统	$f\frac{dy}{dx}+ky=F(t)$	线性微分方程
线性定常系统	$f\frac{dy}{dx}+ky=F(t)$	系数是常数
线性时变系统	$f\frac{dy}{dx}+k(t)y=F(t)$	系数是随着时间变化

线性系统的重要性质：满足叠加性和均匀性（齐次性）即：

如果输入$r_1(t)$—>输出$y_1(t)$，输入$r_2(t)$—>输出$y_2(t)$

则输入$a\ r_1(t)+b\ r_2(t)$ —>输出$a\ y_1(t)+by_2(t)$

如果某些非线性特性在一定的工作范围内，可以用线性系统模型近似，称为非线性模型的线性化。

小偏差线性化：用台劳级数展开，略去二阶以上导数项。

1假设：x, y在平衡点（x_0, y_0）附近变化，即

$x=x_0+\triangle x$， $y=y_0+\triangle y$

2近似处理

$$\Delta y=\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}\cdot\Delta x$$

3数学方法

$$y=y_0+\Delta y=f(x_0)+\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}\cdot\Delta x+\frac{1}{2!}\left.\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0}\cdot(\Delta x)^2+L$$

4略去高阶无穷小项

$$y=y_0+\Delta y=f(x_0)+\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}\cdot\Delta x$$

例题讲解

线性定常微分方程的求解

求解方法：经典法、拉氏变换法

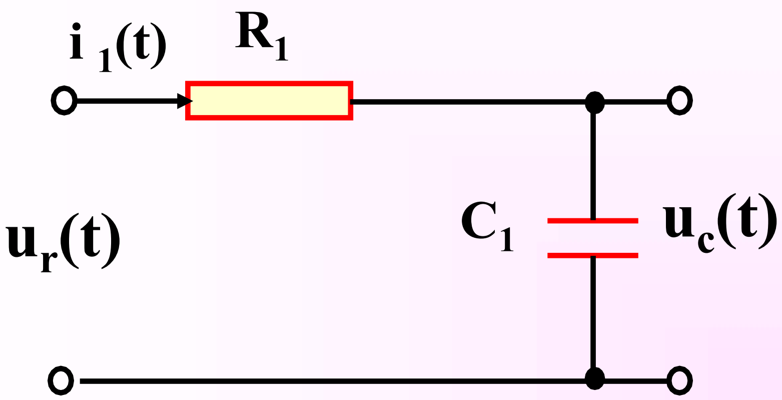
****拉氏变换法求解步骤****

1、考虑初始条件，对微分方程中的每一项分别进行拉氏变换，得到变量s的代数方程；

2、求出输出量拉氏变换函数的表达式；

3、对输出量拉氏变换函数求反变换，得到输出量的时域表达式，即为所求微分方程的解。

例： 已知$R_1=1$，$C_1=1F$，$u_c(0)=0.1v$, $u_r(t)=1(t)$，求 $u_c(t)$



答案：

$$u_c(t)=1-0.9e^{-t}$$

附：拉氏变换常用公式

$$A(c(t))=C(s)$$

$$A(\frac{dc(t)}{dt})=sC(s)-s^0c(0)$$

$$A(\frac{d^2c(t)}{dt^2})=s^2C(s)-s^1c(0)-s^0\dot{c}(0)$$

拉氏变换性质

2.3 传递函数

Transfer function: The ratio of the Laplace transform of the output variable to the Laplace transform of the input variable,with all initial conditions assumed to be zero.

零初始条件下，输出变量的拉氏变换与输入变量的拉氏变换之比。

线性定常系统在零初始条件下，输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比，称为传递函数 。

$$a_0\frac{d^n c(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}c(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dc(t)}{dt}+a_n c(t)$$

$$=b_0\frac{d^m r(t)}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}r(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_{m-1}\frac{dr(t)}{dt}+b_m r(t)$$

$$\Downarrow$$

$$(a_0 s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n)C(s)$$

$$=(b_0 s^m+b_1 s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m)R(s)$$

$$\Downarrow$$

$$G(S)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{b_0 s^m+b_1 s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{a_0 s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

传递函数的性质

1) 传递函数是复变量S的有理真分式函数，分子多项式的次数m低于或等于分母多项的次数n，所有系数均为实数；

2) 传递函数只取决于系统和元件的结构，与输入信号无关；

3) 传递函数与微分方程有相通性，可经简单置换而转换；

4) 传递函数的拉氏反变换是系统的脉冲响应。

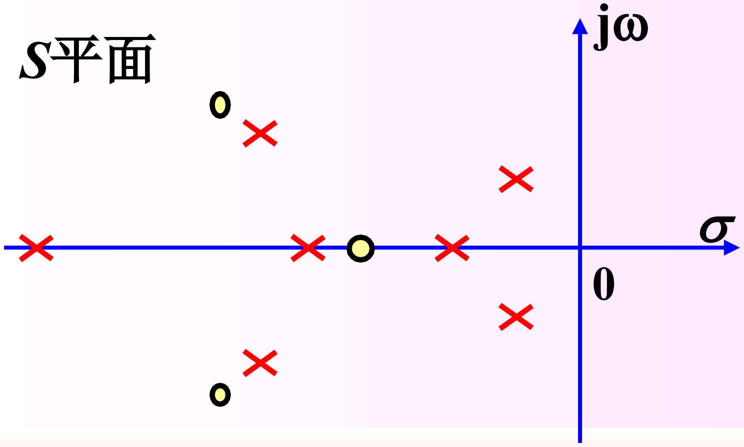
5) 传递函数是在零初始条件下定义的，它只反应系统的零状态特性；零初始条件含义要明确。

传递函数的零点和极点

传递函数分子多项式与分母多项式经因式分解可写为如下形式：

$$G(s)=\frac{b_0(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{a_0(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=K^*\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

传递函数分子多项式的根z_i称为传递函数的零点；
分母多项式的根p_j称为传递函数的极点。K*称为传递系数或根轨迹增益。



传递函数分子多项式与分母多项式也可分解为如下形式：

$$G(s)=K\frac{\prod_{i=1}^{m}(1+\tau_i s)}{s^{\nu}\prod_{j=1}^{n-\nu}(1+T_j s)}$$

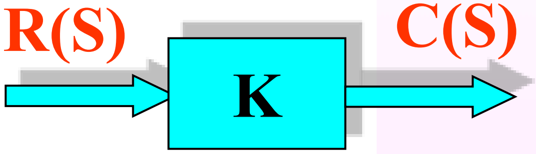
K称为传递系数或增益，在频率法中使用较多

典型环节传递函数

一般可将自动控制系统的数学模型看作由若干个典型环节所组成。研究和掌握这些典型环节的特性将有助于对系统性能的了解。

1．比例环节

比例环节方框图



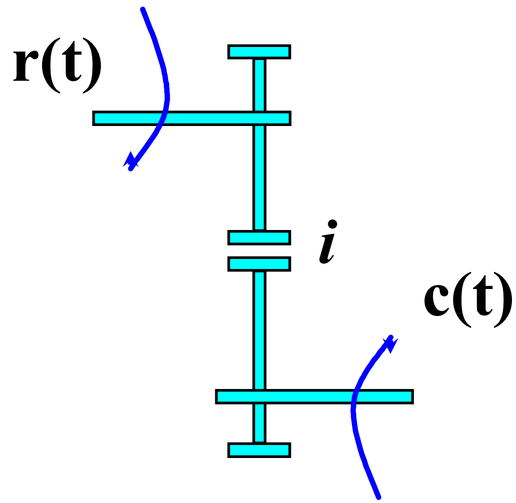
特点: 输出不失真,不延迟,成比例地复现输入信号的变化.

比例环节的传递函数:

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=K$$

比例环节实例

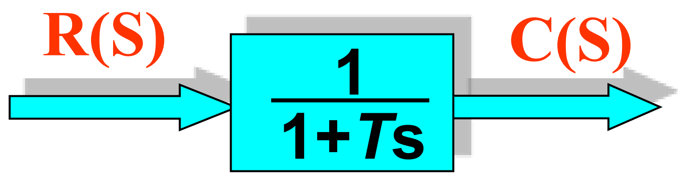
(c) 传动齿轮构成的比例环节



$$K=i$$

2．惯性环节

惯性环节方框图



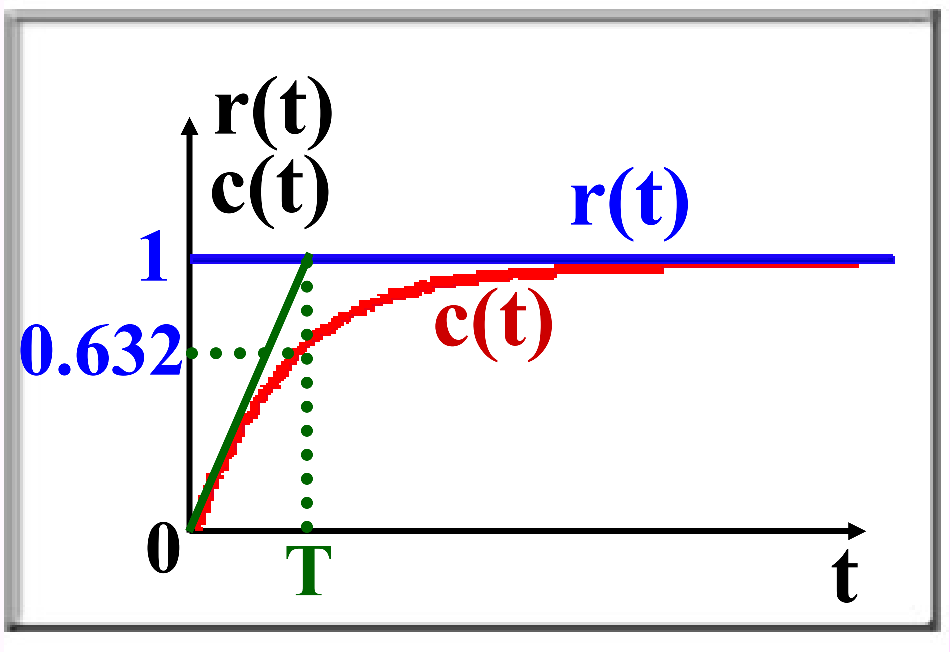
单位阶跃信号作用下的响应:

$$R(s)=\frac{1}{s}\qquad C(s)=\frac{K}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s}$$

拉氏反变换得:

$$c(t)=K\,(1-e^{-\frac{t}{T}})$$

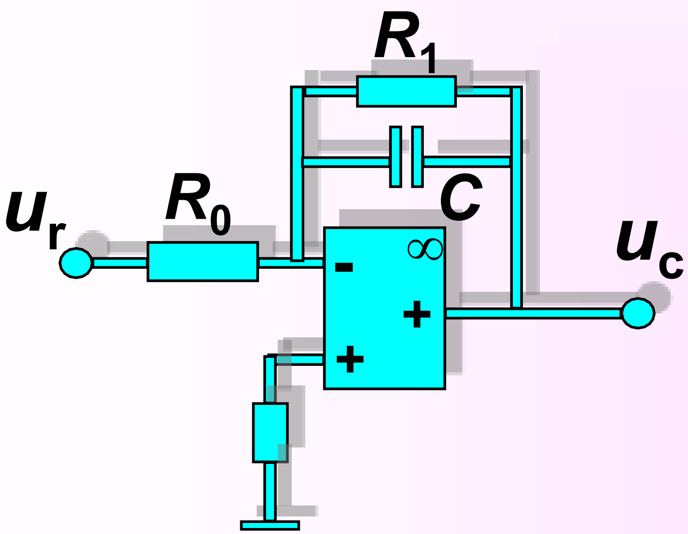
单位阶跃响应曲线



特点：输出量不能瞬时完成与输入量完全一致的变化.

惯性环节实例

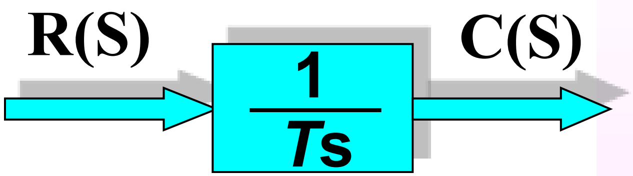
(a) 运算放大器构成的惯性环节



$$G(s) = -\frac{R_1/R_0}{R_1CS+1}$$

3. 积分环节

积分环节方框图

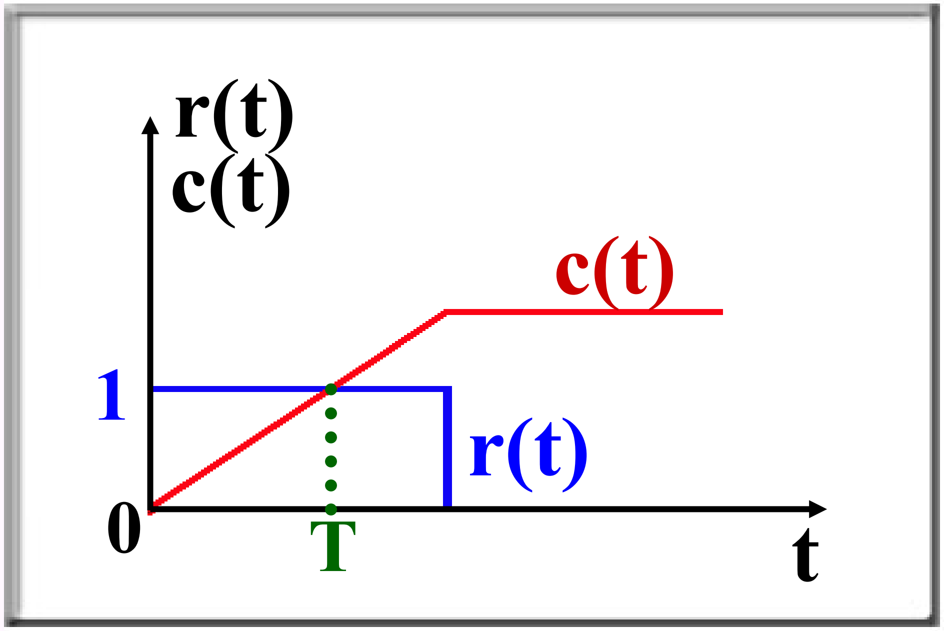


积分环节的单位阶跃响应：

$$R(s)=\frac{1}{S} \qquad C(s)=\frac{1}{TS}\cdot\frac{1}{S}=\frac{1}{TS^2}$$

$$C(t)=\frac{1}{T}t$$

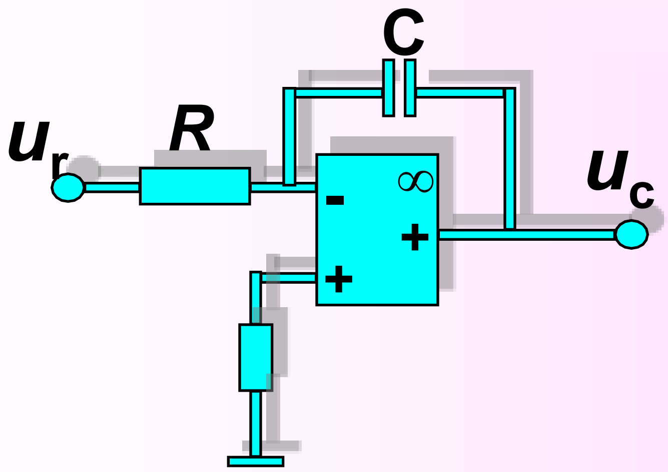
单位阶跃响应曲线



特点： 输出量与输入量对时间的积分成正比，具有滞后作用和记忆功能.

积分环节实例

(a) 由运算放大器构成的积分环节



$$G(s) = -\frac{1}{RCS}$$

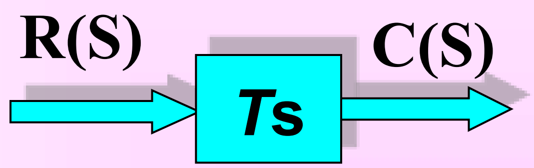
4．微分环节

理想微分环节数学模型：

$$c(t) = T\frac{dr(t)}{dt} \qquad G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = Ts$$

T — 微分时间常数

微分环节方框图



单位阶跃响应函数： $C(t) = T\delta(t)$