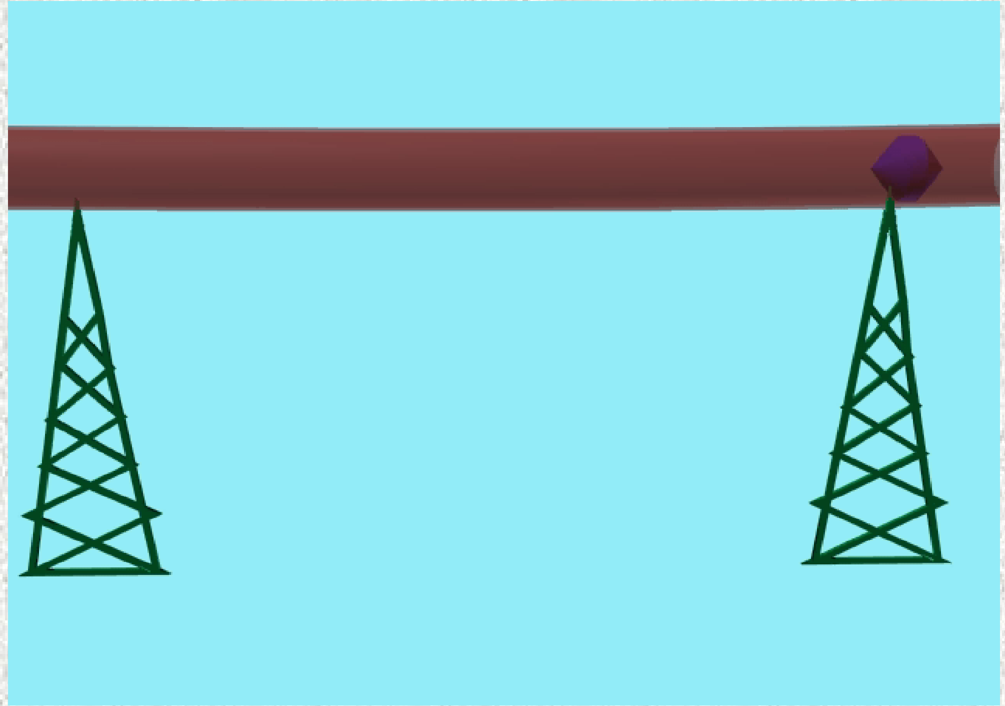
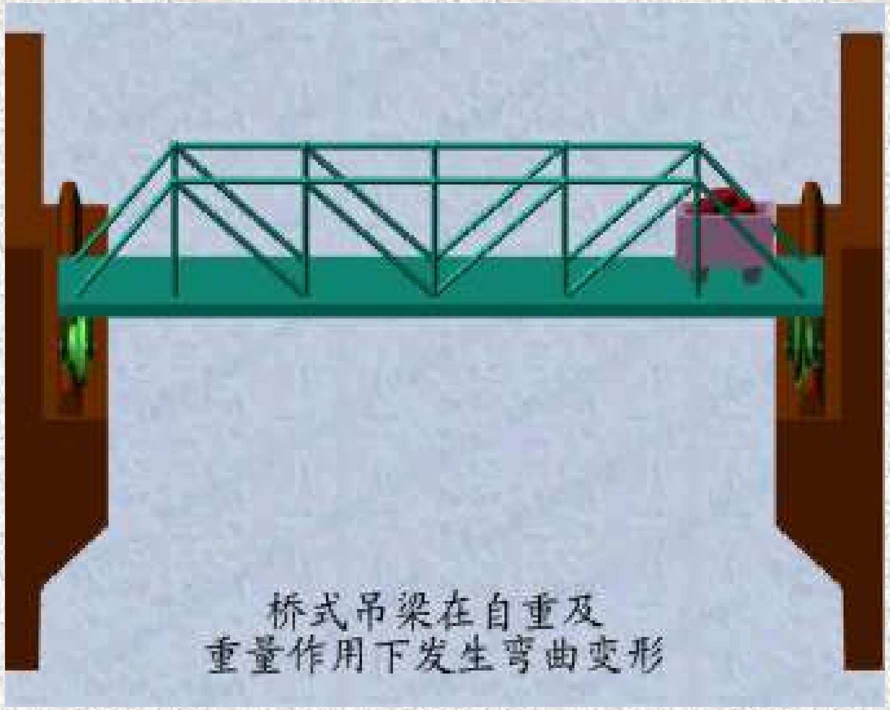
弯曲变形

§6－1 概 述





研究范围：等直梁在对称弯曲时位移的计算。

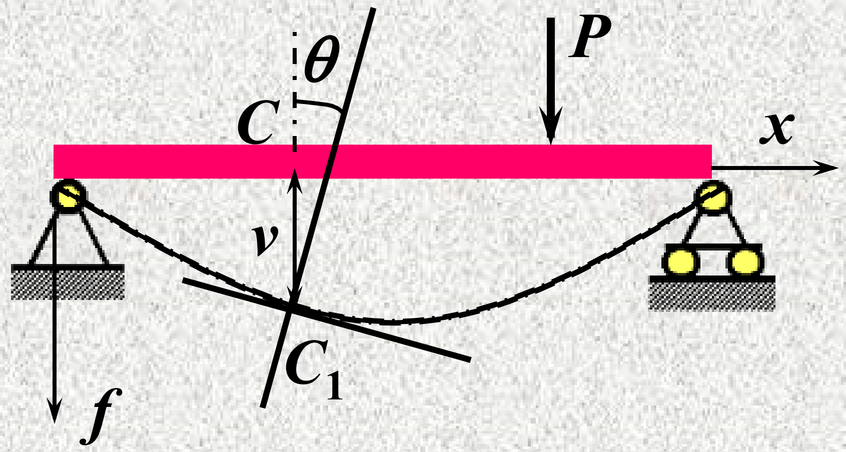
研究目的：①对梁作刚度校核；

②解超静定梁（变形几何条件提供补充方程）。

一、度量梁变形的两个基本位移量

1. 挠度：横截面形心沿垂直于轴线方向的线位移。用v表示。

与 f 同向为正，反之为负。



2. 转角：横截面绕其中性轴转动的角度。用θ 表示，顺时针转动为正，反之为负。

二、挠曲线：变形后，轴线变为光滑曲线，该曲线称为挠曲线。

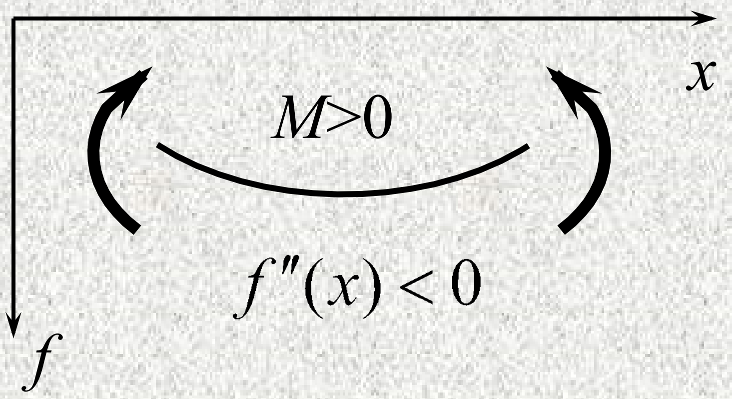
其方程为： $v = f(x)$

三、转角与挠曲线的关系：

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \xRightarrow{\text{小变形}} \theta = f' \qquad (1)$$

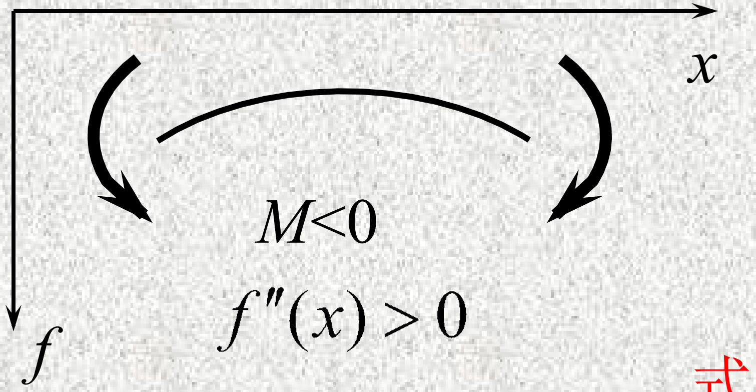
§6-2　梁的挠曲线近似微分方程及其积分

一、挠曲线近似微分方程



$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z(x)}{EI_z}$$

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{f''(x)}{(1+f'^2)^{3/2}} \overset{\text{小变形}}{\approx} \pm f''(x)$$



$$\therefore\ f''(x) = \pm \frac{M_z(x)}{EI_z}$$

$$\therefore\ f''(x) = -\frac{M(x)}{EI} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

式（2）就是挠曲线近似微分方程。

对于等截面直梁，挠曲线近似微分方程可写成如下形式：

$$EIf''(x) = -M(x)$$

二、求挠曲线方程（弹性曲线）

1. 微分方程的积分

$$EIf''(x) = -M(x) \qquad EIf'(x) = \int (-M(x))\mathrm{d}x + C_1$$

$$EIf(x) = \int \left(\int (-M(x))\mathrm{d}x \right)\mathrm{d}x + C_1 x + C_2$$

2. 位移边界条件

❶支点位移条件：

$$f_A = 0 \quad f_B = 0 \qquad f_D = 0 \quad \theta_D = 0$$

❷连续条件： $f_{C^-} = f_{C^+}$ 或写成 $f_{C左} = f_{C右}$

❸光滑条件： $\theta_{C^-} = \theta_{C^+}$ 或写成 $\theta_{C左} = \theta_{C右}$

讨论：

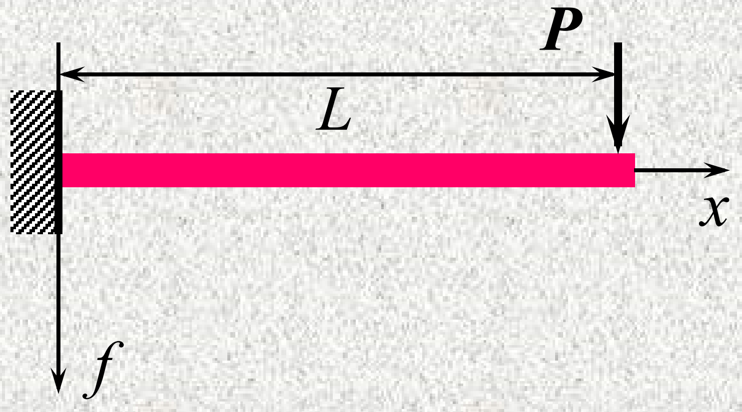
①适用于小变形情况下、线弹性材料、细长构件的平面弯曲。

②可应用于求解承受各种载荷的等截面或变截面梁的位移。

③积分常数由挠曲线变形的几何相容条件（边界条件、连续条件）确定。

④优点：使用范围广，直接求出较精确； 缺点：计算较繁。

例1 求下列各等截面直梁的弹性曲线、最大挠度及最大转角。



解：

❶建立坐标系并写出弯矩方程

$$M(x)=P(x-L)$$

❷写出微分方程的积分并积分

$$EIf''=-M(x)=P(L-x)$$

$$EIf'=-\frac{1}{2}P(L-x)^2+C_1$$

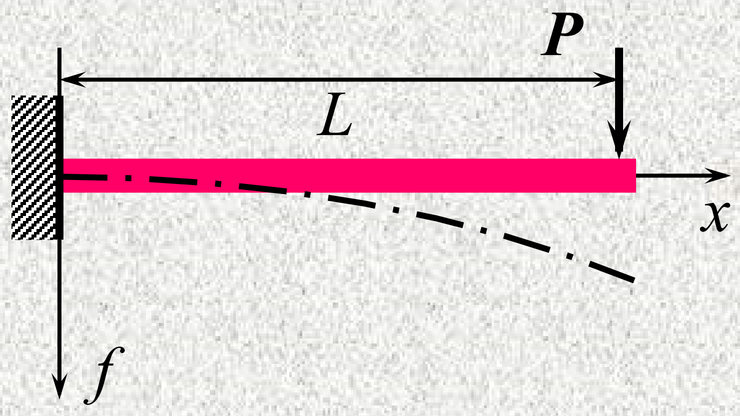
$$EIf=\frac{1}{6}P(L-x)^3+C_1x+C_2$$

❸应用位移边界条件求积分常数

$$EIf(0)=\frac{1}{6}PL^3+C_2=0$$

$$EI\theta(0)=EIf'(0)=-\frac{1}{2}PL^2+C_1=0$$

$$\therefore C_1=\frac{1}{2}PL^2\ ;C_2=-\frac{1}{6}PL^3$$



❹写出弹性曲线方程并画出曲线

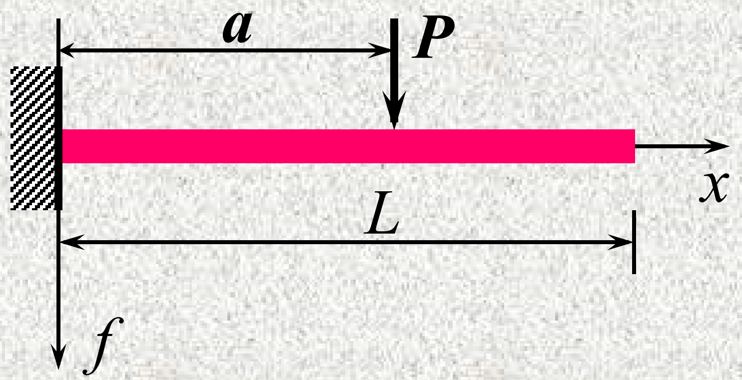
$$f(x)=\frac{P}{6EI}\left[(L-x)^3+3L^2x-L^3\right]$$

❺最大挠度及最大转角

$$\theta_{max}=\theta(L)=\frac{PL^2}{2EI} \qquad f_{max}=f(L)=\frac{PL^3}{3EI}$$

解：❶建立坐标系并写出弯矩方程

$$M(x)=\begin{cases}P(x-a) & (0\le x\le a)\\ 0 & (a\le x\le L)\end{cases}$$

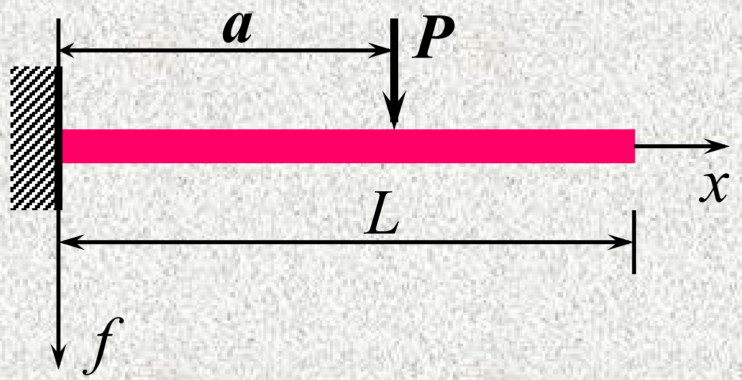


❷写出微分方程的积分并积分

$$EIf''=\begin{cases}P(a-x) & (0\le x\le a)\\ 0 & (a\le x\le L)\end{cases}$$

$$EIf'=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}P(a-x)^2+C_1\\ D_1\end{cases}\qquad EIf=\begin{cases}\dfrac{1}{6}P(a-x)^3+C_1x+C_2\\ D_1x+D_2\end{cases}$$

❸应用位移边界条件求积分常数



$$EIf(0)=\frac{1}{6}Pa^3+C_2=0$$

$$EI\theta(0)=-\frac{1}{2}Pa^2+C_1=0$$

$$\theta(a^-)=\theta(a^+)\qquad \therefore C_1=D_1$$

$$f(a^-)=f(a^+)$$

$$\therefore C_1a+C_2=D_1a+D_2$$

$$\therefore C_1=D_1=\frac{1}{2}Pa^2\,;C_2=D_2=-\frac{1}{6}Pa^3$$

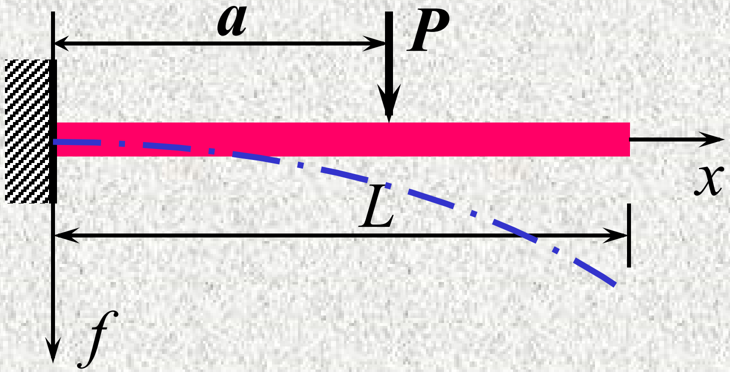
❹写出弹性曲线方程并画出曲线

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{P}{6EI}\left[(a-x)^3+3a^2x-a^3\right] & (0\le x\le a)\\[2ex] \dfrac{P}{6EI}\left[3a^2x-a^3\right] & (\mathrm{a}\le x\le L)\end{cases}$$

❺最大挠度及最大转角

$$\theta_{\max}=\theta(a)=\frac{Pa^2}{2EI}$$

$$f_{\max}=f(L)=\frac{Pa^2}{6EI}\left[3L-a\right]$$



§6-3 求梁的挠度与转角的共轭梁法

一、方法的用途：求梁上指定点的挠度与转角。

二、方法的理论基础：相似比拟。

梁的挠曲线微分方程 $EIf''(x) = -M(x)$

梁的外载与内力的关系 $M''(x) = q(x)$

上二式形式相同，用类比法，将微分方程从形式上转化为外载与内力的关系方程。从而把求挠度与转角的问题转化为求弯矩与剪力的问题。

三、共轭梁（实梁与虚梁的关系）：

①x轴指向及坐标原点完全相同。

②几何形状完全相同。

③实梁对应方程： $EIf''(x) = -M(x)$

虚梁对应方程： $\overline{M''(x)} = \overline{q(x)}$

④令：$\overline{q(x)} = -M(x)$依此建立虚梁上的分载荷。

$$\therefore \quad EIf''(x) = \overline{M''(x)}$$

⑤虚梁“力”微分方程的积分 $\overline{M''(x)} = \overline{q(x)}$

$$\overline{Q(x)} = \overline{M'(x)} = \int_0^x \overline{q(x)}\mathrm{d}x + \overline{Q}_0$$

$$\overline{M(x)} = \int_0^x \left(\int_0^x \overline{q(x)}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x + \overline{Q}_0 x + \overline{M}_0$$

实梁“位移”微分方程的积分

$$EIf''(x) = -M(x)$$

$$EI\theta = EIf'(x) = \int_0^x (-M(x))\,dx + EI\theta_0$$

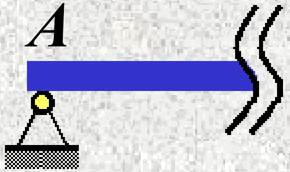
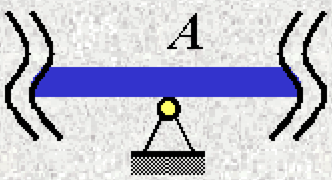
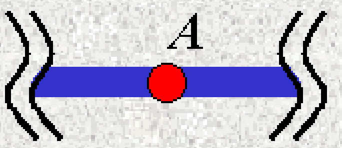
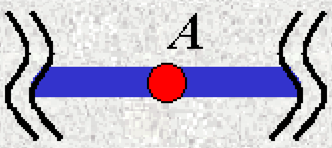
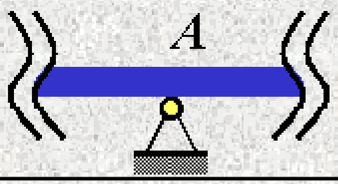
$$EIf(x) = \int_0^x \left(\int_0^x (-M(x))\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x + EI\theta_0 x + EIf_0$$

下脚标带“0”的量均为坐标原点的量。

$$\therefore\ EIf(x) = \overline{M(x)} \qquad EI\theta(x) = \overline{Q(x)}$$

⑥依实梁的“位移”边界条件建立虚梁的“力”边界条件。

$$EIf_A = \overline{M_A}\ ;\ EI\theta_A = \overline{Q_A}$$

实 梁	← 共 轭 梁 →		虚 梁
支承和端部情况	位移边界	力边界	相应的支承和端部情况
固定端A 	$f_A=0$ $\theta_A=0$	$\overline{M}_A=0$ $\overline{Q}_A=0$	自由端A 
自由端A 	$f_A\neq0$ $\theta_A\neq0$	$\overline{M}_A\neq0$ $\overline{Q}_A\neq0$	固定端A 
铰支端A 	$f_A=0$ $\theta_A\neq0$	$\overline{M}_A=0$ $\overline{Q}_A\neq0$	铰支端A 
中间铰支座A 	$f_A=0$ $\theta_{A\text{左}}=\theta_{A\text{右}}\neq0$	$\overline{M}_A=0$ $\overline{Q}_{A\text{左}}=\overline{Q}_{A\text{右}}\neq0$	中间铰A 
中间铰A 	$f_{A\text{左}}=f_{A\text{右}}$ $\theta_{A\text{左}}\neq\theta_{A\text{右}}$	$\overline{M}_{A\text{左}}=\overline{M}_{A\text{右}}$ $\overline{Q}_{A\text{左}}\neq\overline{Q}_{A\text{右}}$	中间铰支座A 

总结：等截面实梁与虚梁的关系如下：

① x 轴指向及坐标原点完全相同。 ②几何形状完全相同。

③令：$\overline{q(x)} = -M(x)$依此建立虚梁上的分布载荷。

④依实梁的“位移”边界条件，建立虚梁的“力”边界条件。

$$EIf_A = \overline{M_A} \ ; EI\theta_A = \overline{Q_A}$$

a ： 固定端 ⟷ 自由端

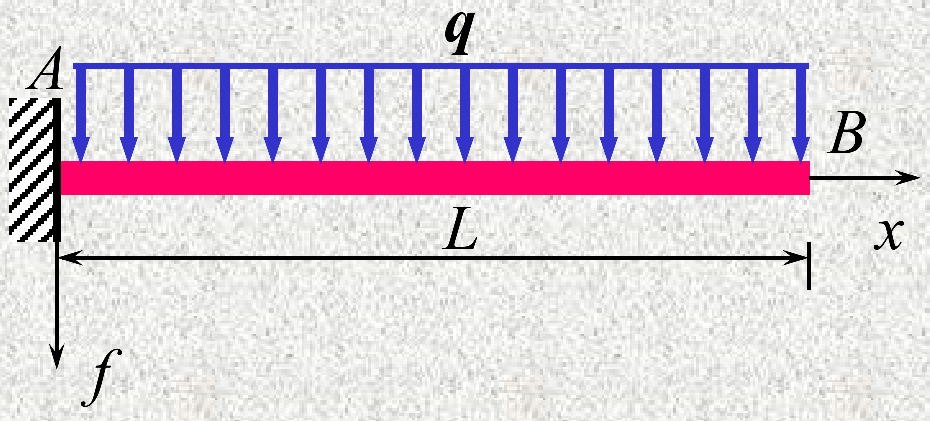
b ： 铰支座 ⟷ 铰支座

c ： 中间铰支座 ⟷ 中间铰链

⑤依虚梁的“内力”，求实梁的“位移”。

$$f_x = \frac{\overline{M_x}}{EI} \ ; \theta_x = \frac{\overline{Q_x}}{EI}$$

例2 求下列等截面直梁B点的位移（挠度和转角）。



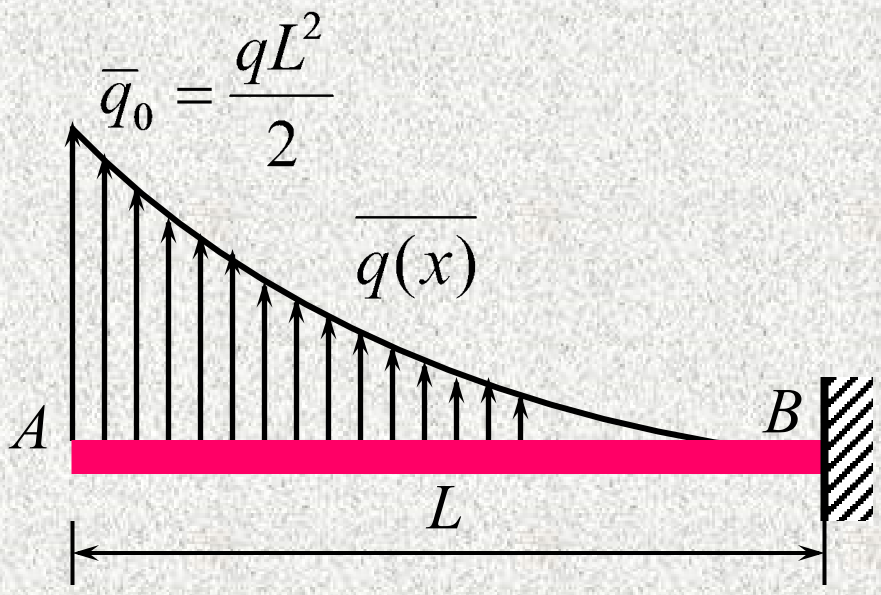
解：❶ 建立坐标和虚梁

求实梁的弯矩方程

以确定虚梁荷载

$$M(x) = -\frac{q}{2}(L-x)^2$$

$$\overline{q(x)} = -M(x) = \frac{q}{2}(L-x)^2$$



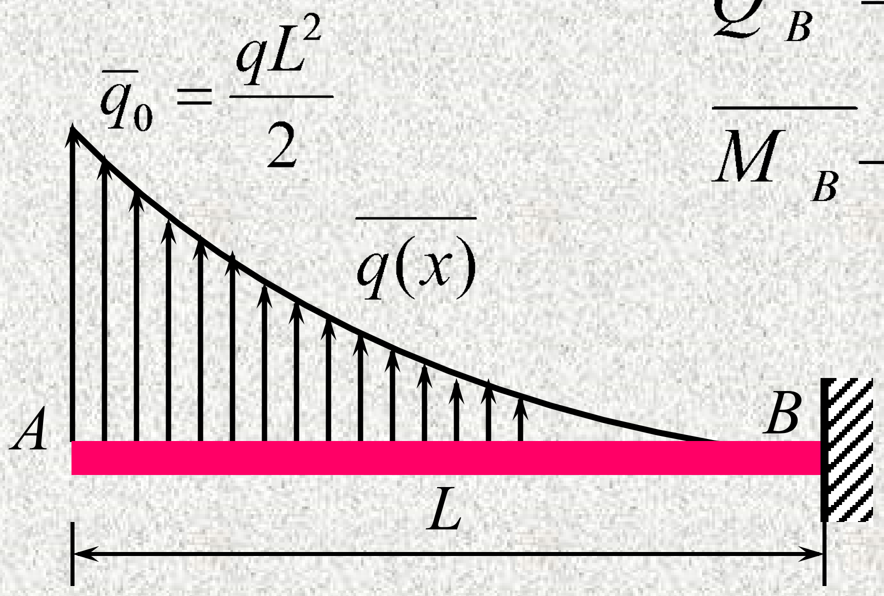
❷求虚梁B点的剪力和弯矩，

以求实梁B点的转角和挠度

❷求虚梁B点的剪力和弯矩，以求实梁B点的转角和挠度

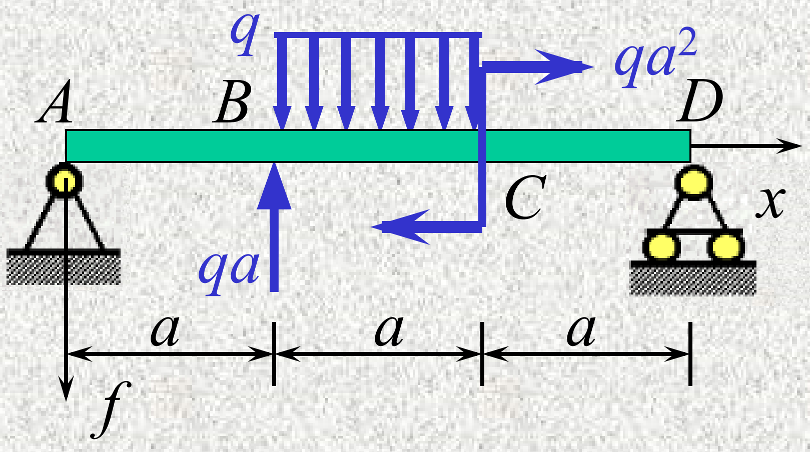
$$EI\theta_B = \overline{Q_B} = \frac{\overline{q_0}L}{3} \qquad \therefore \theta_B = \frac{qL^3}{6EI}$$

$$EIf_B = \overline{M_B} = A_q \times \frac{3L}{4} = \frac{qL^4}{8} \qquad \therefore f_B = \frac{qL^4}{8EI}$$



$\overline{Q_B} \rightarrow$ B 点左侧$\overline{q(x)}$的面积

$\overline{M_B} \rightarrow$ B 点左侧$\overline{q(x)}$的面积对B点之矩



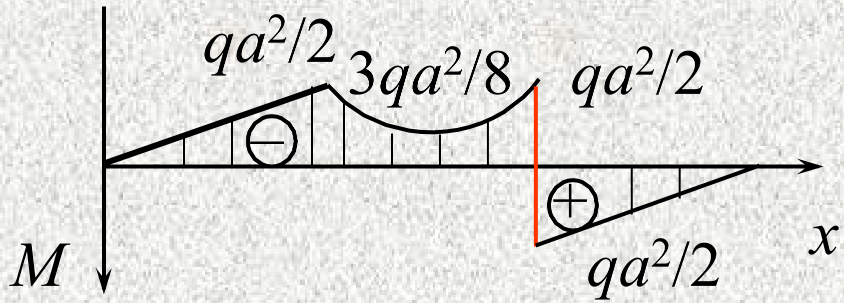
解： ❶ 建立坐标和虚梁

求实梁的弯矩方程以确定

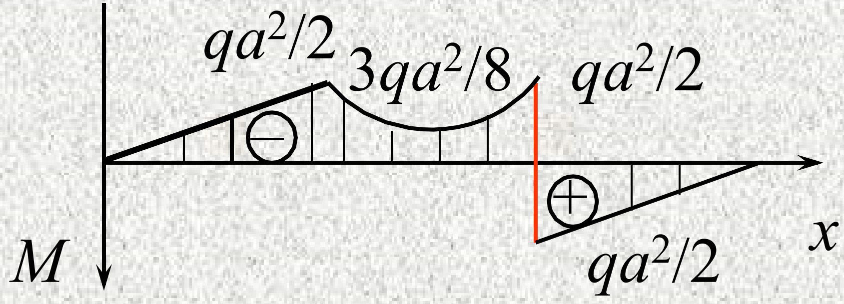
虚梁荷载

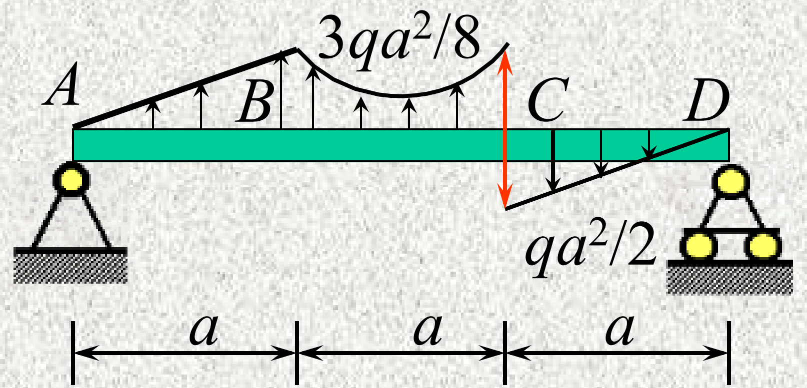
$$R_A = \frac{qa}{2}\downarrow\ ;\ R_D = \frac{qa}{2}$$

$$\overline{q(x)} = -M(x)$$



❷求虚梁B点的剪力和弯矩





❷求虚梁B点的剪力和弯矩

$$\overline{R_A}=\frac{13qa^3}{72}\downarrow$$

$$\overline{Q_B}=-\frac{13qa^3}{72}+\frac{1}{2}\frac{qa^2}{2}a=\frac{5}{72}qa^3$$

$$\overline{M_B}=-\frac{13qa^3}{72}a+\frac{1}{2}\frac{qa^2}{2}a\frac{a}{3}=-\frac{7}{72}qa^4$$

$$\theta_B=\frac{5qa^3}{72EI} \qquad f_B=-\frac{7qa^4}{72EI}$$

❸C点左右位移怎样？

四、变截面直梁的共轭梁法：

①将截面的变化折算到弯矩之中去。

$$f''(x) = -\frac{M(x)}{EI(x)} \times \frac{I_0}{I_0} = -\frac{M^*(x)}{EI_0}$$

$$EI_0 f''(x) = -M^*(x) \qquad M^*(x) = M(x)\frac{I_0}{I(x)}$$

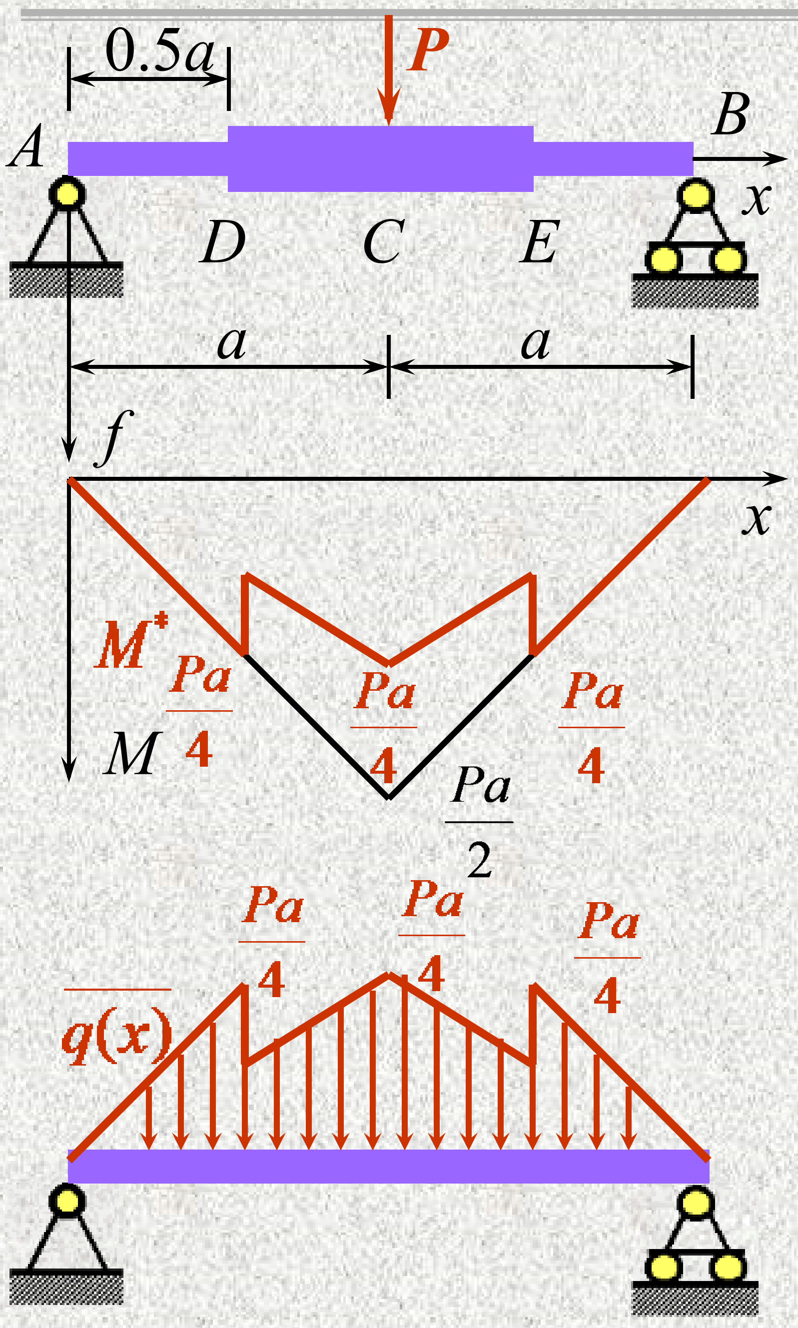
②几何形状：长度不变，惯性矩变为I_0 。

③实梁对应方程： $EI_0 f''(x) = -M^*(x)$

虚梁对应方程： $\overline{M}''(x) = \overline{q}(x)$

④ 令：$\overline{q(x)} = -M^*(x)$依此建立虚梁上的分载荷。

其它与等截面直梁完全相同。



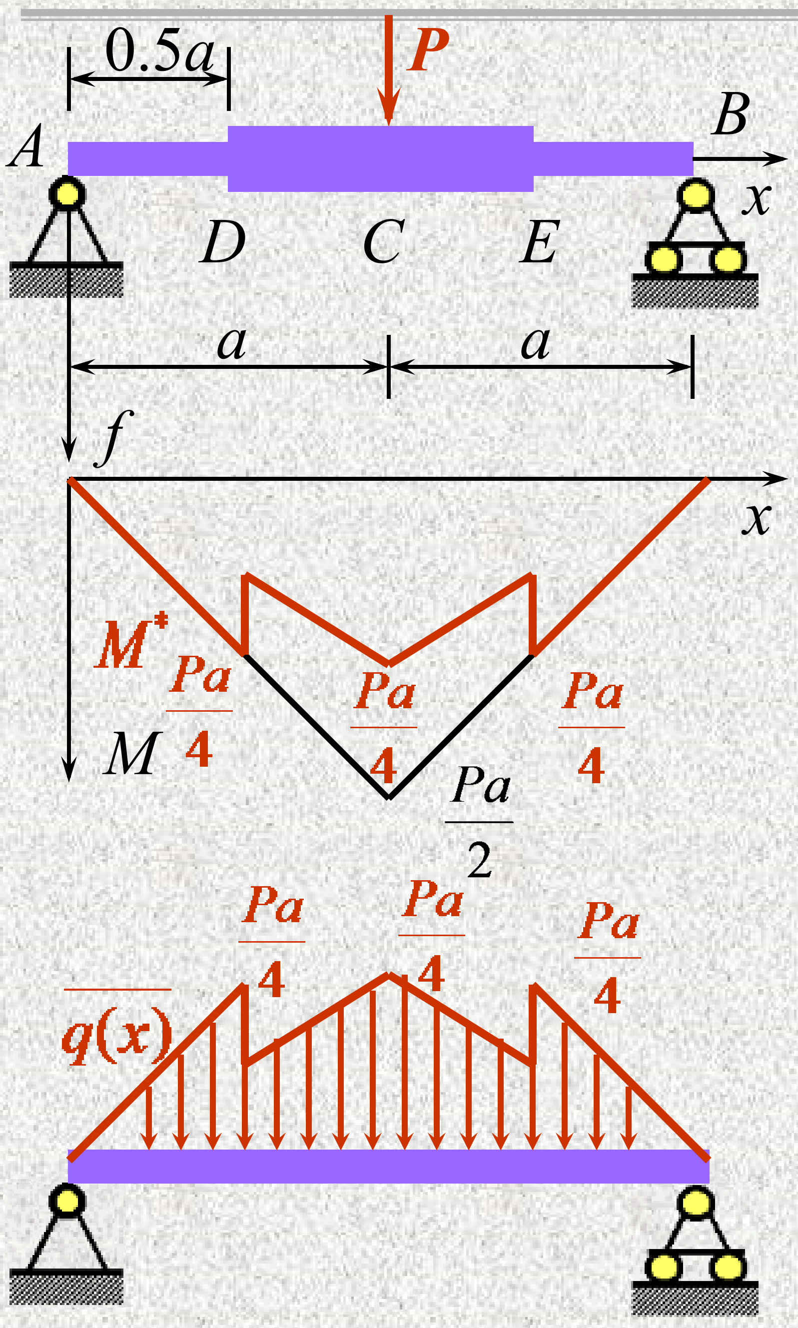
例3 求下列变截面直梁C点的位移，已知：$I_{DE}=2I_{EB}=2I_{AD}$ 。

解：❶ 建立坐标和虚梁

$$M^*(x)_{AD}=M(x)_{AD}\frac{I_0}{I(x)}=M(x)_{AD}$$

$$M^*(x)_{DE}=M(x)_{DE}\frac{I_{AD}}{I_{DE}}=\frac{M(x)_{DE}}{2}$$

$$\overline{q(x)}=-M^*(x)$$



❷求虚梁C点的剪力和弯矩

$$\overline{R}_A=\frac{5Pa^2}{32} \qquad \overline{Q}_C=0$$

$$\overline{M}_C=\frac{5Pa^2}{32}a-\frac{1}{2}\frac{Pa}{4}\frac{a}{2}\frac{2a}{3}-$$

$$\frac{Pa}{8}\frac{a}{2}\frac{a}{4}-\frac{1}{2}\frac{Pa}{8}\frac{a}{2}\frac{a}{6}=\frac{3}{32}Pa^3$$

$$\theta_C=0 \qquad f_C=\frac{3Pa^3}{32EI_{AD}}$$

§6-4　按叠加原理求梁的挠度与转角

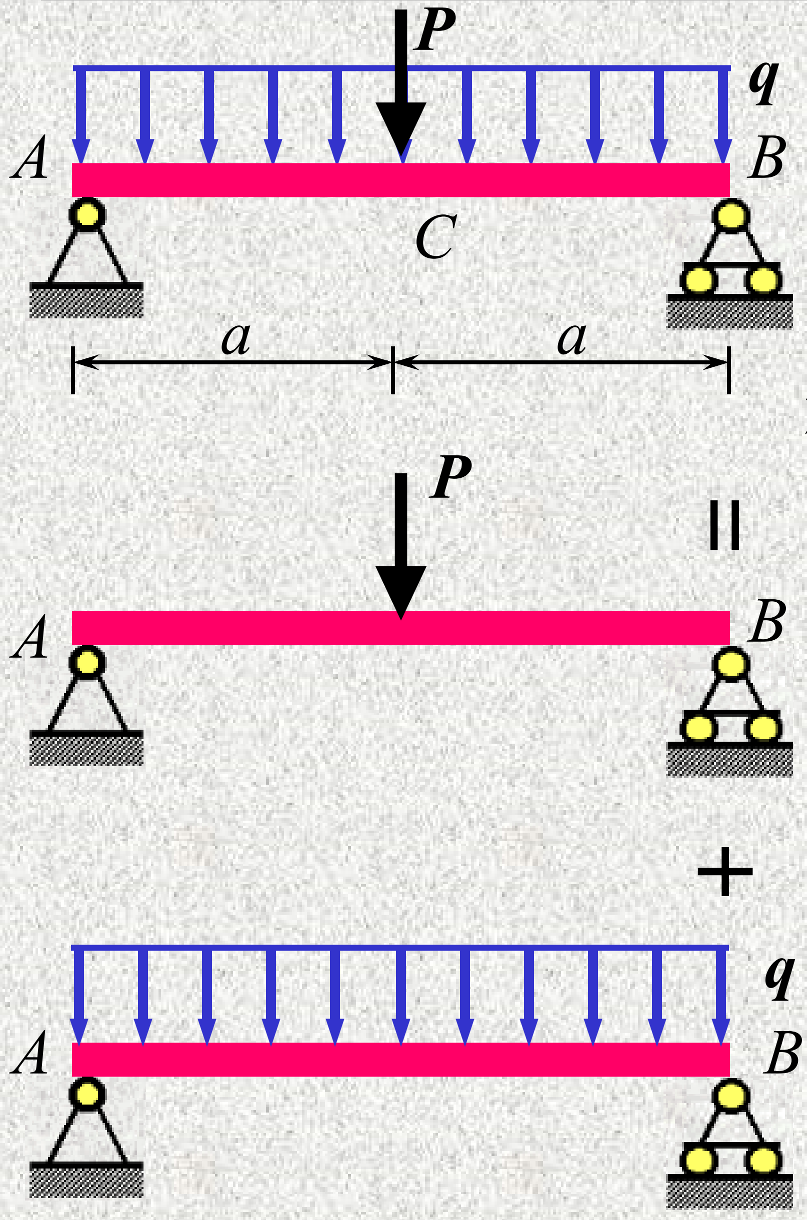
一、载荷叠加： 多个载荷同时作用于结构而引起的变形

等于每个载荷单独作用于结构而引起的变形的代数和。

$$\theta(P_1P_2\cdots\cdots P_n)=\theta_1(P_1)+\theta_2(P_2)+\cdots\cdots+\theta_n(P_n)$$

$$f(P_1P_2\cdots\cdots P_n)=f_1(P_1)+f_2(P_2)+\cdots\cdots+f_n(P_n)$$

二、结构形式叠加（逐段刚化法）：



例4 按叠加原理求A点转角和C点挠度。

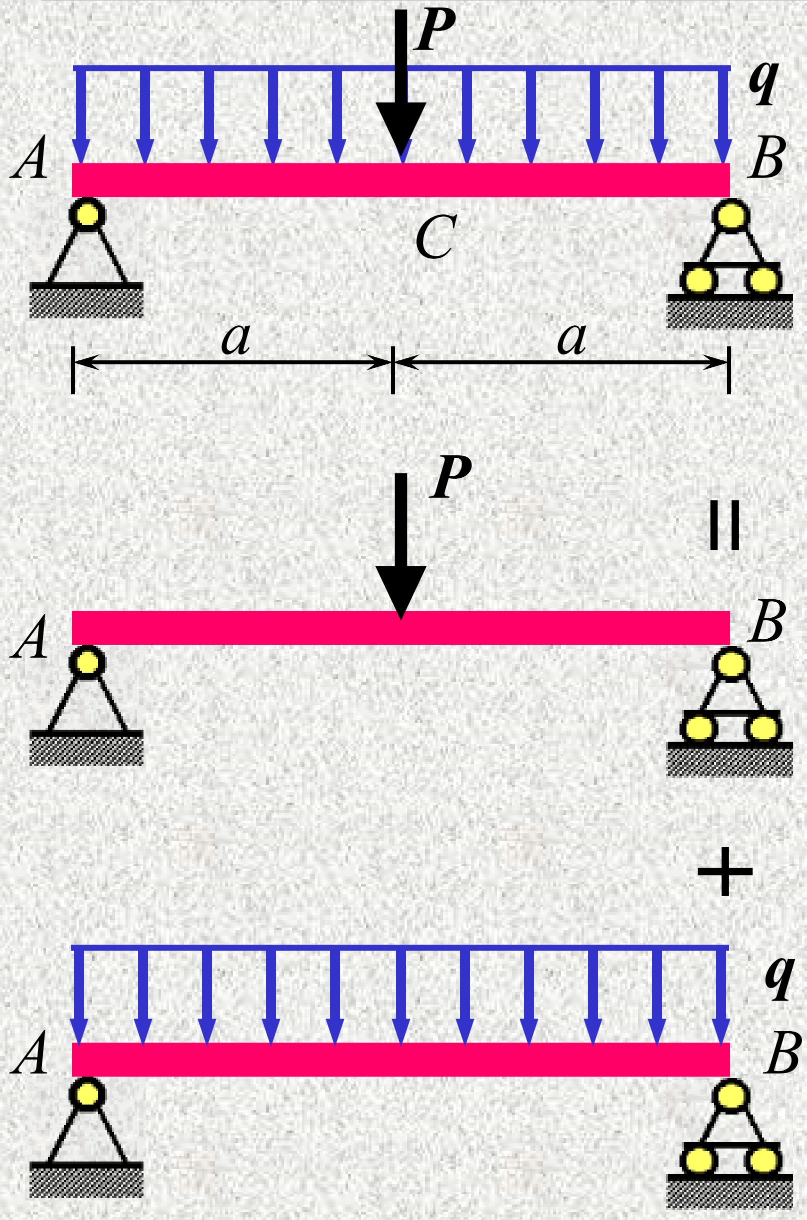
解、❶载荷分解如图

❷由梁的简单载荷变形表，

查简单载荷引起的变形。

$$\theta_{PA}=\frac{Pa^2}{4EI} \qquad f_{PC}=\frac{Pa^3}{6EI}$$

$$\theta_{qA}=\frac{qa^3}{3EI} \qquad f_{qC}=\frac{5qL^4}{24EI}$$



$$\theta_{PA}=\frac{Pa^2}{4EI} \qquad f_{PC}=\frac{Pa^3}{6EI}$$

$$\theta_{qA}=\frac{qa^3}{3EI} \qquad f_{qC}=\frac{5qL^4}{24EI}$$

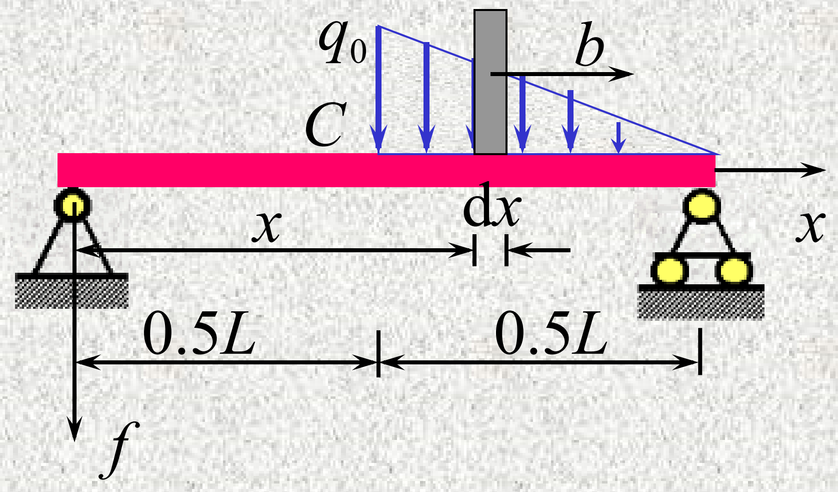
❸叠加

$$\theta_A=\theta_{PA}+\theta_{qA}$$

$$=\frac{a^2}{12EI}(3P+4qa)$$

$$f_C=\frac{5qa^4}{24EI}+\frac{Pa^3}{6EI}$$

例5 按叠加原理求C点挠度。 解：❶载荷无限分解如图



$$dP = q(x)dx = \frac{2bq_0}{L}db$$

❷由梁的简单载荷变形表，

查简单载荷引起的变形。

$$f_{dPC} = \frac{(dP)b(3L^2 - 4b^3)}{48\ EI}$$

$$= \frac{qb^2(3L^2 - 4b^3)}{24\ EI}db$$

❸叠加

$$f_{qC} = \int f_{dPC} = \int_0^{0.5L} \frac{qb^2(3L^2 - 4b^3)}{24\ EIL}db = \frac{qL^4}{240\ EI}$$