层次分析法（AHP）是美国运筹学家匹茨堡大学教授萨蒂(T. L. Saaty)于上世纪70年代初，为美国国防部研究“根据各个工业部门对国家福利的贡献大小而进行电力分配”课题时，应用网络系统理论和多目标综合评价方法，提出的一种层次权重决策分析方法。

这种方法的特点是在对复杂的决策问题的本质、影响因素及其内在关系等进行深入分析的基础上，利用较少的定量信息使决策的思维过程数学化，从而为多目标、多准则或无结构特性的复杂决策问题提供简便的决策方法。

是对难于完全定量的复杂系统作出决策的模型和方法。

- 决策是指在面临多种方案时需要依据一定的标准选择某一种方案。日常生活中有许多决策问题。举例
- 1. 在海尔、新飞、容声和雪花四个牌号的电冰箱中选购一种。要考虑品牌的信誉、冰箱的功能、价格和耗电量。
- 2. 在泰山、杭州和承德三处选择一个旅游点。要考虑景点的景色、居住的环境、饮食的特色、交通便利和旅游的费用。
- 3. 在基础研究、应用研究和数学教育中选择一个领域申报科研课题。要考虑成果的贡献（实用价值、科学意义），可行性（难度、周期和经费）和人才培养。

层次分析法建模

- 一、层次分析法概述
- 二、层次分析法的基本原理
- 三、层次分析法的步骤和方法
- 四、层次分析法的广泛应用
- 五、应用层次分析法的注意事项
- 六、层次分析法应用实例

一、层次分析法概述

- 人们在对社会、经济以及管理领域的问题进行系统分析时，面临的经常是一个由相互关联、相互制约的众多因素构成的复杂系统。层次分析法则为研究这类复杂的系统，提供了一种新的、简洁的、实用的决策方法。
- 层次分析法(AHP法）是一种解决多目标的复杂问题的定性与定量相结合的决策分析方法。该方法将定量分析与定性分析结合起来，用决策者的经验判断各衡量目标能否实现的标准之间的相对重要程度，并合理地给出每个决策方案的每个标准的权数，利用权数求出各方案的优劣次序，比较有效地应用于那些难以用定量方法解决的课题。

- 层次分析法是社会、经济系统决策中的有效工具。其特征是合理地将定性与定量的决策结合起来，按照思维、心理的规律把决策过程层次化、数量化。是系统科学中常用的一种系统分析方法。
- 该方法自1982年被介绍到我国以来，以其定性与定量相结合地处理各种决策因素的特点，以及其系统灵活简洁的优点，迅速地在我国社会经济各个领域内，如工程计划、资源分配、方案排序、政策制定、冲突问题、性能评价、能源系统分析、城市规划、经济管理、科研评价等，得到了广泛的重视和应用。

二、层次分析法的基本原理

层次分析法根据**问题**的性**质**和要达到的**总**目**标**，将**问题**分解**为**不同的**组**成因素，并按照因素**间**的相互关**联**影响以及隶属关系将因素按不同**层**次聚集**组**合，形成一个多**层**次的分析**结**构模型，从而最**终**使**问题归结为**最低**层**(供决策的方案、措施等)相**对**于最高**层**(**总**目**标**)的相**对**重要**权值**的确定或相**对优**劣次序的排定。

三、层次分析法的步骤和方法

运用层次分析法构造系统模型时，大体可以分为以下四个步骤：

1. 建立层次结构模型
2. 构造判断(成对比较)矩阵
3. 层次单排序及其一致性检验
4. 层次总排序及其一致性检验

1. 建立层次结构模型

- 将决策的目标、考虑的因素（决策准则）和决策对象按它们之间的相互关系分为最高层、中间层和最低层，绘出层次结构图。
- 最高层：决策的目的、要解决的问题。
- 最低层：决策时的备选方案。
- 中间层：考虑的因素、决策的准则。
- 对于相邻的两层，称高层为目标层，低层为因素层。

下面举例说明。

例1　大学**毕业**生就**业选择问题**

获得大学**毕业**学位的**毕业**生，在“双向**选择**”**时**，用人**单**位与**毕业**生都有各自的**选择标**准和要求。就**毕业**生来**说选择单**位的**标**准和要求是多方面的，例如：

① 能**发挥**自己才干作出**较**好 贡献 （即工作**岗**位适合**发挥**自己的**专长**）；

②工作收入**较**好（待遇好）；

③生活环境好（大城市、气候等工作条件等）；

④**单**位名声好（声誉等）；

⑤工作环境好（人**际**关系和**谐**等）

⑥发展晋升机会多（如新**单**位或前景好）等。

目标层

工作选择

准则层

贡献

收入

发展

声誉

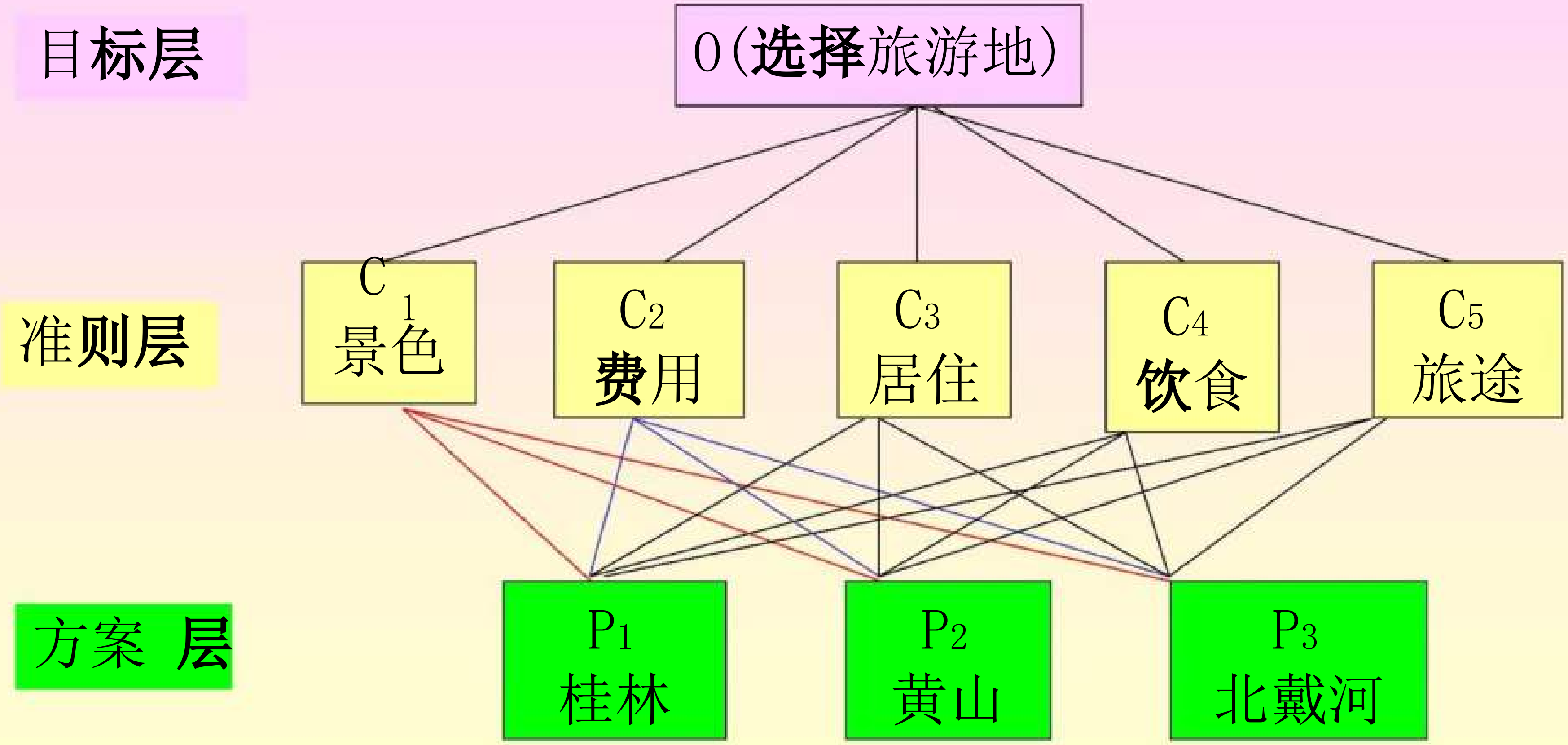
工作环境

生活环境

方案 层

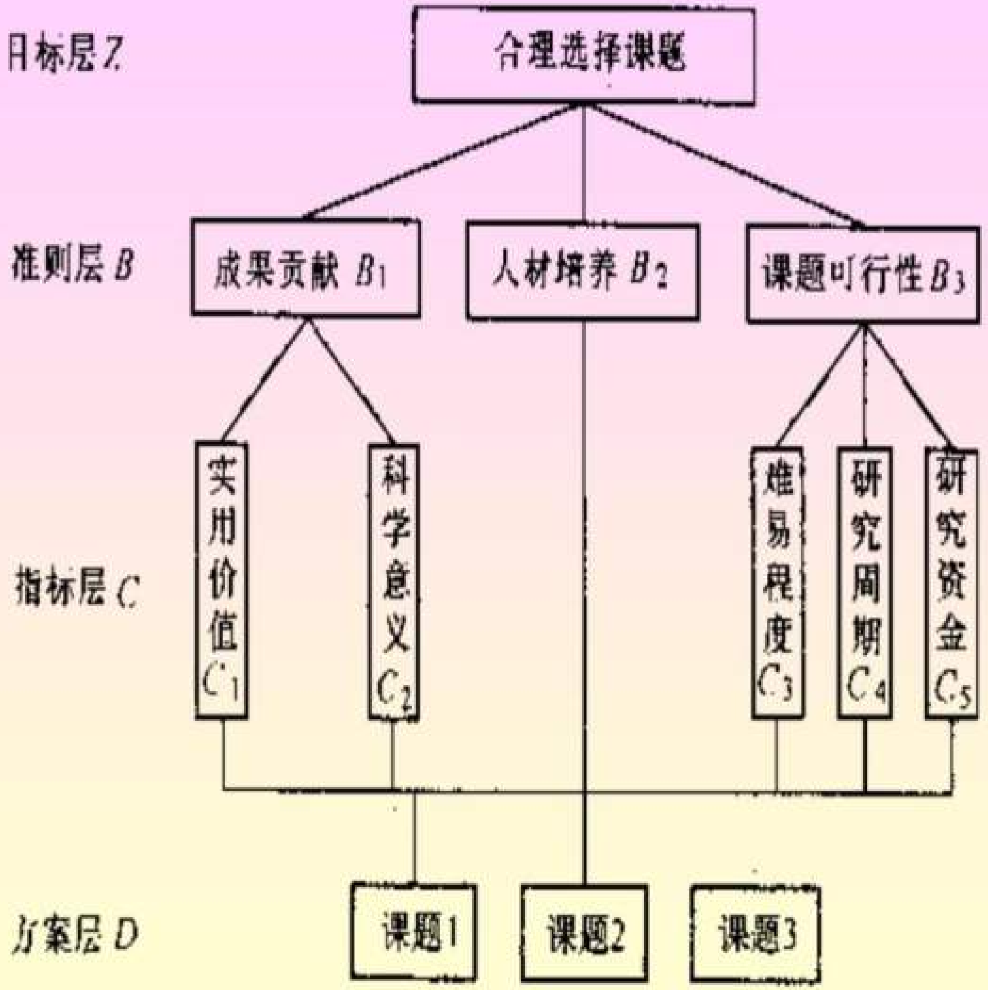
可供选择的单位P_1，P_2，P_n

例2. 选择旅游地　如何在3个目的地中按照景色、**费**用、居住条件等因素**选择.**



例3 科研课题的选择

某研究所现有三个科研课题，限于人力及物力，只能研究一个课题。有三个须考虑的因素：(1)科研成果贡献大小(包括实用价值和科学意义)；(2)人材的培养；(3)课题的可行性(包括课题的难易程度、研究周期及资金)。在这些因素的影响下，如何选择课题?



层次分析法的思维过程的归纳

将决策问题分为3个或多个层次：

最高层：目标层。表示解决问题的目的，即层次分析要达到的总目标。通常只有一个总目标。

中间层：准则层、指标层、…。表示采取某种措施、政策、方案等实现预定总目标所涉及的中间环节；一般又分为准则层、指标层、策略层、约束层等。

最低层：方案层。表示将选用的解决问题的各种措施、政策、方案等。通常有几个方案可选。

每层有若干元素，层间元素的关系用相连直线表示。

层次分析法所要解决的问题是关于最低层对最高层的相对权重问题，按此相对权重可以对最低层中的各种方案、措施进行排序，从而在不同的方案中作出选择或形成选择方案的原则。

2. 构造判断(成对比较)矩阵

在确定各层次各因素之间的权重时，如果只是定性的结果，则常常不容易被别人接受，因而Santy等人提出：一致矩阵法，即：

1. 不把所有因素放在一起比较，而是两两相互比较
2. 对此时采用相对尺度，以尽可能减少性质不同的诸因素相互比较的困难，以提高准确度。

判断矩阵是表示本层所有因素针对上一层某一个因素的相对重要性的比较。判断矩阵的元素a_{ij}用Santy的1—9标度方法给出。

心理学家认为成对比较的因素不宜超过9个，即每层不要超过9个因素。

判断矩阵元素a_{ij}的标度方法

标度	含义
1	表示两个因素相比，具有同样重要性
3	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素稍微重要
5	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素明显重要
7	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素强烈重要
9	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素极端重要
2，4，6，8	上述两相邻判断的中值
倒数	因素i与j比较的判断a_{ij}，则因素j与i比较的判断$a_{ji}=1/a_{ij}$

目标层

0(选择旅游地)

准则层

C1 景色　C2 费用　C3 居住　C4 饮食　C5 旅途

设要比较各准则$C_1, C_2, \cdots, C_n$ 对目标0的重要性

$$C_i : C_j \Rightarrow a_{ij} \qquad A = (a_{ij})_{n\times n},\ a_{ij} > 0,\ a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$$

选择旅游地

$$A = \begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ 1/4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/5 & 2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$A^{\sim}$成对比较阵

A是正互反阵

要由A确定$C_1, \cdots, C_n$ 对0的权向量

稍加分析就发现上述成对比较矩阵有问题

成对比较的不一致情况

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & \cdots \\ 2 & 1 & 7 & \cdots \\ \cdots\cdots & & & \end{bmatrix}$$

不一致

$$a_{21}=2\ (C_2:C_1)$$

$$a_{13}=4\,(C_1:C_3)$$

一致比较 ⇒

$$a_{23}=8\,(C_2:C_3)$$

允许不一致，但要确定不一致的允许范围

考察完全一致的情况

$W(=1) \Rightarrow w_1, w_2, \ldots w_n$ 可作为一个排序向量

令 $a_{ij} = w_i / w_j$ 成对比较

满足 $a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}, \quad i,j,k = 1,2,\ldots,n$

的正互反**阵*A***称**一致阵**。

$$A = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \cdots\cdots & & & \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix}$$

一致**阵**性**质**

- A的秩**为**1，A的唯一非零特征根**为**n $\quad Aw = nw$
- 非零特征根n所**对应**的特征向量**归**一化后可作**为权**向量

对于不一致(但在允**许**范**围**内)的成**对**比**较阵**A， Saaty等人建**议**用**对应**于最大特征根 的特征向量作**为权**向量w， 即

但允**许**范**围**是多大？如何界定？

$$Aw = \lambda w$$

3. 层次单排序及其一致性检验

对应于判断矩阵最大特征根 λ_{max}的特征向量，经归一化(使向量中各元素之和等于1)后记为W。

W的元素为同一层次因素对于上一层次因素某因素相对重要性的排序权值，这一过程称为层次单排序。

能否确认层次单排序，需要进行一致性检验，所谓一致性检验是指对A确定不一致的允许范围。

定理：n 阶一致阵的唯一非零特征根为n

定理：n 阶正互反阵A的最大特征根$\lambda \geq n$，当且仅当$\lambda = n$时A为一致 阵

由于λ **连续**的依**赖**于a_{ij}，**则**λ 比n 大的越多，A 的不一致性越**严**重。用最大特征**值对应**的特征向量作**为**被比**较**因素**对**上**层**某因素影响程度的**权**向量，其不一致程度越大，引起的判断**误**差越大。因而可以用λ-n 数**值**的大小来衡量A 的不一致程度。

定**义**一致性指**标**：$$CI=\frac{\lambda-n}{n-1}$$

CI=0，有完全的一致性

CI接近于0，有**满**意的一致性

CI 越大，不一致越**严**重

为衡量CI 的大小，引入随机一致性指标RI。方法为

随机构造500个成对比较矩阵 $A_1, A_2, \ldots, A_{500}$

则可得一致性指 标 $CI_1, CI_2, \ldots, CI_{500}$

$$RI = \frac{CI_1 + CI_2 + \ldots CI_{500}}{500} = \frac{\dfrac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{500}}{500} - n}{n-1}$$

Saaty的结果如下

随机一致性指标 *RI*

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

定义一致性比率： $CR=\frac{CI}{RI}$

一般，当一致性比率 $CR=\frac{CI}{RI}<0.1$ 时，认为 A 的不一致程度在容许范围之内，有满意的一致性，通过一致性检验。可用其归一化特征向量作为权向量，否则要重新构造成对比较矩阵A，对 a_{ij} 加以调整。

一致性检验：利用一致性指标和一致性比率<0.1及随机一致性指标的数值表，对 A 进行检验的过程。

"选择旅游地"中准**则层对**目**标**的**权**向量及一致性**检验**

准**则层对**目**标**的成对比**较阵**

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ 1/4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/5 & 2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

最大特征根λ=5.073

权向量(特征向量)w =(0.263, 0.475, 0.055, 0.090, 0.11

一致性指 **标** $CI=\dfrac{5.073-5}{5-1}=0.018$

随机一致性指**标**RI=1.12 (**查**表)

一致性比率CR=0.018/1.12=0.016<0.1

通**过**一致性**检验**

正互反阵最大特征根和特征向量的简化计算

- 精确计算的复杂和不必要
- 简化计算的思路——一致阵的任一列向量都是特征向量，一致性尚好的正互反阵的列向量都应近似特征向量，可取其某种意义下的平均。

和法——取列向量的算术平均

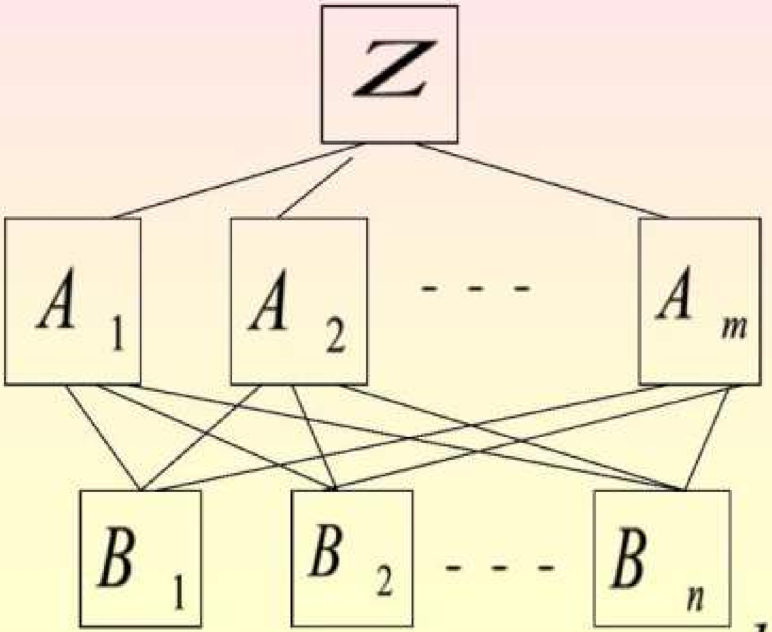
例 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ 1/2 & 1 & 4\\ 1/6 & 1/4 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列向量归一化}} \begin{bmatrix}0.6 & 0.615 & 0.545\\ 0.3 & 0.308 & 0.364\\ 0.1 & 0.077 & 0.091\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{归一化}]{\text{求行和}} \begin{bmatrix}0.587\\ 0.324\\ 0.089\end{bmatrix}=w$

$Aw=\begin{bmatrix}1.769\\ 0.974\\ 0.268\end{bmatrix} \xrightarrow{Aw=\lambda w} \lambda=\frac{1}{3}\left(\frac{1.769}{0.587}+\frac{0.974}{0.324}+\frac{0.268}{0.089}\right)=3.009$

精确结果：w=(0.588, 0.322, 0.090)，λ=3.

4. 层次总排序及其一致性检验

- **计**算某一**层**次所有因素**对**于最高**层**(**总**目**标**)相**对**重要性的**权值**，称**为层**次**总**排序。
- **这**一**过**程是从最高**层**次到最低**层**次依次**进**行的。



A层m个因素$A_1, A_2, \ldots, A_m$,

对总目**标**Z的排序**为**

$a_1, a_2, \ldots, a_m$

B层n个因素对上层A中因素为A_j

的**层**次**单**排序**为**

$b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj} \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$