第 01 讲　直线的方程

目录

01

考情透视·目标导航

考点要求	考题统计	考情分析
（1）直线的倾斜角与斜率 （2）直线的方程	2008 年江苏卷第 9 题，5 分 2006 年上海卷第 11 题，4 分	高考对直线方程的考查比较稳定，考查内容、频率、题型难度均变化不大，备考时应熟练掌握直线的倾斜角与斜率、直线方程的求法等，特别要重视直线方程的求法.

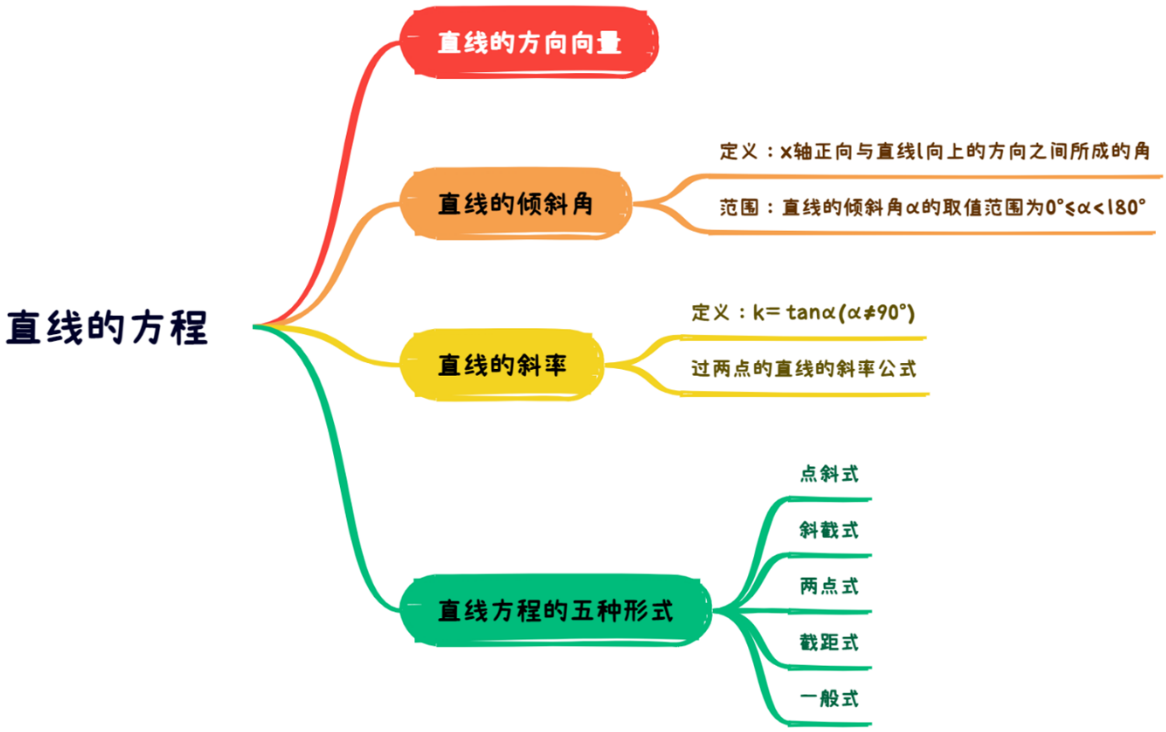
复习目标：

（1）理解直线的倾斜角和斜率的概念，掌握过两点的直线斜率的计算公式.

（2）根据确定直线位置的几何要素，掌握直线方程的几种形式(点斜式、两点式及一般式).

02

知识导图·思维引航


直线的方程
直线的方向向量
直线的倾斜角
定义：x轴正向与直线l向上的方向之间所成的角
范围：直线的倾斜角α的取值范围为0°≤α<180°
直线的斜率
定义：k= tanα(α≠90°)
过两点的直线的斜率公式
直线方程的五种形式
点斜式
斜截式
两点式
截距式
一般式

03
考点突破·题型探究

知识固本

知识点 1：直线的倾斜角和斜率

1、直线的倾斜角

若直线 l 与 x 轴相交，则以 x 轴正方向为始边，绕交点逆时针旋转直至与 l 重合所成的角称为直线 l 的倾斜角，通常用 $\alpha,\beta,\gamma,$L 表示

（1）若直线与 x 轴平行（或重合），则倾斜角为 0

（2）倾斜角的取值范围 $\alpha\in[0，\pi)$

2、直线的斜率

设直线的倾斜角为 α，则 α 的正切值称为直线的斜率，记为 $k=\tan\alpha$

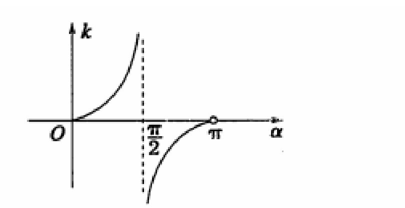
（1）当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 时，斜率不存在；所以竖直线是不存在斜率的

（2）所有的直线均有倾斜角，但是不是所有的直线均有斜率

（3）斜率与倾斜角都是刻画直线的倾斜程度，但就其应用范围，斜率适用的范围更广（与直线方程相联系）

（4）$|k|$ 越大，直线越陡峭

（5）倾斜角 α 与斜率 k 的关系



当 $k=0$ 时，直线平行于轴或与轴重合；

当 $k>0$ 时，直线的倾斜角为锐角，倾斜角随 k 的增大而增大；

当 $k<0$ 时，直线的倾斜角为钝角，倾斜角随 k 的增大而增大；

3、过两点的直线斜率公式

已知直线上任意两点，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$ 则 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

（1）直线的斜率是确定的，与所取的点无关.

（2）若 $x_1=x_2$，则直线 AB 的斜率不存在，此时直线的倾斜角为 $90°$

4、三点共线.

两直线 AB，AC 的斜率相等→A、B、C 三点共线；反过来，A、B、C 三点共线，则直线 AB，AC 的斜率相等（斜率存在时）或斜率都不存在.

【诊断自测】过点 $A(2,b)$ 和点 $B(3,-2)$ 的直线的倾斜角为 $135°$，则 b 的值是___.

知识点 2：直线的方程

1、直线的截距

若直线 l 与坐标轴分别交于 $(a,0)$，$(0,b)$，则称 a，b 分别为直线 l 的横截距，纵截距

（1）截距：可视为直线与坐标轴交点的简记形式，其取值可正，可负，可为 0（不要顾名思义误认为与"距离"相关）

（2）横纵截距均为 0 的直线为过原点的非水平非竖直直线

2、直线方程的五种形式

名称	方程	适用范围
点斜式	$y-y_1=k\left(x-x_1\right)$	不含垂直于 x 轴的直线
斜截式	$y=kx+b$	不含垂直于 x 轴的直线
两点式	$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$	不含直线 $x=x_1(x_1\neq x_2)$ 和直线 $y=y_1(y_1\neq y_2)$
截距式	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$	不含垂直于坐标轴和过原点的直线
一般式	$Ax+By+C=0$ $(A^2+B^2\neq 0)$	平面直角坐标系内的直线都适用

3、求曲线（或直线）方程的方法：

在已知曲线类型的前提下，求曲线（或直线）方程的思路通常有两种：

（1）直接法：寻找决定曲线方程的要素，然后直接写出方程，例如在直线中，若用直接法则需找到两个点，或者一点一斜率

（2）间接法：若题目条件与所求要素联系不紧密，则考虑先利用待定系数法设出曲线方程，然后再利用条件解出参数的值（通常条件的个数与所求参数的个数一致）

4、线段中点坐标公式

若点 P_1，P_2 的坐标分别为 $(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$ 且线段 P_1P_2 的中点 M 的坐标为 $(x，y)$，则 $\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2} \end{cases}$，此公式为线段 P_1P_2 的中点坐标公式.

5、两直线的夹角公式

若直线 $y=k_1x+b_1$ 与直线 $y=k_2x+b_2$ 的夹角为 α，则 $\tan\alpha=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$.

【诊断自测】过点 $P(1,2)$ 引直线，使 $A(2,3)$，$B(4,-5)$ 两点到直线的距离相等，则这条直线的方程是（　）

A. $3x+2y-7=0$　　　　B. $x+2y-5=0$

C. $3x+2y-7=0$ 或 $4x+y-6=0$　　　　D. $3x+2y-7=0$ 或 $x+2y-5=0$

题型洞察

题型一：倾斜角与斜率的计算

【典例 1-1】直线 $x\cdot\tan\dfrac{\pi}{5}+y-2=0$ 的倾斜角为______.

【典例 1-2】（2024·上海青浦·二模）已知直线 l_1 的倾斜角比直线 $l_2:y=x\tan 80°$ 的倾斜角小 $20°$，则 l_1 的斜率为______.

【方法技巧】

正确理解倾斜角的定义，明确倾斜角的取值范围，熟记斜率公式 $k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$，根据该公式求出经过两点的直线斜率，当 $x_1=x_2,y_1\neq y_2$ 时，直线的斜率不存在，倾斜角为 $90°$，求斜率可用 $k=\tan\alpha(\alpha\neq 90°)$，其中 α 为倾斜角，由此可见倾斜角与斜率相互关联，不可分割．牢记“斜率变化分两段，$90°$ 是其分界，遇到斜率要谨记，存在与否要讨论”．这可通过画正切函数在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 上的图像来认识.

【变式 1-1】（2024·河南信阳·二模）已知直线 $2x-y+1=0$ 的倾斜角为 α，则 $\tan 2\alpha$ 的值是_____.

【变式 1-2】若过点 $M(-2,m)$，$N(m,4)$ 的直线的斜率等于 1，则 m 的值为_____.

【变式 1-3】若过点 $A(3,4)$，$Q(6,3a)$ 的直线的倾斜角为锐角，则实数 a 的取值范围为___.

【变式 1-4】（2024·重庆·重庆南开中学校考模拟预测）已知直线 l 的一个方向向量为 $\vec{p}=\left(\sin\frac{\pi}{3},\cos\frac{\pi}{3}\right)$，则直线 l 的倾斜角为（　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{4\pi}{3}$

题型二：三点共线问题

【典例 2-1】若点 $A(3,1)$、$B(-2,k)$、$C(8,11)$ 在同一直线上，则实数 k 的值为_____.

【典例 2-2】若三点 $A(3,3)$，$B(a,0)$，$C(0,b)$ (其中 $a\cdot b\neq 0$)共线，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=$____.

【方法技巧】

斜率是反映直线相对于 轴正方向的倾斜程度的，直线上任意两点所确定的方向不变，即在同一直线上任意不同的两点所确定的斜率相等．这正是利用斜率可证三点共线的原因．

【变式 2-1】若三点 $A(-2,3),B(3,-2),C(\frac{1}{2},m)$ 共线，则 m 的值为_____.

【变式 2-2】数学家欧拉 1765 年在其所著的《三角形几何学》一书中提出：任意三角形的外心、重心、垂心在同一条直线上，后人称这条直线为欧拉线.已知 $\triangle ABC$ 的顶点分别为 $A(3,1)$，$B(4,2)$，$C(2,3)$，则 $\triangle ABC$ 的欧拉线方程为_____.

【变式 2-3】已知 $A\left(2m,\frac{5}{2}\right)$，$B(4,-1)$，$C(-4,-m)$ 三点在同一条直线上，则实数 m 的值为___.

【变式 2-4】已知 $A(2m,2),B(4,-1),C(-4,-m)$ 三点在同一条直线上，则实数 m 的值为__.

题型三：过定点的直线与线段相交问题

【典例 3-1】已知 $A(2,3)$，$B(-1,2)$，若点 $P(x,y)$ 在线段AB上，则 $\frac{y}{x-3}$ 的取值范围是____.

【典例 3-2】已知点 $A(-1,-1),B(2,4),C(4,1)$,过点 A 的直线 l 与线段 BC 相交，则直线 l 的斜率 k 的取值范围是___.

【方法技巧】

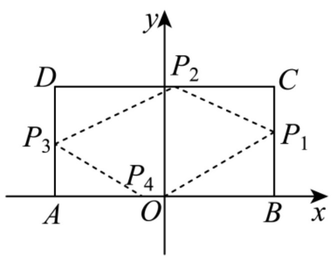
一般地，若已知 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),P(x_0,y_0)$，过 P 点作垂直于 x 轴的直线 l'，过 P 点的任一直线 l 的斜率为 k，则当 l' 与线段 AB 不相交时，k 夹在 k_{PA} 与 k_{PB} 之间；当 l' 与线段 AB 相交时，k 在 k_{PA} 与 k_{PB} 的两边.

【变式 3-1】已知点 $A(3,1)$，$B(-4,-1)$，直线 l 是过点 $P(-2,3)$ 且与线段 AB 相交且斜率存在，则 l 的斜率 k 的取值范围是

【变式 3-2】已知曲线 $y=-2x^2+7x+3(1\le x\le 3)$，则 $\frac{y}{x-2}$ 的取值范围是_____.

【变式 3-3】已知直线 $l:(m+2)x-(m+1)y-m-1=0$，若直线 l 与连接 $A(-1,0),B(2,1)$ 两点的线段总有公共点，则直线 l 的倾斜角范围是___.

【变式 3-4】一质点在矩形 $ABCD$ 内运动，从 AB 的中点 O 沿一确定方向发射该质点，依次由线段 BC、CD、DA 反射.反射点分别为 P_1、P_2、P_3（入射角等于反射角），最后落在线段 OA 上的 P_4（不包括端点）.若 $A(-1,0)$、$B(1,0)$、$C(1,1)$ 和 $D(-1,1)$，则 OP_1 的斜率的取值范围是____.



【变式 3-5】已知直线 $kx-y-k-1=0$ 和以 $M(-3,1),N(3,2)$ 为端点的线段相交，则实数 k 的取值范围为_____.

题型四：直线的方程

【典例 4-1】已知ΔABC为等腰直角三角形，C为直角顶点，AC中点为$D(0,2)$，斜边上中线CE所在直线方程为$3x+y-7=0$，且点C的纵坐标大于点E的纵坐标，则AB所在直线的方程为____________.

【典例 4-2】已知直线过点$(2,3)$，它在x轴上的截距是在y轴上的截距的 2 倍，则此直线的方程为 _.

【方法技巧】

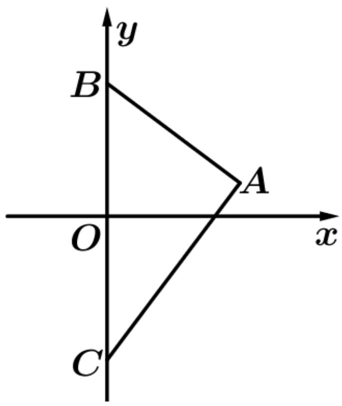
要重点掌握直线方程的特征值（主要指斜率、截距）等问题；熟练地掌握和应用直线方程的几种形式，尤其是点斜式、斜截式和一般式.

【变式 4-1】已知点$A(2,3),B(3,1)$，直线$x-2y+4=0$与y轴相交于点C，则$\vee ABC$中，AB边上的高CE所在直线的方程是___.

【变式 4-2】已知$\vee ABC$的顶点$A(-6,0)$，$B(0,6)$，其外心（外接圆圆心）、重心（三条中线交点）、垂心（三条高线点）在同一条直线上，且这条直线的方程为$x-y+3=0$，则顶点C的坐标是____.

【变式 4-3】若$\triangle ABC$的顶点A（5，1），AB边上的中线CM所在直线方程为$2x-y-5=0$，AC边上的高BH所在直线方程为$x-2y-5=0$，则直线BC的方程为____.

【变式 4-4】如图，在$\vee ABC$中，AC，AB所在直线方程分别为$4x-3y-13=0$和$3x+4y-16=0$，则$\angle A$的角平分线所在直线的方程为（　）



A．$x-7y+3=0$　B．$7x+y-29=0$　C．$x-y+3=0$　D．$x+y-5=0$

【变式 4-5】已知$\triangle ABC$的顶点$A\left(5,5\right)$，AB边上的中线所在直线方程为$x-5y+6=0$，AC

边上的高所在直线方程为$3x+2y-7=0$，则BC所在直线的方程为（　　）

A．$x+2y+1=0$　　B．$x-2y+3=0$

C．$x-2y-5=0$　　D．$x+2y-1=0$

题型五：直线与坐标轴围成的三角形问题

【典例 5-1】在平面直角坐标系中，已知射线$OA: x-y=0\left(x\geq 0\right)$，过点$P(3,1)$作直线分别交射线$OA$、$x$轴正半轴于点$A$、$B$.

(1)当AB的中点为P时，求直线AB的一般式方程；

(2)求$\triangle OAB$面积的最小值.

【典例 5-2】已知直线l过点$P\left(-2,1\right)$.

(1)若直线l与直线$2x+3y+5=0$垂直，求直线l的方程；

(2)若直线l分别与x轴的正半轴，y轴的正半轴交于A、B两点，O为原点.若$\vee AOB$的面积为$\frac{1}{2}$，求直线l的方程.

【方法技巧】

（1）由于已知直线的倾斜角（与斜率有关）及直线与坐标轴围成的三角形的面积（与截距有关），因而可选择斜截式直线方程，也可选用截距式直线方程，故有“题目决定解法”之说.

（2）在求直线方程时，要恰当地选择方程的形式，每种形式都具有特定的结论，所以根据已知条件恰当地选择方程的类型往往有助于问题的解决．例如：已知一点的坐标，求过这点的直线方程，通常选用点斜式，再由其他条件确定该直线在y轴上的截距；已知截距或两点，选择截距式或两点式．在求直线方程的过程中，确定的类型后，一般采用待定系数法求解，但要注意对特殊情况的讨论，以免遗漏.

【变式 5-1】过点$P\left(-1,-2\right)$的直线l可表示为$m\left(x+1\right)+n\left(y+2\right)=0$，若直线$l$与两坐标轴围成三角形的面积为6，则这样的直线有（　　）

A．1 条　　　　B．2 条　　　　C．3 条　　　　D．4 条

【变式 5-2】已知直线 $l_1: ax-2y-2a+4=0$ 和直线 $l_2: 2x-\left(1-a^2\right)y-2-2a^2=0$，当实数 a 的值在区间 $(0,2)$ 内变化时，

(1)求证直线 l_2 恒过定点，并指出此定点的坐标.

(2)求直线 l_1, l_2 与两坐标轴的正半轴围成的四边形面积的最小值.

【变式 5-3】（2024·高二单元测试）已知直线 l 过点 $P(4,3)$，与 x 轴正半轴交于点 A、与 y 轴正半轴交于点 B.

（1）求 $\triangle OAB$ 面积最小时直线 l 的方程（其中 O 为坐标原点）;

（2）求 $|PA|\cdot|PB|$ 的最小值及取得最小值时 l 的直线方程.

【变式 5-4】（2024·河南郑州·高二宜阳县第一高级中学校联考阶段练习）已知直线 $l: kx-y+2+3k=0$ 经过定点 P.

(1)证明：无论 k 取何值，直线 l 始终过第二象限;

(2)若直线 l 交 x 轴负半轴于点 A，交 y 轴正半轴于点 B，当 $\frac{1}{2}|PA|+\frac{1}{3}|PB|$ 取最小值时，求直线 l 的方程.

【变式 5-5】（2024·江苏宿迁·高二泗阳县实验高级中学校考阶段练习）已知直线 l 过定点 $P(-2,1)$，且交 x 轴负半轴于点 A、交 y 轴正半轴于点 B．点 O 为坐标原点.

（1）若 $\triangle AOB$ 的面积为 4，求直线 l 的方程;

（2）求$|OA|+|OB|$的最小值，并求此时直线l的方程；

（3）求$|PA|\cdot|PB|$的最小值，并求此时直线l的方程.

【变式 5-6】已知直线$l: kx-y+1+2k=0$.

(1)当$k=1$时，求直线l与直线$2x+y-1=0$的交点坐标；

(2)若直线l交x轴负半轴于点A，交y轴正半轴于点B.

①$\triangle AOB$的面积为S，求S的最小值和此时直线l的方程；

②已知点$P(-2,1)$，当$PA+\frac{1}{2}PB$取最小值时，求直线l的方程.

题型六：两直线的夹角问题

【典例 6-1】如果直线l_1与l_2的斜率分别是一元二次方程$x^2-4x+1=0$的两个根，那么两直线的夹角为___.

【典例 6-2】（2024·上海长宁·二模）直线$2x-y-3=0$与直线$x-3y-5=0$的夹角大小为____.

【方法技巧】

若直线$y=k_1x+b_1$与直线$y=k_2x+b_2$的夹角为α，则$\tan\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$.

【变式 6-1】当$m=$___时，直线$\sqrt{3}x-y-6=0$与直线$mx-y+3=0$的夹角为60°.

【变式 6-2】（2024·广东·模拟预测）在平面直角坐标系中，等边三角形ABC的边AB所在直线斜率为$2\sqrt{3}$，则边AC所在直线斜率的一个可能值为______.

【变式 6-3】（2024·高三·上海浦东新·期末）直线 $x-\sqrt{3}y+2=0$ 与直线 $\sqrt{3}x+2y=1$ 所成夹角的余弦值等于

【变式 6-4】（2024·全国·模拟预测）已知等腰三角形两腰所在直线的方程分别为 $x+y-1=0$ 与 $x-7y-4=0$，原点在等腰三角形的底边上，则底边所在直线的斜率为______.

【变式 6-5】直线 $l_1:2x-y+1=0$ 与直线 $l_2:x+2y+1=0$ 的夹角为_______.

题型七：直线过定点问题

【典例 7-1】不论 k 为任何实数，直线 $(2k-1)x-(k+3)y-(k-11)=0$ 恒过定点，若直线 $mx+ny=2$ 过此定点其 m，n 是正实数，则 $\frac{3}{m}+\frac{1}{2n}$ 的最小值是___.

【典例 7-2】不论 m，n 取什么值，直线 $(3m-n)x+(m+2n)y-n=0$ 必过一定点为_____.

【方法技巧】

合并参数

【变式 7-1】直线 $(m-1)x+(2m-1)y=m-3(m\in \mathbf{R})$ 恒过定点

【变式 7-2】直线 $l_1:x+(m+1)y-2m-2=0$ 与直线 $l_2:(m+1)x-y-2m-2=0$ 相交于点 P，对任意实数 m，直线 l_1，l_2 分别恒过定点 A，B，则 $|PA|+|PB|$ 的最大值为_______.

【变式 7-3】已知函数 $f(x)=a^{x-2}+1(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 过定点 A，直线 $kx-y+2k-1=0$ 过定点 B，则 $|AB|=$

题型八：中点公式

【典例 8-1】若直线 l 与两坐标轴的交点分别为 A，B，且线段 AB 的中点为 $(3,1)$，则直线 l 的方程为：___.

【典例 8-2】过点（3，2）的直线 l，被直线 $l_1:2x-5y+9=0$，$l_2:2x-5y-7=0$ 所截得的线段 AB

的中点恰好在直线$x-4y-1=0$上，则直线l的方程为_____.

【方法技巧】

若点P_1，P_2的坐标分别为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$且线段P_1P_2的中点M的坐标为$(x，y)$，则$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2} \end{cases}$

【变式 8-1】已知直线l与直线$l_1:2x-y+2=0$和$l_2:x+y-4=0$的交点分别为A,B，若点$P(2,0)$是线段AB的中点，则直线AB的方程为____.

【变式 8-2】过点$(2,3)$的直线L被两平行直线$L_1:2x-5y+9=0$与$L_2:2x-5y-7=0$所截线段AB的中点恰在直线$x-4y-1=0$上，则直线L的方程是_____.

【变式 8-3】已知点A，B分别是直线$x+2y+4=0$和直线$x+2y-10=0$上的点，点P为AB的中点，设点P的轨迹为曲线C.

（1）求曲线C的方程；

（2）过点$D(-2,1)$的直线l与曲线C，x轴分别交于点M，N，若点D为MN的中点，求直线l的方程.

【变式 8-4】已知直线$(1-a)x+(1+a)y+3a-3=0(a\in\mathbf{R})$.

(1)求证：直线经过定点，并求出定点P；

(2)经过点P有一条直线l，它夹在两条直线$l_1:2x-y-2=0$与$l_2:x+y+3=0$之间的线段恰被P平分，求直线l的方程.

题型九：轨迹方程

【典例 9-1】（2024·高三·全国·课后作业）若过点$P(1,1)$且互相垂直的两条直线l_1,l_2分别与x轴、y轴交于A、B两点，则AB中点M的轨迹方程为___.

【典例 9-2】在平面直角坐标系中，O为坐标原点，已知点$A(1,2),B(4,7)$，若点C满足$\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$（$\alpha$、$\beta\in\mathrm{R}$，且$\alpha+\beta=1$），则点$C$的轨迹方程为____.

【方法技巧】

（1）直接法：寻找决定曲线方程的要素，然后直接写出方程，例如在直线中，若用直接法则需找到两个点，或者一点一斜率

（2）间接法：若题目条件与所求要素联系不紧密，则考虑先利用待定系数法设出曲线方程，然后再利用条件解出参数的值（通常条件的个数与所求参数的个数一致）

【变式 9-1】已知$A(1,0),M(-1,-2)$，点B在直线$2x-y+1=0$上运动，$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$，则点$P$的轨迹方程是____.

【变式 9-2】已知$▱ABCD$的顶点A、C的坐标分别为$\left(3,-1\right)$、$\left(2,-3\right)$，顶点D在直线$3x-y+1=0$上移动，则顶点B的轨迹方程为___.

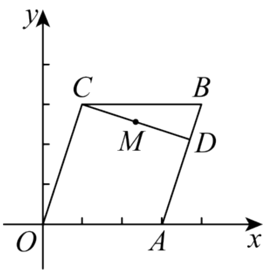
【变式 9-3】已知$M\left(x,y\right)$满足方程$|x-2y+3|=\sqrt{5(x+1)^2+5(y-1)^2}$，则$M$的轨迹为（　）

A．直线　　B．椭圆

C．双曲线　　D．抛物线

【变式 9-4】在平面直角坐标系中，已知$\triangle ABC$的顶点坐标分别为$A\left(2,3\right)$、$B\left(1,-1\right)$、$C\left(5,1\right)$，点P在直线BC上运动，动点Q满足$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$，求点$Q$的轨迹方程.

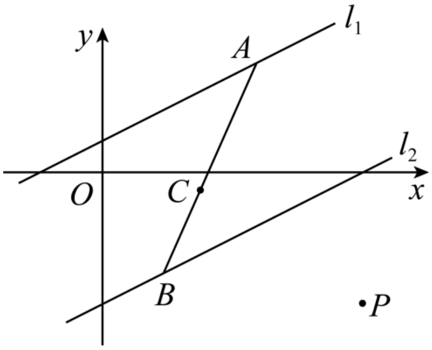
【变式 9-5】（2024·安徽蚌埠·三模）如图，在平行四边形$OABC$中，点O是原点，点A和点C的坐标分别是$\left(3,0\right)$、$\left(1,3\right)$，点D是线段AB上的动点.



(1)求AB所在直线的一般式方程；

(2)当D在线段AB上运动时，求线段CD的中点M的轨迹方程.

【变式 9-6】如图，已知点A是直线$l_1: x-2y+1=0$上任意一点，点B是直线$l_2: x-2y-4=0$上任意一点，连接AB，在线段AB上取点C使得$2\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{BC}$.



(1)求动点C的轨迹方程；

(2)已知点$P(4,-2)$，是否存在点C，使得$|PC|=3$？若存在，求出点C的坐标；若不存在，说明理由.

04

真题练习·命题洞见

1.（2008年普通高等学校招生考试数学（文）试题（四川卷））直线$y=3x$绕原点逆时针旋转$90°$，再向右平移1个单位，所得到的直线为（　）

A．$y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$　　B．$y=-\frac{1}{3}x+1$　　C．$y=3x-3$　　D．$y=3x+1$

2.（2002年普通高等学校春季招生考试数学（文）试题（北京卷））到两坐标轴距离相等的点的轨迹方程是（　）

A．$x-y=0$　　B．$x+y=0$　　C．$|x|-y=0$　　D．$|x|-|y|=0$

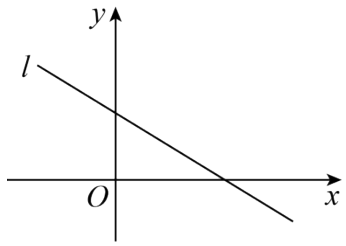
3.（2004年普通高等学校招生考试数学（文）试题（湖北卷））已知点$M_1(6,2)$和$M_2(1,7)$．直线$y=mx-7$与线段M_1M_2的交点M分有向线段M_1M_2的比为$3:2$，则m的值为（　）

A．$-\frac{3}{2}$　　B．$-\frac{2}{3}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．4

4．（2004年普通高等学校招生考试数学（文）试题（浙江卷））直线$y=2$与直线$x+y-2=0$的夹角是（　　）

A．$\frac{\pi}{4}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{\pi}{2}$　　D．$\frac{3\pi}{4}$

5．（2020年山东省春季高考数学真题）已知直线$l:y=x\sin\theta+\cos\theta$的图像如图所示，则角$\theta$是（　　）



A．第一象限角　B．第二象限角　C．第三象限角　D．第四象限角

05 课本典例·高考素材

1．判断$A(1,3)$，$B(5,7)$，$C(10,12)$三点是否共线，并说明理由．

2．菱形的两条对角线分别位于x轴和y轴上，其长度分别为8和6，求菱形各边所在直线的方程．

3．求经过点$P(2,3)$，并且在两坐标轴上的截距相等的直线的方程．

4．求直线$Ax+By+C=0$（A，B不同时为0）的系数A，B，C分别满足什么关系时，这条直线有以下性质：

（1）与两条坐标轴都相交；

（2）只与 x 轴相交；

（3）只与 y 轴相交；

（4）是 x 轴所在的直线；

（5）是 y 轴所在的直线.

5．画出直线 $l:2x-y+3=0$，并在直线 l 外取若干点，将这些点的坐标代入 $2x-y+3$，求它的值；观察有什么规律，并把这个规律表示出来.

06 易错分析 · 答题模板

易错点：错误理解斜率与倾斜角间的关系

易错分析： 斜率与倾斜角是直线在平面几何中的两个重要属性，它们之间存在紧密的关系，但也容易被误解。斜率表示直线的倾斜程度，是纵坐标差与横坐标差之商；而倾斜角则是直线与 x 轴正方向之间的夹角。误解常在于将斜率与倾斜角的正弦值混淆，或忽视了斜率不存在（即直线垂直于 x 轴）时倾斜角为 90 度这一特殊情况。

【易错题 1】若经过两点 $A(4，2y+1)$，$B(2，-3)$的直线的倾斜角是直线 $4x-3y+2\,019=0$ 的倾斜角的一半，则 y 的值为____.

【易错题 2】直线 $\left(1-a^2\right)x+y+1=0$ 的倾斜角的取值范围是（　）

A．$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$　　　　B．$\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$

C．$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$　　　　D．$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$

答题模板：求斜率的取值范围

1、模板解决思路

求解斜率的取值范围问题时，通常的做法是先通过关键点计算出相关的斜率值，这些值往往作为临界值存在。接着，结合图形的直观分析，判断斜率的取值范围是位于这些临界值的中间区域，还是分布在临界值的两侧。简而言之，就是先找临界斜率，再结合图形确定取值范围是居中还是分居两侧。

2、模板解决步骤

第一步：确定直线与几何图形有公共点的边界点.

第二步：求出已知点与边界点所在直线的斜率.

第三步：分析直线的变化范围，写出直线的斜率的取值范围.

【经典例题1】已知两点 $A\left(-3,2\right)$，$B(2,1)$，过点 $P\left(0,-1\right)$ 的直线 l 与线段 AB（含端点）有交点，则直线 l 的斜率的取值范围为（　）

A. $\left(-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right)$　　B. $[-1,1]$　　C. $\left(-\infty,-\frac{1}{5}\right]\cup\left[1,+\infty\right)$　D. $\left[-\frac{1}{5},1\right]$

【经典例题2】已知直线 $kx-y+2=0$ 和以 $M\left(3,-2\right)$，$N\left(2,5\right)$ 为端点的线段相交，则实数 k 的取值范围为（　）

A. $\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right]$　　B. $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$

C. $\left[-\frac{4}{3},\frac{3}{2}\right]$　　D. $\left(-\infty,\frac{4}{3}\right]\cup\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$

第01讲　直线的方程

目录

01

考情透视·目标导航

考点要求	考题统计	考情分析
（1）直线的倾斜角与斜率 （2）直线的方程	2008 年江苏卷第 9 题，5 分 2006 年上海卷第 11 题，4 分	高考对直线方程的考查比较稳定，考查内容、频率、题型难度均变化不大，备考时应熟练掌握直线的倾斜角与斜率、直线方程的求法等，特别要重视直线方程的求法.

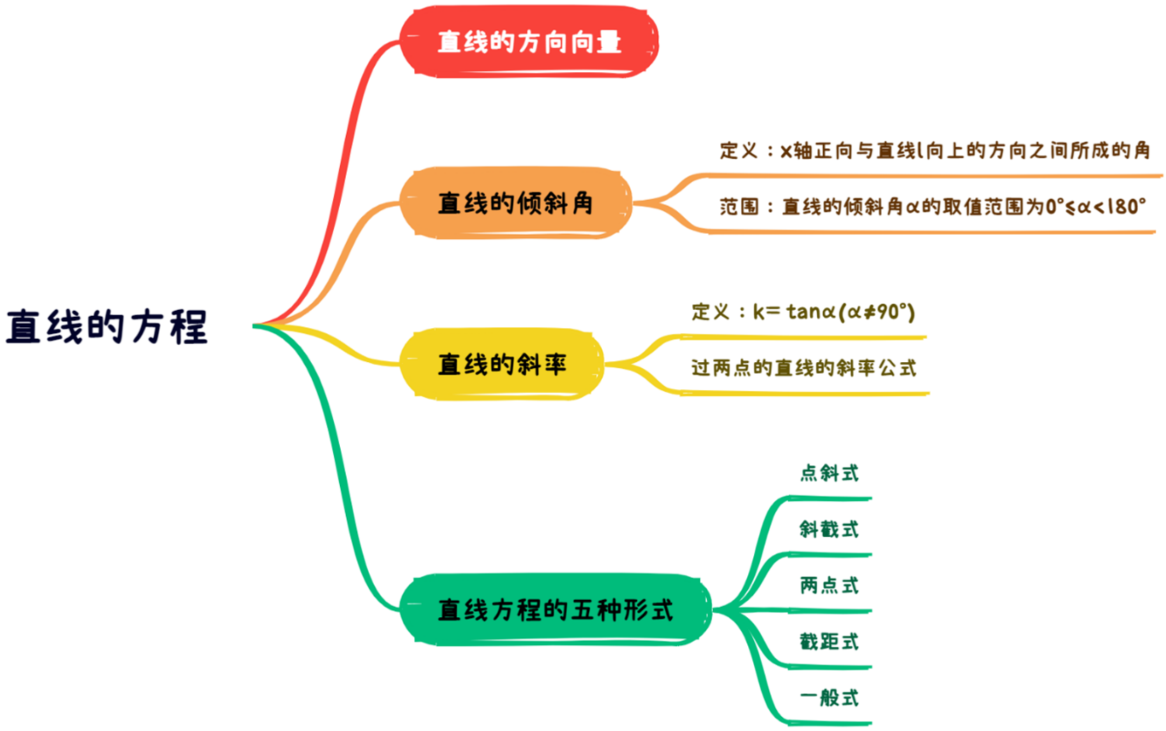
复习目标：

（1）理解直线的倾斜角和斜率的概念，掌握过两点的直线斜率的计算公式.

（2）根据确定直线位置的几何要素，掌握直线方程的几种形式(点斜式、两点式及一般式).

02

知识导图·思维引航



直线的方程
直线的方向向量
直线的倾斜角
定义：x轴正向与直线l向上的方向之间所成的角
范围：直线的倾斜角α的取值范围为0°≤α<180°
直线的斜率
定义：k= tanα(α≠90°)
过两点的直线的斜率公式
直线方程的五种形式
点斜式
斜截式
两点式
截距式
一般式

03

考点突破·题型探究

知识固本

知识点 1：直线的倾斜角和斜率

1、直线的倾斜角

若直线 l 与 x 轴相交，则以 x 轴正方向为始边，绕交点逆时针旋转直至与 l 重合所成的角称为直线 l 的倾斜角，通常用 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 表示

（1）若直线与 x 轴平行（或重合），则倾斜角为 0

（2）倾斜角的取值范围 $\alpha\in[0，\pi)$

2、直线的斜率

设直线的倾斜角为 α，则 α 的正切值称为直线的斜率，记为 $k=\tan\alpha$

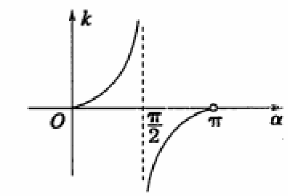
（1）当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 时，斜率不存在；所以竖直线是不存在斜率的

（2）所有的直线均有倾斜角，但是不是所有的直线均有斜率

（3）斜率与倾斜角都是刻画直线的倾斜程度，但就其应用范围，斜率适用的范围更广（与直线方程相联系）

（4）$|k|$ 越大，直线越陡峭

（5）倾斜角 α 与斜率 k 的关系



当 $k=0$ 时，直线平行于轴或与轴重合；

当 $k>0$ 时，直线的倾斜角为锐角，倾斜角随 k 的增大而增大；

当 $k<0$ 时，直线的倾斜角为钝角，倾斜角随 k 的增大而增大；

3、过两点的直线斜率公式

已知直线上任意两点，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$ 则 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

（1）直线的斜率是确定的，与所取的点无关.

（2）若 $x_1=x_2$，则直线 AB 的斜率不存在，此时直线的倾斜角为 $90°$

4、三点共线.

两直线 AB，AC 的斜率相等→ A、B、C 三点共线；反过来，A、B、C 三点共线，则直线 AB，AC 的斜率相等（斜率存在时）或斜率都不存在.

【诊断自测】过点 $A(2,b)$ 和点 $B(3,-2)$ 的直线的倾斜角为 $135°$，则 b 的值是___.

【答案】-1

【解析】$\because A(2,b)$，$B(3,-2)$，

$\therefore k_{AB}=\dfrac{b+2}{2-3}=-b-2$，则 $-b-2=\tan 135°=-1$，

解得 $b=-1$.

故答案为：-1.

知识点 2：直线的方程

1、直线的截距

若直线 l 与坐标轴分别交于 $(a,0)$，$(0,b)$，则称 a，b 分别为直线 l 的横截距，纵截距

（1）截距：可视为直线与坐标轴交点的简记形式，其取值可正，可负，可为 0（不要顾名思义误认为与“距离”相关）

（2）横纵截距均为 0 的直线为过原点的非水平非竖直直线

2、直线方程的五种形式

名称	方程	适用范围
点斜式	$y-y_1=k\left(x-x_1\right)$	不含垂直于 x 轴的直线
斜截式	$y=kx+b$	不含垂直于 x 轴的直线
两点式	$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$	不含直线 $x=x_1(x_1\neq x_2)$ 和直线 $y=y_1(y_1\neq y_2)$
截距式	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$	不含垂直于坐标轴和过原点的直线
一般式	$Ax+By+C=0$ $(A^2+B^2\neq 0)$	平面直角坐标系内的直线都适用

3、求曲线（或直线）方程的方法：

在已知曲线类型的前提下，求曲线（或直线）方程的思路通常有两种：

（1）直接法：寻找决定曲线方程的要素，然后直接写出方程，例如在直线中，若用直接法则需找到两个点，或者一点一斜率

（2）间接法：若题目条件与所求要素联系不紧密，则考虑先利用待定系数法设出曲线方程，然后再利用条件解出参数的值（通常条件的个数与所求参数的个数一致）

4、线段中点坐标公式

若点 P_1，P_2 的坐标分别为 $(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$ 且线段 P_1P_2 的中点 M 的坐标为 $(x，y)$，则 $\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2} \end{cases}$，此公式为线段 P_1P_2 的中点坐标公式.

5、两直线的夹角公式

若直线 $y=k_1x+b_1$ 与直线 $y=k_2x+b_2$ 的夹角为 α，则 $\tan\alpha=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$.

【诊断自测】过点 $P(1,2)$ 引直线，使 $A(2,3)$，$B(4,-5)$ 两点到直线的距离相等，则这条直线的方程是（　）

A．$3x+2y-7=0$　　　　B．$x+2y-5=0$

C．$3x+2y-7=0$ 或 $4x+y-6=0$　　　　D．$3x+2y-7=0$ 或 $x+2y-5=0$

【答案】B

【解析】设所求的直线为 l，则直线 l 平行于 AB 或直线 l 过线段 AB 的中点，

因为 $A(2,3)$，$B(4,-5)$，所以 $k_{AB}=\dfrac{-5-3}{4-2}=-4$，

所以过点 $P(1,2)$ 且与 AB 平行的直线为：$y-2=-4(x-1)$ 即 $4x+y-6=0$，

因为 $A(2,3)$，$B(4,-5)$，所以线段 AB 的中点为 $(3,-1)$，

所以过点 $P(1,2)$ 与线段 AB 的中点为 $(3,-1)$ 的直线的方程为：$y-2=\dfrac{-1-2}{3-1}\times(x-1)$，

即 $3x+2y-7=0$，

所以这条直线的方程是：$3x+2y-7=0$ 或 $4x+y-6=0$，

故选：C.

题型洞察

题型一：倾斜角与斜率的计算

【典例 1-1】直线 $x\cdot\tan\dfrac{\pi}{5}+y-2=0$ 的倾斜角为______.

【答案】$\dfrac{4\pi}{5}$

【解析】由题意可将原直线方程变形 $y=-\tan\frac{\pi}{5}\cdot x+2=\tan\frac{4\pi}{5}\cdot x+2$，

则直线的斜率为 $\tan\frac{4\pi}{5}$，

由倾斜角的取值范围 $[0,\pi)$，所以倾斜角为 $\frac{4\pi}{5}$.

故答案为：$\frac{4\pi}{5}$.

【典例 1-2】（2024·上海青浦·二模）已知直线 l_1 的倾斜角比直线 $l_2: y = x\tan 80°$ 的倾斜角小 $20°$，则 l_1 的斜率为______.

【答案】$\sqrt{3}$

【解析】由直线 l_2 方程：$y = x\tan 80°$ 得 l_2 的倾斜角为 $80°$，

所以 l_1 的倾斜角为 $60°$，即 l_1 的斜率为 $\tan 60°=\sqrt{3}$.

故答案为：$\sqrt{3}$.

【方法技巧】

正确理解倾斜角的定义，明确倾斜角的取值范围，熟记斜率公式 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$，根据该公式求出经过两点的直线斜率，当 $x_1=x_2, y_1\neq y_2$ 时，直线的斜率不存在，倾斜角为 $90°$，求斜率可用 $k=\tan\alpha(\alpha\neq 90°)$，其中 α 为倾斜角，由此可见倾斜角与斜率相互关联，不可分割．牢记“斜率变化分两段，$90°$ 是其分界，遇到斜率要谨记，存在与否要讨论”．这可通过画正切函数在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上的图像来认识．

【变式 1-1】（2024·河南信阳·二模）已知直线 $2x-y+1=0$ 的倾斜角为 α，则 $\tan 2\alpha$ 的值是_____.

【答案】$-\frac{4}{3}$

【解析】由直线 $2x-y+1=0$ 方程，得直线斜率 $\tan\alpha=2$，

所以 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times 2}{1-2^2}=-\frac{4}{3}$.

故答案为：$-\frac{4}{3}$

【变式 1-2】若过点 $M(-2,m)$，$N(m,4)$ 的直线的斜率等于 1，则 m 的值为_____.

【答案】1

【解析】由已知可得 $m\neq -2$，

过点 $M(-2,m)$，$N(m,4)$ 的直线的斜率 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-m}{m+2}=1$，

解得 $m=1$，

故答案为：1.

【变式 1-3】若过点 $A(3,4)$，$Q(6,3a)$ 的直线的倾斜角为锐角，则实数 a 的取值范围为___.

【答案】$\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$

【解析】因为直线 AQ 的斜率 $k=\frac{3a-4}{6-3}=a-\frac{4}{3}$，

又因为直线 AQ 的倾斜角为锐角，

所以 $a-\frac{4}{3}>0$，解得 $a>\frac{4}{3}$.

故答案为：$\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$

【变式 1-4】（2024·重庆·重庆南开中学校考模拟预测）已知直线 l 的一个方向向量为 $\vec{p}=\left(\sin\frac{\pi}{3},\cos\frac{\pi}{3}\right)$，则直线 l 的倾斜角为（　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{4\pi}{3}$

【答案】A

【解析】由题意可得：直线 l 的斜率 $k=\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan\frac{\pi}{6}$，即直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$.

故选：A

题型二：三点共线问题

【典例 2-1】若点 $A(3,1)$、$B(-2,k)$、$C(8,11)$ 在同一直线上，则实数 k 的值为_____.

【答案】-9

【解析】因为三点 $A(3,1)$、$B(-2,k)$、$C(8,11)$ 在同一直线上，

$\therefore AB$ 的斜率和 AC 的斜率相等，

即 $\frac{k-1}{-2-3}=\frac{11-1}{8-3}$，

$\therefore k=-9$.

故答案为：-9.

【典例 2-2】若三点 $A(3,3)$，$B(a,0)$，$C(0,b)$（其中 $a\cdot b\neq 0$）共线，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=$____.

【答案】$\frac{1}{3}$

【解析】由于 $A(3,3)$，$B(a,0)$，$C(0,b)$ 三点共线且 $a\neq 0$、$b\neq 0$，

显然 AB 、 AC 的斜率存在，则 $k_{AB}=k_{AC}$，

所以 $\frac{0-3}{a-3}=\frac{b-3}{0-3}$，所以 $ab=3a+3b$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{3}$.

故答案为：$\frac{1}{3}$

【方法技巧】

斜率是反映直线相对于 轴正方向的倾斜程度的，直线上任意两点所确定的方向不变，即在同一直线上任意不同的两点所确定的斜率相等．这正是利用斜率可证三点共线的原因．

【变式 2-1】若三点 $A(-2,3),B(3,-2),C(\frac{1}{2},m)$ 共线，则 m 的值为______.

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】依题意有 $k_{AB}=k_{AC}$，即 $\frac{-5}{5}=\frac{m-3}{\frac{1}{2}+2}$，解得 $m=\frac{1}{2}$.

【变式 2-2】数学家欧拉 1765 年在其所著的《三角形几何学》一书中提出：任意三角形的外心、重心、垂心在同一条直线上，后人称这条直线为欧拉线.已知$\vee ABC$ 的顶点分别为 $A(3,1)$，$B(4,2)$，$C(2,3)$，则$\vee ABC$ 的欧拉线方程为______.

【答案】$x+y-5=0$

【解析】由题可知，$\vee ABC$ 的重心为 $G(3,2)$，

可得直线 AB 的斜率为 $\frac{1-2}{3-4}=1$，则 AB 边上高所在的直线斜率为 -1，

则方程为 $y-3=-(x-2)$，即 $x+y-5=0$，

直线 AC 的斜率为 $\frac{3-1}{2-3}=-2$，则 AC 边上高所在的直线斜率为 $\frac{1}{2}$，

则方程为 $y-2=\frac{1}{2}(x-4)$，即 $x-2y=0$，

联立方程 $\begin{cases}x+y-5=0\\x-2y=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=\frac{10}{3}\\y=\frac{5}{3}\end{cases}$，即$\vee ABC$ 的垂心为 $H\left(\frac{10}{3},\frac{5}{3}\right)$，

则直线 GH 斜率为 $\frac{2-\frac{5}{3}}{3-\frac{10}{3}}=-1$，则可得直线 GH 方程为 $y-2=-(x-3)$，

故$\vee ABC$ 的欧拉线方程为 $x+y-5=0$.

故答案为：$x+y-5=0$.