【备战 2013 高考数学专题讲座】

第 27 讲：高频考点分析之概率与统计探讨

1～2 讲，我们对客观性试题解法进行了探讨，3～8 讲，对数学思想方法进行了探讨，9～12 讲对数学解题方法进行了探讨，第 13 讲～第 28 讲我们对高频考点进行探讨。

概率与统计试题是高考的必考内容。它是以实际应用问题为载体，以排列组合和概率统计等知识为工具，以考查对概率事件的判断识别及其概率的计算和随机变量概率分布列性质及其应用为目标的中档题，概率应用题侧重于分布列与期望，应用题近几年的高考有以概率应用题替代传统应用题的趋势。

结合 2012 年全国各地高考的实例，我们从以下五方面探讨概率与统计问题的求解：

1. 传统概率的计算；

4. 独立事件概率的计算；

5. 离散型随机变量概率列和数学期望计算；

6. 样本抽样方法；

7. 统计量的分析和计算。

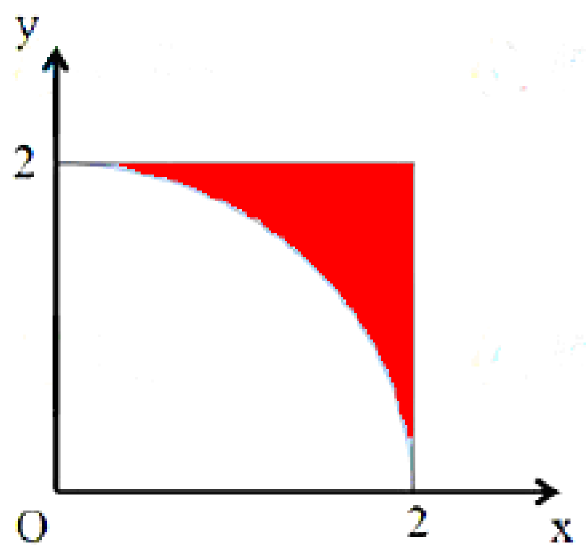
一、传统概率的计算：

典型例题：例 1. （2012 年北京市理 5 分）设不等式组 $\begin{cases} 0 \quad x \quad 2 \\ 0 \quad y \quad 2 \end{cases}$ 表示的平面区域为 D，在区域 D 内随机取一个点。则此点到坐标原点的距离大于 2 的概率是【　　】

A. $\frac{\ }{4}$　　B. $\frac{\ \ 2}{2}$　　C. $\frac{\ }{6}$　　D. $\frac{4\ \ }{4}$

【答案】 D。

【考点】几何概率。



【解析】不等式组 $\begin{cases} 0 \quad x \quad 2 \\ 0 \quad y \quad 2 \end{cases}$ 表示的平面区域 D 是一个边长为 2 的正方形，如画图可知，区域内到坐标原点的距离大于 2 的点为红色区域，它的面积为正方形的面积减四分之一圆的面积：$2^2 \quad \frac{1}{4} \quad 2^2 = 4 \quad$ 。

∴此点到坐标原点的距离大于 2 的概率是 $\frac{4\ \ }{4}$。故选 D。

例 2. （2012 年安徽省文 5 分）袋中共有 6 个除了颜色外完全相同的球，其中有 1 个红球，2 个白球和 3 个黑球，从袋中任取两球，两球颜色为一白一黑的概率等于【　　】

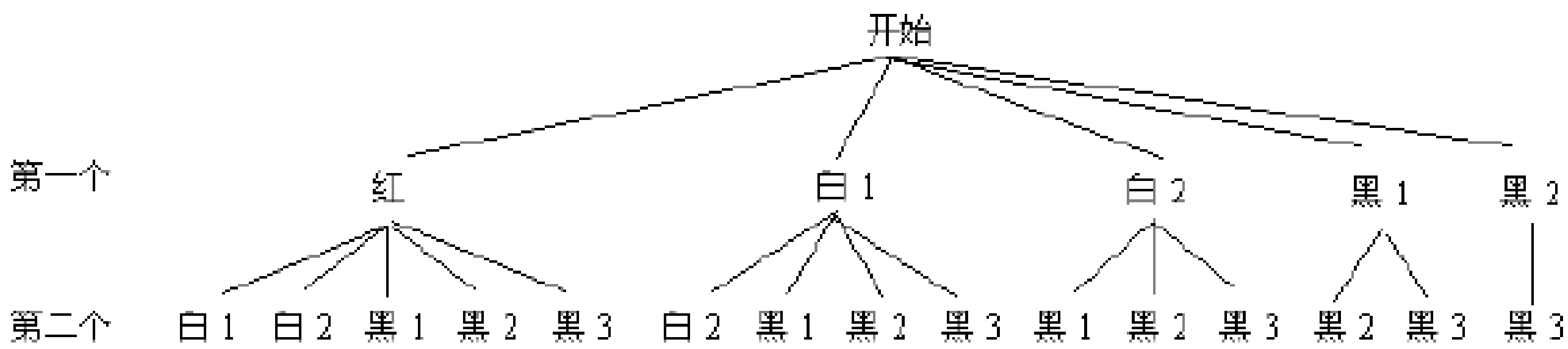
(A) $\frac{1}{5}$　　(B) $\frac{2}{5}$　　(C) $\frac{3}{5}$　　(D) $\frac{4}{5}$

【答案】B 。

【考点】概率。

【解析】1 个红球，2 个白球和 3 个黑球记为红 1，白 1，白 2，黑 1，黑 2，黑 3。

画树状图如下：



从袋中任取两球，共有 15 种等可能结果，满足两球颜色为一白一黑有 6 种，

∴概率等于 $\frac{6}{15}$ $\frac{2}{5}$。故选 B 。

例 3. （2012 年广东省理 5 分）从概率位数与十位数之和为奇数的两位数中任取一个，其个位数为 0 的概率是【　　】

A. $\frac{4}{9}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{9}$　　D. $\frac{1}{9}$

【答案】D。

【考点】分类讨论的思想，概率。

【解析】由题意知，个位数与十位数应该一奇一偶。

①个位数为奇数，十位数为偶数共有 5×5=25 个两位数；

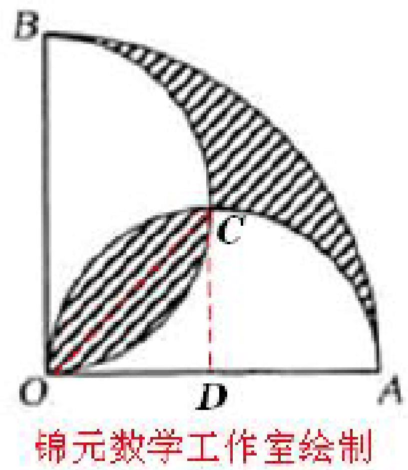
②个位数为偶数，十位数为奇数共有 5×4=20 个两位数。

两类共有 25+20=45 个数，其中个位数为 0，十位数为奇数的有 10,30,50,70,90 共 5 个数。

∴概率位数为 0 的概率是 $\frac{5}{45}=\frac{1}{9}$。故选 D。

例 4. （2012 年湖北省理 5 分）如图，在圆心角为直角的扇形 OAB 中，分别以 OA，OB 为直径作两个半圆。在扇形 OAB 内随机取一点，则此点取自阴影部分的概率是【　　】

A. $1\ \frac{2}{\ }$　　　B. $\frac{1}{2}\ \frac{1}{\ }$　　　C. $\frac{2}{\ }$　　　D. $\frac{1}{\ }$



【答案】A。

【考点】概率，扇形面积，特殊元素法。

【解析】取大圆的半径为 2，则小圆半径为 1，

如图，两个半圆相交的阴影部分是两个弓形，连接 OC，取 OA 的中点 D，连接 CD。

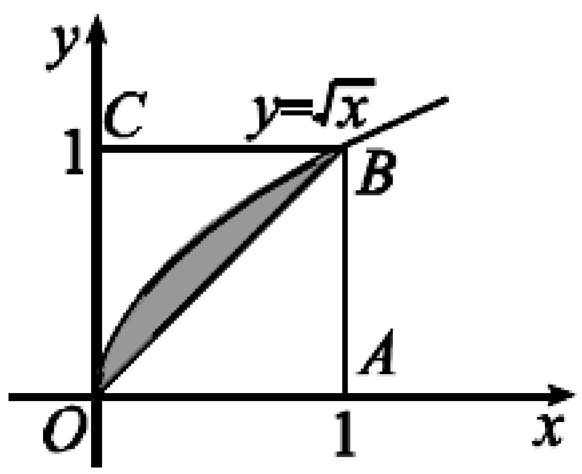
∴两个半圆相交的阴影部分面积为 $2\ \frac{1}{4}\ \ 1^2\ \ \frac{1}{2}\ 1\ 1\ =\frac{1}{2}\ \ 1$。

又∵扇形 OAB 的面积为 $S_{扇}=\frac{1}{4}\ \ 2^2=$ ，

∴阴影部分的面积为 $2\ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ 1\ +\ \frac{1}{2}\ \ 1\ =\ \ 2$。

在扇形 OAB 内随机取一点，则此点取自阴影部分的概率 $P=\frac{\ 2}{\ }=1\ \ \frac{2}{\ }$。故选 A。

例 5. （2012 年福建省理 5 分）如图所示，在边长为 1 的正方形 OABC 中任取一点 P，则点 P 恰好取自阴影部分的概率为【　　】



A. $\frac{1}{4}$　　　B. $\frac{1}{5}$　　　C. $\frac{1}{6}$　　　D. $\frac{1}{7}$

【答案】C。

【考点】定积分的计算，几何概型的计算。

【解析】∵ $S_{阴影}=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，

∴利用几何概型公式得：$P=\frac{S_{阴影}}{S_{正方形}}=\frac{\frac{1}{6}}{1}=\frac{1}{6}$。故选 C。

例 6. （2012 年辽宁省理 5 分）在长为 12cm 的线段 AB 上任取一点 C.现作一矩形，领边长分别等于线段 AC，CB 的长，则该矩形面积小于 32cm^2的概率为【　　】

(A) $\frac{1}{6}$　　　　(B) $\frac{1}{3}$　　　　(C) $\frac{2}{3}$　　　　(D) $\frac{4}{5}$

【答案】C。

【考点】函数模型的应用、不等式的解法、几何概型的计算。

【解析】设线段 AC 的长为 x cm，则线段 CB 的长为 $(12-x)$ cm。那么矩形的面积为 $x(12-x)$ cm^2。

由 $x(12-x)<32$，解得 $x<4$ 或 $x>8$。又 $0<x<12$，所以该矩形面积小于 32cm^2的概率为 $\frac{4+4}{12}=\frac{2}{3}$。故选 C。

例 7. （2012 年辽宁省文 5 分）在长为 12cm 的线段 AB 上任取一点 C. 现作一矩形，邻边长分别等于线段 AC,CB 的长，则该矩形面积大于 20cm^2的概率为【　　】

:(A) $\frac{1}{6}$　　　(B) $\frac{1}{3}$　　　(C) $\frac{2}{3}$　　　(D) $\frac{4}{5}$

【答案】C。

【考点】函数模型的应用、不等式的解法、几何概型的计算

【解析】设线段 AC 的长为 x cm，则线段 CB 的长为 $(12-x)$ cm, 那么矩形的面积为 $x(12-x)$ cm^2，由 $x(12-x)>20$，解得 $2<x<10$。又 $0<x<12$，所以该矩形面积大于 20cm^2的概率为 $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$。故选 C。

例 8. （2012 年上海市文 4 分）三位同学参加跳高、跳远、铅球项目的比赛，若每人都选择其中两个项目，则有且仅有两人选择的项目完全相同的概率是＿▲＿（结果用最简分数表示）.

【答案】$\frac{2}{3}$。

【考点】排列组合概率问题（古典概型）。

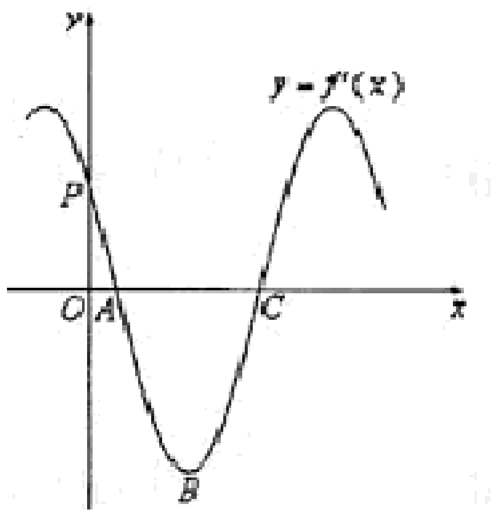
【解析】设概率 p $\frac{m}{n}$，则 n C_3^2 C_3^2 C_3^2 27 。

求 k，分三步：①选二人，让他们选择的项目相同，有 C_3^2 种；②确定上述二人所选择的相同的项目，有 C_3^1 种；③确定另一人所选的项目，有 C_2^1 种. 所以 k C_3^2 C_3^1 C_2^1 18，故 p $\frac{18}{27}$ $\frac{2}{3}$。

例 9. （2012 年湖南省理 5 分）函数 f(x) sin x 的导函数 y f (x) 的部分图像如图所示，其中，P 为图像与 y 轴的交点，A, C 为图像与 x 轴的两个交点，B 为图像的最低点.

（1）若 $\frac{}{6}$，点 P 的坐标为 0，$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，则 ▲ ;

（2）若在曲线段 ¼ABC 与 x 轴所围成的区域内随机取一点，则该点在△ABC 内的概率为 ▲ .



【答案】（1）3;（2）$\frac{}{4}$。

【考点】三角函数的图像与性质，定积分，几何概率。

【解析】（1） y f (x) cos(x)，当 $\frac{}{6}$，点 P 的坐标为 0，$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 时， cos$\frac{}{6}$ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

∴ 3。

（2）由图知 AC $\frac{T}{2}$ $\frac{\frac{2}{}}{2}$ —，S_{ABC} $\frac{1}{2}$AC $\frac{}{2}$。

∵ y f (x) cos(x)，∴曲线段 ¼ABC 与 x 轴所围成的区域面积为

$\int_{\frac{}{2}}^{\frac{3}{2}}$ [f x]dx= f x $\Big|_{\frac{}{2}}^{\frac{3}{2}}$ sin$\frac{3}{2}$ (sin$\frac{}{2}$) 2 。

由几何概率知该点在△ABC 内的概率为 P $\frac{S_{ABC}}{S}$ $\frac{\frac{2}{}}{2}$ $\frac{}{4}$。

例 10. （2012 年浙江省文 5 分）从边长为 1 的正方形的中心和顶点这五点中，随机（等可能）取两点，

则

该两点间的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的概率是___▲___。

【答案】$\frac{2}{5}$。

【考点】随机事件的概率。

【解析】从边长为 1 的正方形的中心和顶点这五点中，随机（等可能）取两点共有 C_5^2=10 种，若使两点间的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，则为对角线一半，选择点必含中心，共有 4 种可能。故该两点间的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的概率是 $\frac{4}{10}$ $\frac{2}{5}$。

例 11. （2012 年重庆市文 5 分）某艺校在一天的 6 节课中随机安排语文、数学、外语三门文化课和其它三门艺术课各 1 节，则在课表上的相邻两节文化课之间至少间隔 1 节艺术课的概率为___▲___（用数字作答）。

【答案】$\frac{1}{5}$。

【考点】列举法计算基本事件数及事件发生的概率，古典概型及其概率计算公式。

【分析】语文、数学、外语三门文化课两两不相邻的排法可分为两步，先把其它三门艺术课排列有 A_3^3 种排法，第二步把语文、数学、外语三门文化课插入由那三个隔开的四个空中，有 A_4^3 种排法，

∴所有的排法种数为 $A_3^3\ A_4^3$ =144。

∴在课表上的相邻两节文化课之间至少间隔 1 节艺术课的概率为 $\frac{A_3^3A_4^3}{A_6^6}$ $\frac{3\ 2\ 1\ 4\ 3\ 2\ 1}{6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1}$ $\frac{1}{5}$。

例 12. （2012 年重庆市理 5 分）某艺校在一天的 6 节课中随机安排语文、数学、外语三门文化课和其他三门艺术课个 1 节，则在课表上的相邻两节文化课之间最多间隔 1 节艺术课的概率为___▲___（用数字作答）.

【答案】$\frac{3}{5}$。

【考点】排列数公式及概率。

【分析】随意安排 6 节课的方法数为 A_6^6　720，

而“相邻两节文化课之间最多间隔 1 节艺术课”的对立事件为“相邻两节文化课之间排 3 节艺术

课或排 2 节艺术课”，共有$2A_3^3A_3^3 \quad A_2^3A_2^1A_3^2A_3^1 \quad 288$。

∴其概率为$1 \quad \frac{288}{720} \quad \frac{3}{5}$。

例 13. （2012 年江苏省 5 分）现有 10 个数，它们能构成一个以 1 为首项， 3 为公比的等比数列，若从这 10 个数中随机抽取一个数，则它小于 8 的概率是__▲__.

【答案】$\frac{3}{5}$。

【考点】等比数列，概率。

【解析】∵以 1 为首项， 3 为公比的等比数列的 10 个数为 1，—3，9，-27，・・・其中有 5 个负数，1 个正数 1 计 6 个数小于 8，

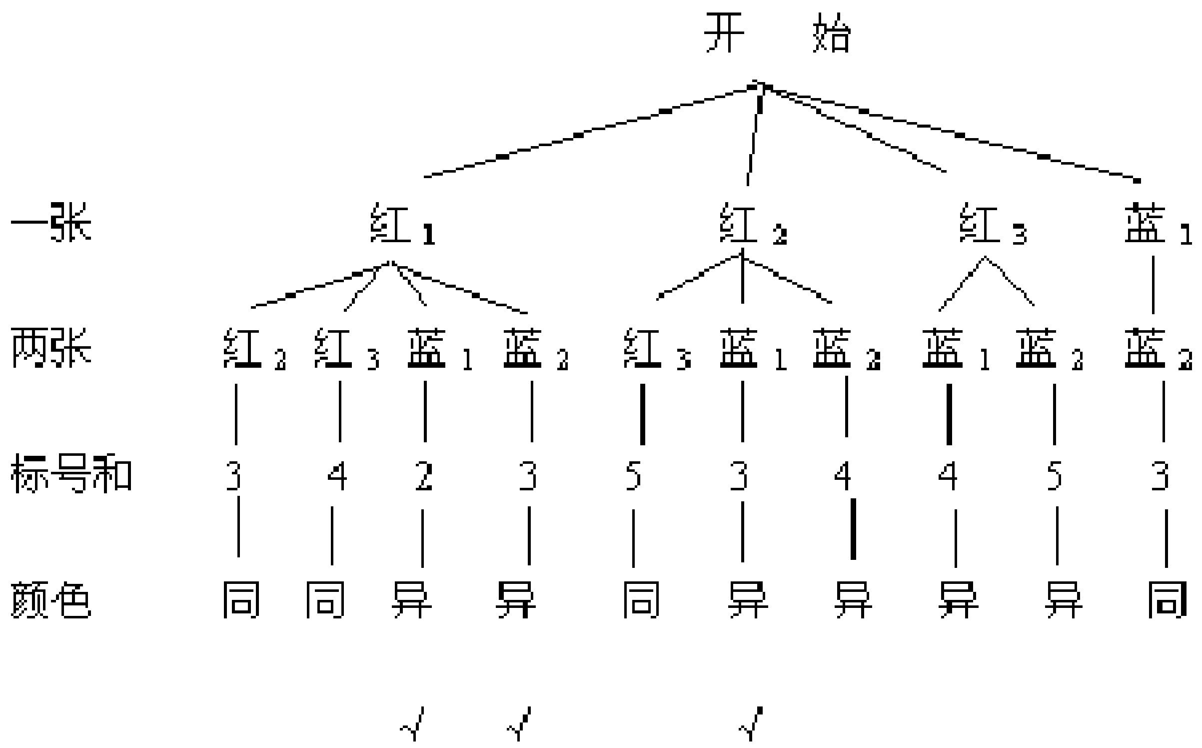
∴从这 10 个数中随机抽取一个数，它小于 8 的概率是$\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$。

例 14. （2012 年山东省文 12 分）袋中有五张卡片，其中红色卡片三张，标号分别为 1，2，3；蓝色卡片两张，标号分别为 1，2.

(Ⅰ)从以上五张卡片中任取两张，求这两张卡片颜色不同且标号之和小于 4 的概率；

(Ⅱ)现袋中再放入一张标号为 0 的绿色卡片，从这六张卡片中任取两张，求这两张卡片颜色不同且标号之和小于 4 的概率.

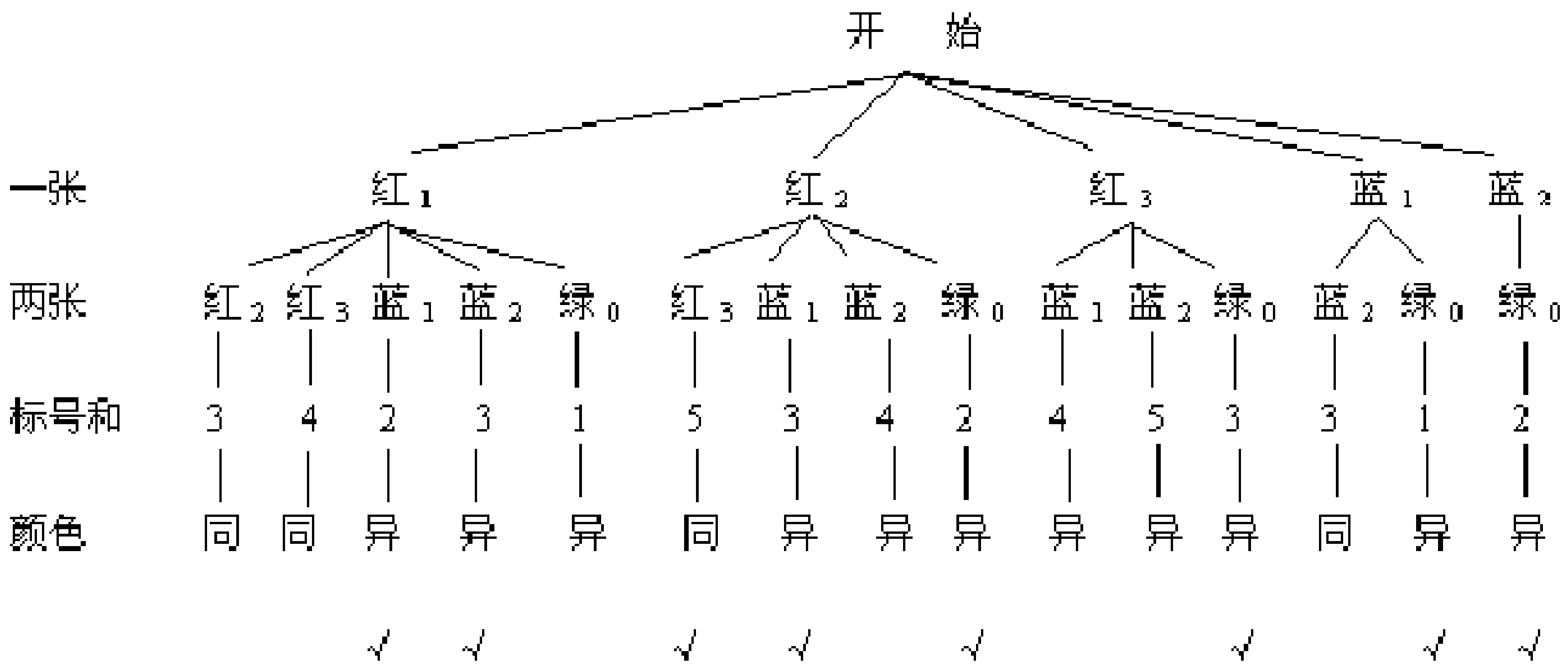
【答案】解：(Ⅰ)画树状图：



∵图中可见，从五张卡片中任取两张的所有等可能情况有 10 种，其中两张卡片的颜色不同且标号之和小于 4 的有 3 种情况，

∴这两张卡片颜色不同且标号之和小于 4 的概率为$P \quad \frac{3}{10}$。

（Ⅱ）画树状图：



∵图中可见，从六张卡片中任取两张的所有等可能情况有 15 种，其中两张卡片的颜色不同且标号之和小于 4 的有 8 种情况，

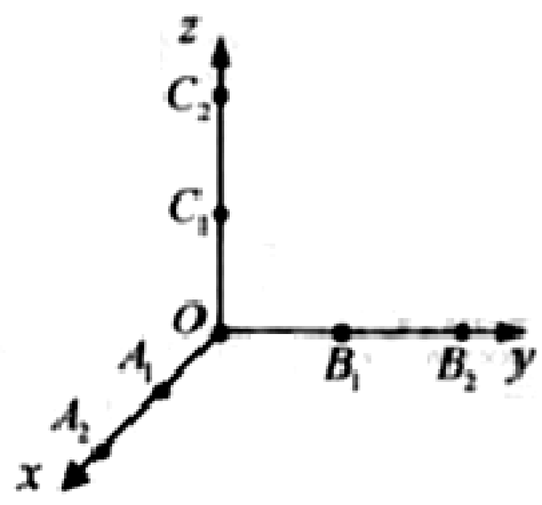
∴这两张卡片颜色不同且标号之和小于 4 的概率为 P $\frac{8}{15}$。

【考点】概率。

【解析】(Ⅰ)画树状图，找出从五张卡片中任取两张的所有等可能情况和其中两张卡片的颜色不同且标号之和小于 4 的情况，即可求出概率。

(Ⅱ)画树状图，找出从六张卡片中任取两张的所有等可能情况和其中两张卡片的颜色不同且标号之和小于 4 的情况，即可求出概率。

例 15. （2012 年江西省文 12 分）如图，从 $A_1(1,0,0)$，$A_2(2,0,0)$，$B_1(0,1,0)$，$B_2(0,2,0)$，$C_1(0,0,1)$，$C_2(0,0,2)$ 这 6 个点中随机选取 3 个点。



（1） 求这 3 点与原点 O 恰好是正三棱锥的四个顶点的概率；

（2） 求这 3 点与原点 O 共面的概率。

【答案】解：（1）∵总的结果数为 $C_6^3=20$ 种，满足条件的种数为 2 种：$O\ A_1B_1C_1$，$O\ A_2B_2C_2$，

∴所求概率为 $\frac{2}{20}$ $\frac{1}{10}$。

（2）∵满足条件的情况为 (A_1, A_2, B_1)，(A_1, A_2, B_2)，(A_1, A_2, C_1)，(A_1, A_2, C_2)，(B_1, B_2, C_1)，(B_1, B_2, C_2)，

∴所求概率为 $\frac{6}{20}$ $\frac{3}{10}$。

【考点】概率。

【解析】根据概率的求法，找准两点：①全部等可能情况的总数；②符合条件的情况数目；二者的比值就是其发生的概率。

例 16. （2012 年福建省文 12 分）在等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 中，$a_1=b_1=1$，$b_4=8$，$\{a_n\}$ 的前 10 项和 $S_{10}=55$.

（I）求 a_n 和 b_n；

（II）现分别从 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 3 项中各随机抽取一项，写出相应的基本事件，并求这两项的值相等的概率.

【答案】解：（I）设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，$\{b_n\}$ 的公比为 q. 依题意得 $S_{10}=10+\frac{10\times 9}{2}d=55$，$b_4=q^3=8$，

解得 d＝1，q＝2，所以 $a_n=n$，$b_n=2^{n-1}$。

（II）分别从 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 3 项中各随机抽取一项，得到的基本事件有 9 个：(1, 1)，(1, 2)，(1, 4)，(2, 1)，(2, 2)，(2, 4)，(3, 1)，(3, 2)，(3, 4).

符合题意的基本事件有 2 个：(1, 1)，(2, 2)，

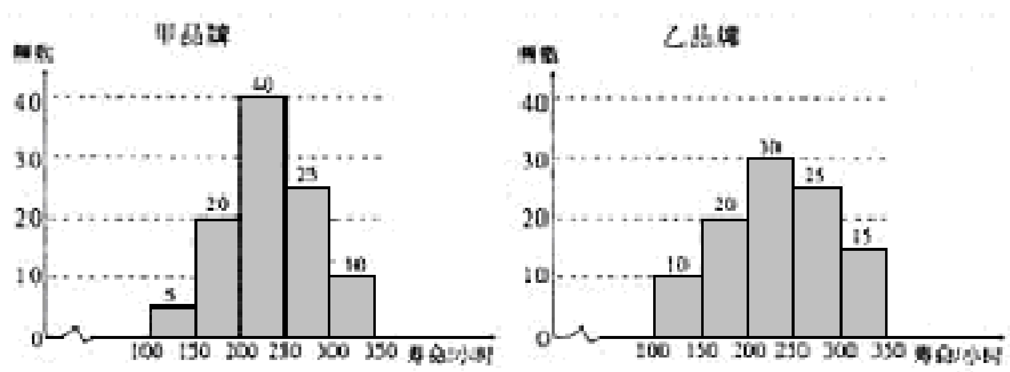
故所求的概率 $P=\frac{2}{9}$。

【考点】等差、等比数列、古典概型。

【解析】（I）根据已知求出公差和公比，即可求得 a_n 和 b_n、

（II）根据概率的求法，找准两点：①全部等可能情况的总数；②符合条件的情况数目；二者的比值就是其发生的概率。

例 17. （2012 年陕西省文 12 分）假设甲乙两种品牌的同类产品在某地区市场上销售量相等，为了解他们的使用寿命，现从两种品牌的产品中分别随机抽取 100 个进行测试，结果统计如下：



（Ⅰ）估计甲品牌产品寿命小于 200 小时的概率；

（Ⅱ）这两种品牌产品中，，某个产品已使用了 200 小时，试估计该产品是甲品牌的概率

【答案】解：（Ⅰ）甲品牌产品寿命小于 200 小时的频率为：$\frac{5+20}{100}=\frac{1}{4}$，

用频率估计概率，得甲品牌产品寿命小于 200 小时的概率为：$\frac{1}{4}$。

（Ⅱ）根据抽样结果寿命大于 200 小时的产品有 75+70=145 个，其中甲品牌产品是 75 个，所以在样本中，寿命大于 200 小时的产品是甲品牌的频率是 $\frac{75}{145}=\frac{15}{29}$，

用频率估计概率，得已使用了 200 小时的该产品是甲品牌的概率为：$\frac{15}{29}$。

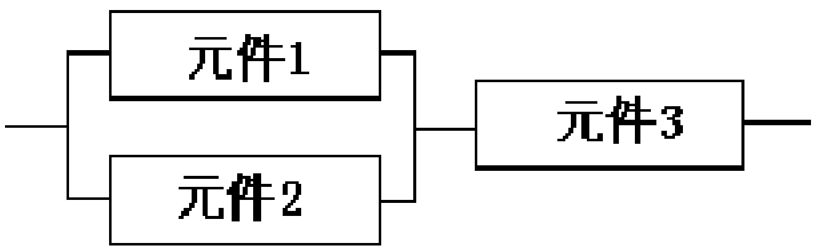
【考点】用样本的频率分布估计总体分布，频率分布直方图。

【解析】（Ⅰ）先从频数分布图中得到甲品牌产品寿命小于 200 小时的个数，与总数相比求出频率，即可得到概率。

（Ⅱ）先求出已使用了 200 小时的产品总数，再找到是甲品牌的个数，二者相比即可得到结论。

二、独立事件概率的计算：

典型例题：例 1. （2012 年全国课标卷理 5 分）某个部件由三个元件按下图方式连接而成，元件 1 或元件 2 正常工作，且元件 3 正常工作，则部件正常工作，设三个电子元件的使用寿命（单位：小时）均服从正态分布 $N(1000,50^2)$，且各个元件能否正常相互独立，那么该部件的使用寿命超过 1000 小时的概率为__▲__



【答案】$\frac{3}{8}$。

【考点】正态分布，概率。

【解析】∵三个电子元件的使用寿命均服从正态分布 $N(1000,50^2)$，

∴三个电子元件的使用寿命超过 1000 小时的概率为 $p=\frac{1}{2}$。

∴超过 1000 小时时元件 1 或元件 2 正常工作的概率 $P_1=1-(1-p)^2=\frac{3}{4}$。

∴该部件的使用寿命超过 1000 小时的概率为 $p_2=p_1\times p=\frac{3}{8}$。

例 2. （2012 年全国大纲卷文 12 分）乒乓球比赛规则规定，一局比赛，双方比分在 10 平前，一方连续发

球 2 次后，对方再连续发球 2 次，依次轮换，每次发球，胜方得 1 分，负方得 0 分．设在甲、乙的比赛中，每次发球，发球 1 分的概率为 0.6，各次发球的胜负结果相互独立．甲、乙的一局比赛中，甲先发球．

（1）求开球第 4 次发球时，甲、乙的比分为 1 比 2 的概率；

（2）求开始第 5 次发球时，甲得分领先的概率．

【答案】解：记 A_i 为事件“第 i 次发球，甲胜”，i=1,2,3，则

$$P(A_1)=P(A_2)=P(\overline{A_3})=P(\overline{A_4})=0.6,\ P(A_3)=P(A_4)=P(\overline{A_1})=P(\overline{A_2})=0.4。$$

（1）事件“开始第 4 次发球时，甲、乙的比分为 1 比 2”为 $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$，由互斥事件有一个发生的概率加法公式得

$$P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=0.6\times0.4\times0.6+0.4\times0.6\times0.6+0.4\times0.4\times0.4=0.352。$$

即开始第 4 次发球时，甲、乙的比分为 1 比 2 的概率为 0.352。

（2）开始第 5 次发球时，甲得分领先的情况是 4 比 0，3 比 1。

甲得分是 4 比 0 的概率是 $P(A_1A_2A_3A_4)=0.6^4=0.0576$；

甲得分是 3 比 1 的概率是

$$P(A_1A_2A_3\overline{A_4}+A_1A_2\overline{A_3}A_4+A_1\overline{A_2}A_3A_4+\overline{A_1}A_2A_3A_4)=2\times0.6^3\times0.4+2\times0.6\times0.4^3=0.2476。$$

∴开始第 5 次发球时，甲得分领先的概率是 0.0576+0.2496=0.3072。

【考点】独立事件的概率。

【解析】首先要理解发球的具体情况，然后对于事件的情况分析、讨论，并结合独立事件的概率求解结论。

例 3.（2012 年四川省文 12 分） 某居民小区有两个相互独立的安全防范系统（简称系统）A 和 B，系统 A 和系统 B 在任意时刻发生故障的概率分别为 $\frac{1}{10}$ 和 p。

（Ⅰ）若在任意时刻至少有一个系统不发生故障的概率为 $\frac{49}{50}$，求 p 的值；

（Ⅱ）求系统 A 在 3 次相互独立的检测中不发生故障的次数大于发生故障的次数的概率。

【答案】解：（Ⅰ）设 “至少有一个系统不发生故障”为事件 C，那么

$$1-P(C)=1-\frac{1}{10}P=\frac{49}{50}，解得 P=\frac{1}{5}。$$

（Ⅱ）设“系统 A 在 3 次相互独立的检测中不发生故障的次数大于发生故障的次数”为事件 D，

那么 $P(D)=C_3^2\cdot\frac{1}{10}\cdot(1-\frac{1}{10})^2+(1-\frac{1}{10})^3=\frac{972}{1000}=\frac{243}{250}$。

答：检测中不发生故障的次数大于发生故障的次数的概率为 $\frac{243}{250}$。

【考点】相互独立事件，独立重复试验、互斥事件、概率等概念。

【解析】（Ⅰ）求出“至少有一个系统不发生故障”的对立事件的概率，利用至少有一个系统不发生故障的概率为 $\frac{49}{50}$，可求 p 的值。

（Ⅱ）根据相互独立的事件的概率的求法求解即可。

例 4. （2012 年重庆市文 13 分）甲、乙两人轮流投篮，每人每次投一球，约定甲先投且先投中者获胜，一直每人都已投球 3 次时投篮结束，设甲每次投篮投中的概率为 $\frac{1}{3}$，乙每次投篮投中的概率为 $\frac{1}{2}$，且各次投篮互不影响。

（Ⅰ）求乙获胜的概率（7 分）；

（Ⅱ）求投篮结束时乙只投了 2 个球的概率（6 分）。

【答案】解：（Ⅰ）记“乙获胜”为事件 C，甲 3 次投篮投中为 A_1，A_2，A_3，乙 3 次投篮投中为 B_1，B_2，B_3。

$$\because\ p(A_1)=p(A_2)=p(A_3)=\frac{1}{3},\ p(B_1)=p(B_2)=p(B_3)=\frac{1}{2},$$

$$\therefore\ p(\overline{A_1})=p(\overline{A_2})=p(\overline{A_3})=\frac{2}{3},\ p(\overline{B_1})=p(\overline{B_2})=p(\overline{B_3})=\frac{1}{2}。$$

由互斥事件由一个发生的概率公式与相互独立事件同时发生的概率公式得

$$p(C)\quad p(\overline{A_1}B_1)\quad p(\overline{A_1}\,\overline{B_1}\,\overline{A_2}B_2)\quad p(\overline{A_1}\,\overline{B_1}\,\overline{A_2}\,\overline{B_2}\,\overline{A_3}B_3)$$

$$p(\overline{A_1})p(B_1)\quad p(\overline{A_1})p(\overline{B_1})p(\overline{A_2})p(B_2)\quad p(\overline{A_1})p(\overline{B_1})p(\overline{A_2})p(\overline{B_2})p(\overline{A_3})p(B_3)$$

$$\frac{2}{3}\ \frac{1}{2}+\frac{2}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{2}+\frac{2}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{2}=\frac{13}{27}。$$

（Ⅱ）记“乙只投了 2 个球”为事件 D。由于投篮结束时乙只投了 2 个球，说明第一次投球甲乙都没有投中，第二次投球甲没有投中、乙投中，或第三次投球甲投中了。

$$\therefore\ p(D)\quad p(\overline{A_1}\,\overline{B_1}\,\overline{A_2}B_2)\quad p(\overline{A_1}\,\overline{B_1}\,\overline{A_2}\,\overline{B_2}A_3)$$

$$p(\overline{A_1})p(\overline{B_1})p(\overline{A_2})p(B_2)\quad p(\overline{A_1})p(\overline{B_1})p(\overline{A_2})p(\overline{B_2})p(A_3)$$

$$\frac{2}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{2}+\frac{2}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}=\frac{4}{27}。$$

【考点】相互独立事件的概率乘法公式，概率的基本性质。

【分析】（Ⅰ）分别求出乙第一次投球获胜的概率、乙第二次投球获胜的概率、乙第三次投球获胜的概率，相加即得所求。

（Ⅱ）由于投篮结束时乙只投了 2 个球，说明第一次投球甲乙都没有投中，第二次投球甲没有投

中、乙投中，或第三次投球甲投中了，把这两种情况的概率相加，即得所求。

三、离散型随机变量概率列和数学期望计算：

典型例题：例 1. （2012 年上海市理 5 分）设$10\le x_1<x_2<x_3<x_4\le 10^4$，$x_5=10^5$，随机变量$\xi_1$取值$x_1$、$x_2$、$x_3$、$x_4$、$x_5$的概率均为$0.2$，随机变量$\xi_2$取值$\frac{x_1+x_2}{2}$、$\frac{x_2+x_3}{2}$、$\frac{x_3+x_4}{2}$、$\frac{x_4+x_5}{2}$、$\frac{x_5+x_1}{2}$的概率也均为$0.2$，若记$D\xi_1$、$D\xi_2$分别为$\xi_1$、$\xi_2$的方差，则【　　】

A. $D\xi_1>D\xi_2$　　　　B. $D\xi_1=D\xi_2$

C. $D\xi_1<D\xi_2$　　　　D. $D\xi_1$与$D\xi_2$的大小关系与x_1、x_2、x_3、x_4的取值有关

【答案】A。

【考点】离散型随机变量的期望和方差公式。

【解析】由随机变量ξ_1，ξ_2的取值情况，它们的平均数分别为：

设$E\xi_1=0.2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)=t$，则$E\xi_2=0.2(\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_2+x_3}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}+\frac{x_4+x_5}{2}+\frac{x_5+x_1}{2})=t$。

$\therefore D\xi_1=0.2[(x_1-t)^2+(x_2-t)^2+(x_3-t)^2+(x_4-t)^2+(x_5-t)^2]$

$=0.2[(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2)-2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)t+5t^2]$；

记$\frac{x_1+x_2}{2}=x'_1$，$\frac{x_2+x_3}{2}=x'_2$，…，$\frac{x_5+x_1}{2}=x'_5$，

同理得，$D\xi_2=0.2[(x'^2_1+x'^2_2+x'^2_3+x'^2_4+x'^2_5)-2(x'_1+x'_2+x'_3+x'_4+x'_5)t+5t^2]$

$=0.2[(x'^2_1+x'^2_2+x'^2_3+x'^2_4+x'^2_5)-2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)t+5t^2]$。

$\therefore$只要比较$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2$与$x'^2_1+x'^2_2+x'^2_3+x'^2_4+x'^2_5$有大小：

$\because x'^2_1+x'^2_2+x'^2_3+x'^2_4+x'^2_5=[(\frac{x_1+x_2}{2})^2+(\frac{x_2+x_3}{2})^2+\cdots+(\frac{x_5+x_1}{5})^2]$

$=\frac{1}{4}[(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+\cdots+(x_5+x_1)^2]$

$=\frac{1}{4}[2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2)+(2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_4+2x_4x_5+2x_5x_1)]$

$<\frac{1}{4}[2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2)+(x_1^2+x_2^2)+(x_2^2+x_3^2)+(x_3^2+x_4^2)+(x_4^2+x_5^2)+(x_5^2+x_1^2)]$

$=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2$，

$\therefore D\xi_2<D\xi_1$。故选 A。

例 2. （2012 年全国大纲卷理 12 分）乒乓球比赛规则规定：一局比赛，双方比分在 10 平前，一方连续发球 2 次后，对方再连续发球 2 次，依次轮换，每次发球，胜方得 1 分，负方得 0 分。设在甲、乙的比赛中，每次发球，发球方得 1 分的概率为 0.6，各次发球的胜负结果相互独立，。甲、乙的一局比赛中，甲先发球。

（1）求开始第 4 次发球时，甲、乙的比分为 1 比 2 的概率；

（2） 表示开始第 4 次发球时乙的得分，求 的期望。

【答案】解：记 A_i 为事件“第 i 次发球，甲胜”，i=1,2,3，则 $P(A_1)\ \ 0.6, P(A_2)\ \ 0.6, P(A_3)\ \ 0.4$。

（1）事件“开始第 4 次发球时，甲、乙的比分为 1 比 2”为 $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\ \ \overline{A_1}A_2\overline{A_3}\ \ \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$，由互斥事件有一个发生的概率加法公式得

$$P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\ \ \overline{A_1}A_2\overline{A_3}\ \ \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)\ \ 0.6\ 0.4\ 0.6\ \ 0.4\ 0.6\ 0.6\ \ 0.4\ 0.4\ 0.4\ \ 0.352。$$

即开始第 4 次发球时，甲、乙的比分为 1 比 2 的概率为 0.352。

（2）由题意 $0,\ 1,\ 2,\ 3$。

$P(\ \ 0)\ \ P(A_1A_2A_3)\ \ 0.6\ \ 0.6\ \ 0.4\ \ 0.144$；

$P(\ \ 1)\ \ P(\overline{A_1}A_2A_3\ \ A_1\overline{A_2}A_3\ \ A_1A_2\overline{A_3})\ \ 0.4\,0.6\,0.4\ 0.6\,0.4\,0.4\ 0.6\,0.6\,0.6 = 0.408$；

$P(\ \ 2)\ \ 0.352$；

$P(\ \ 3)\ \ P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})\ \ 0.4\ \ 0.4\ \ 0.6\ \ 0.096$。

∴分布列为：

	0	1	2	3
P	0.144	0.108	0.352	0.096

∴ 的期望 $E\ \ \ 0.408\ \ 2\ \ 0.352\ \ 3\ \ 0.096\ \ 1.4$。

【考点】独立事件的概率，分布列和期望值。

【解析】首先要理解发球的具体情况，然后对于事件的情况分析、讨论，并结合独立事件的概率求解结论。

例 3. （2012 年全国课标卷理 12 分）某花店每天以每枝 5 元的价格从农场购进若干枝玫瑰花，然后以每枝 10 元的价格出售，如果当天卖不完，剩下的玫瑰花作垃圾处理。

（1）若花店一天购进 16 枝玫瑰花，求当天的利润 y（单位：元）关于当天需求量 n（单位：枝，$n\ \ N$）的函数解析式。

（2）花店记录了 100 天玫瑰花的日需求量（单位：枝），整理得下表：

日需求量 n	14	15	16	17	18	19	20
频 数	10	20	16	16	15	13	10

以 100 天记录的各需求量的频率作为各需求量发生的概率。

（i）若花店一天购进 16 枝玫瑰花，X 表示当天的利润（单位：元），求 X 的分布列，数学期望及方差；

（ii）若花店计划一天购进 16 枝或 17 枝玫瑰花，你认为应购进 16 枝还是 17 枝？请说明理由。

【答案】解：（1）当 $n \quad 16$ 时，$y \quad 16 \quad (10 \quad 5) \quad 80$；

当 $n \quad 15$ 时，$y \quad 5n \quad 5(16 \quad n) \quad 10n \quad 80$。

$\therefore y \quad \begin{matrix} 10n \quad 80 \, (n \quad 15) \\ 80 \qquad (n \quad 16) \end{matrix} \, (n \quad N)$。

（2）（i）X 可取 60，70，80，$P(X \quad 60) \quad 0.1, P(X \quad 70) \quad 0.2, P(X \quad 80) \quad 0.7$。

X 的分布列为：

X	60	70	80
P	0.1	0.2	0.7

$EX \quad 60 \quad 0.1 \quad 70 \quad 0.2 \quad 80 \quad 0.7 \quad 76$。$DX \quad 16^2 \quad 0.1 \quad 6^2 \quad 0.2 \quad 4^2 \quad 0.7 \quad 44$。

（ii）购进 17 枝时，当天的利润为

$y \quad (14 \quad 5 \quad 3 \quad 5) \quad 0.1 \quad (15 \quad 5 \quad 2 \quad 5) \quad 0.2 \quad (16 \quad 5 \quad 1 \quad 5) \quad 0.16 \quad 17 \quad 5 \quad 0.54 \quad 76.4$

$\because 76.4 \quad 76$，$\therefore$应购进 17 枝。

【考点】列函数关系式，概率，离散型随机变量及其分布列。

【解析】（1）根据题意，分 $n \quad 16$ 和 $n \quad 15$ 分别列式。

（2）X 取 60，70，80，求得概率，得到 X 的分布列，根据数学期望及方差公式求解；求出购进 17 枝时，当天的利润与购进 16 枝时，当天的利润比较即可。

例 4. （2012 年四川省理 12 分） 某居民小区有两个相互独立的安全防范系统（简称系统）A 和 B，系统 A 和 B 在任意时刻发生故障的概率分别为 $\frac{1}{10}$ 和 p。

（Ⅰ）若在任意时刻至少有一个系统不发生故障的概率为 $\frac{49}{50}$，求 p 的值；

（Ⅱ）设系统 A 在 3 次相互独立的检测中不发生故障的次数为随机变量 ，求 的概率分布列及数学期望 E 。

【答案】解：(Ⅰ) 设 “至少有一个系统不发生故障”为事件 C，那么

$$1\ \ P(C)\ \ 1\ \ \frac{1}{10}P\ \ \frac{49}{50}$$ ，解得 $P\ \ \frac{1}{5}$。

(Ⅱ) 由题意， $P\ \ \ 0\ \ \ C_3^0(\frac{1}{10})^3\ \ \frac{1}{1000}$， $P\ \ \ 1\ \ \ C_3^1(\frac{1}{10})^2(1\ \ \frac{1}{10})\ \ \frac{27}{1000}$，

$P\ \ \ 2\ \ \ C_3^2(\frac{1}{10})(1\ \ \frac{1}{10})^2\ \ \frac{243}{1000}$， $P\ \ \ 3\ \ \ C_3^3(\frac{1}{10})^0(1\ \ \frac{1}{10})^3\ \ \frac{729}{1000}$

∴随机变量　的概率分布列为：

	0	1	2	3
P	$\frac{1}{1000}$	$\frac{27}{1000}$	$\frac{243}{1000}$	$\frac{729}{1000}$

∴故随机变量 X 的数学期望为：

$$E\ \ =0\ 0\ \ \frac{1}{1000}\ \ 1\ \ \frac{27}{1000}\ \ 2\ \ \frac{243}{1000}\ \ 3\ \ \frac{729}{1000}\ \ \frac{27}{10}$$ 。

【考点】相互独立事件，独立重复试验、互斥事件、二项分布，随机变量的分布列、数学期望。

【解析】(Ⅰ) 求出“至少有一个系统不发生故障”的对立事件的概率，利用至少有一个系统不发生故障的概率为 $\frac{49}{50}$，可求 p 的值。

(Ⅱ)　的所有可能取值为 0，1，2，3，求出相应的概率，可得　的分布列与数学期望。

例 5. (2012 年天津市理 13 分) 现有 4 个人去参加某娱乐活动，该活动有甲、乙两个游戏可供参加者选择. 为增加趣味性，约定：每个人通过掷一枚质地均匀的骰子决定自己去参加个游戏，掷出点数为 1 或 2 的人去参加甲游戏，掷出点数大于 2 的人去参加乙游戏.

(Ⅰ) 求这 4 个人中恰有 2 人去参加甲游戏的概率：

(Ⅱ) 求这 4 个人中去参加甲游戏的人数大于去参加乙游戏的人数的概率：

(Ⅲ) 用 X, Y 分别表示这 4 个人中去参加甲、乙游戏的人数，记 $=|X\ \ \ Y|$，求随机变量　的分布列与数学期望 E　.

【答案】解：(Ⅰ) 依题意，4 个人中，每个人去参加甲游戏的概率为 $\frac{1}{3}$，去参加乙游戏的人数的概率为 $\frac{2}{3}$ 。

设“这 4 个人中恰有 2 人去参加甲游戏”为事件 A_i（i　0，1，2，3，4），

则 $P(A_i)\ \ C_4^i\ \frac{1}{3}^{\ i}\ \ \frac{2}{3}^{\ 4\ \ i}$ 。

∴这 4 个人中恰有 2 人去参加甲游戏的概率为 $P(A_2)=C_4^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$。

（Ⅱ）设“这 4 个人中去参加甲游戏的人数大于去参加乙游戏”为事件 B，则 $B=A_3\cup A_4$。

∵ A_3 与 A_4 互相排斥，∴ $P(B)=P(A_3)+P(A_4)=C_4^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\frac{2}{3}+C_4^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{9}$

（Ⅲ）ξ 的所有可能取值为 0，2，4，

∵ A_1 与 A_3 互相排斥，A_0 与 A_4 互相排斥，

∴ $P(\xi=0)=P(A_2)=\frac{8}{27}$，$P(\xi=2)=P(A_1)+P(A_3)=\frac{40}{81}$，$P(\xi=4)=P(A_0)+P(A_4)=\frac{17}{81}$，

∴随机变量 ξ 的分布列是

ξ	0	2	4
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{17}{81}$

随机变量 ξ 的分布列与数学期望 $E\xi=0\times\frac{8}{27}+2\times\frac{40}{81}+4\times\frac{17}{40}=\frac{148}{81}$。

【考点】离散型随机变量的期望与方差，相互独立事件的概率乘法公式，离散型随机变量及其分布列。

【分析】（Ⅰ）依题意，求出这 4 个人中，每个人去参加甲游戏的概率和去参加乙游戏的人数的概率，即可求得这 4 个人中恰有 2 人去参加甲游戏的概率。

（Ⅱ）设“这 4 个人中去参加甲游戏的人数大于去参加乙游戏”为事件 B，则 B 包括这 4 个人中去参加甲游戏的人数有 3 人和 4 人两种情况，利用互斥事件的概率公式可求这 4 个人中去参加甲游戏的人数大于去参加乙游戏的人数的概率。

（Ⅲ）ξ 的所有可能取值为 0，2，4，由于 A_1 与 A_3 互相排斥，A_0 与 A_4 互相排斥，求出相应的概率，可得 ξ 的分布列与数学期望。

例 6. （2012 年安徽省理 12 分）某单位招聘面试，每次从试题库随机调用一道试题，若调用的是 A 类型试题，则使用后该试题回库，并增补一道 A 类试题和一道 B 类型试题入库，此次调题工作结束；若调用的是 B 类型试题，则使用后该试题回库，此次调题工作结束。试题库中现共有 $n+m$ 道试题，其中有 n 道 A 类型试题和 m 道 B 类型试题，以 X 表示两次调题工作完成后，试题库中 A 类试题的数量。

（Ⅰ）求 $X=n+2$ 的概率；

（Ⅱ）设 $m=n$，求 X 的分布列和均值（数学期望）。

【答案】解：(I) 根据题意，$X=n+2$ 表示两次调题均为 A 类型试题，概率为 $\frac{n}{m+n}\cdot\frac{n+1}{m+n+2}$。

（Ⅱ）$m=n$ 时，每次调用的是A类型试题的概率为 $p=\frac{1}{2}$

随机变量X可取 $n, n+1, n+2$

则 $P(X=n)=(1-p)^2=\frac{1}{4}$，$P(X=n+1)=2p(1-p)=\frac{1}{2}$，

$P(X=n+2)=p^2=\frac{1}{4}$。

∴ X 的分布列如下：

X	n	$n+1$	$n+2$
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

∴ $EX=n\cdot\frac{1}{4}+(n+1)\cdot\frac{1}{2}+(n+2)\cdot\frac{1}{4}=n+1$。

【考点】概率，离散型随机变量及其分布列。

【解析】(Ⅰ) 根据题意，$X=n+2$ 表示两次调题均为A类型试题，第一次调题为A类型试题的概率为 $\frac{n}{m+n}$；第二次调题时试题总量为 $m+n+2$，A类型试题为 $n+1$，概率为 $\frac{n+1}{m+n+2}$。所以两次调题均为A类型试题的概率为 $\frac{n}{m+n}\cdot\frac{n+1}{m+n+2}$。

（Ⅱ）随机变量X可取 $n, n+1, n+2$，求出X的分布列和均值（数学期望）。

例7. （2012年山东省理12分） 现有甲、乙两个靶。某射手向甲靶射击一次，命中的概率为 $\frac{3}{4}$，命中得1分，没有命中得0分；向乙靶射击两次，每次命中的概率为 $\frac{2}{3}$，每命中一次得2分，没有命中得0分。该射手每次射击的结果相互独立。假设该射手完成以上三次射击。

（Ⅰ）求该射手恰好命中一次的概率；

（Ⅱ）求该射手的总得分X的分布列及数学期望EX

【答案】解：（Ⅰ）∵该射手恰好命中一次的情况包括向甲靶射击命中向乙靶射击没中，向甲靶射击没中向乙靶射击命中一次两种情况，P

∴该射手恰好命中一次的概率为 $P=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{4}\cdot C_2^1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{7}{36}$。

（Ⅱ）取 $X=0, 1, 2, 3, 4, 5$，

$P(X=0)=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{36}$，$P(X=1)=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{12}$，$P(X=2)=\frac{1}{4}\cdot C_2^1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$，

$P(X=3)=\frac{3}{4}\cdot C_2^1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$，$P(X=4)=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$，$P(X=5)=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$。

∴该射手的总得分X的分布列如下：

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$

求该射手的总得分 X 的数学期望

$$EX=0\times\frac{1}{36}+1\times\frac{1}{12}+2\times\frac{1}{9}+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{9}+5\times\frac{1}{3}=\frac{41}{12}\quad 3\frac{5}{12}$$。

【考点】概率，分布列及数学期望。

【解析】（Ⅰ）找出该射手恰好命中一次的所有情况，求出概率即可。

（Ⅱ）直接根据分布列及数学期望的计算方法解题即可。

例 8.（2012 年广东省理 13 分）某班 50 位学生期中考试数学成绩的频率分布直方图如图所示，其中成绩分组区间是： $40,50$, $50,60$, $60,70$, $70,80$, $80,90$, $90,100$

（1）求图中 x 的值；

（2）从成绩不低于 80 分的学生中随机选取 2 人，该 2 人中成绩在 90 分以上（含 90 分）的人数记为 ，

求 的数学期望。

【答案】解：（1）图中学生期中考试数学成绩在 [80,90) 的频率

f_5=1-10（0.054+0.01+0.006×3）=1-0.82=0.18 ，∴ x =0.18÷10=0.018。

（2）学生成绩不低于 80 分的频率 f=10（0.018+0.006）=0.24，

成绩不低于 80 分的学生人数为 50f=50×0.24=12。

成绩不低于 90 分的学生人数为 50×10×0.006=3。

∴随机变量 x 的取值为 0,1,2，期中考试数学成绩在 [80,90) 的学生数为 12-3=9。

$p(x=0)=\dfrac{C_9^2}{C_{12}^2}=\dfrac{6}{11}$， $p(x=1)=\dfrac{C_9^1\times C_3^1}{C_{12}^2}=\dfrac{9}{22}$， $p(x=2)=\dfrac{C_3^2}{C_{12}^2}=\dfrac{1}{22}$。

随机变量 x 的分布列为

x	0	1	2
P	$\dfrac{6}{11}=\dfrac{12}{22}$	$\dfrac{9}{22}$	$\dfrac{1}{22}$

随机变量 x 的数学期望 $E(x)=\dfrac{0\times 12+1\times 9+2\times 1}{22}=\dfrac{11}{22}=\dfrac{1}{2}$。

【考点】频率分布直方图，离散型随机变量的期望。

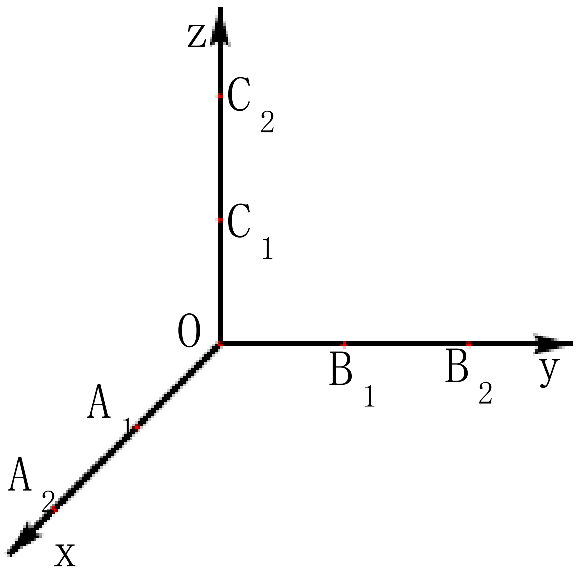
【解析】（1）根据频率分布直方图，由频率和为 1 可求。

（2）求出分布列即可求得随机变量 x 的数学期望。

例 9..（2012 年江西省理 12 分）如图，从 $A_1(1,0,0)$，$A_2(2,0,0)$，$B_1(0,1,0)$，$B_2(0,2,0)$，$C_1(0,0,1)$，$C_2(0,0,2)$ 这 6 个点中随机选取 3 个点，将这 3 个点及原点 O 两两相连构成一个“立体”，记该“立体”的体积为随机变量 V（如果选取的 3 个点与原点在同一个平面内，此时“立体”的体积 $V=0$）。

（1）求 $V=0$ 的概率；

（2）求 V 的分布列及数学期望 EV。



【答案】解：（1）从 6 个点中随机取 3 个点总共有 $C_6^3=20$ 种取法，选取的 3 个点与原点在同一个平面内的取法有 $C_3^1C_4^3=12$ 种，因此 V＝0 的概率为 $P(V=0)=\dfrac{12}{20}=\dfrac{3}{5}$。

（2）V 的所有可能取值为 0，$\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{4}{3}$，因此 V 的分布列为

V	0	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{4}{3}$

P	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

由 V 的分布列可得 $EV=0\times\frac{3}{5}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{20}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{20}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{20}+\frac{4}{3}\times\frac{1}{20}=\frac{9}{40}$。

【考点】组合数，随机变量的概率，离散型随机变量的分布列、期望。

【解析】(1) 应用组合知识求出从 6 个点中随机取 3 个点的总数和选取的 3 个点与原点在同一个平面内的取法，根据概率的求法即可。

(2) 求出 V 的所有可能取值和概率，即可得到分布列和期望。

例 10. （2012 年浙江省理 14 分）已知箱中装有 4 个白球和 5 个黑球，且规定：取出一个白球得 2 分，取出一个黑球得 1 分．现从箱中任取（无放回，且每球取道的机会均等）3 个球，记随机变量 X 为取出此 3 球所得分数之和．

（Ⅰ）求 X 的分布列；

（Ⅱ）求 X 的数学期望 E（X）．

【答案】解：（Ⅰ）X 的可能取值有：3，4，5，6。

$P(X=3)=\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{5}{42}$； $P(X=4)=\frac{C_5^2C_4^1}{C_9^3}=\frac{20}{42}$；

$P(X=5)=\frac{C_5^1C_4^2}{C_9^3}=\frac{15}{42}$； $P(X=6)=\frac{C_4^3}{C_9^3}=\frac{2}{42}$．

∴所求 X 的分布列为

X	3	4	5	6
P	$\frac{5}{42}$	$\frac{20}{42}=\frac{10}{21}$	$\frac{15}{42}=\frac{5}{14}$	$\frac{2}{42}=\frac{1}{21}$

（Ⅱ）所求 X 的数学期望 E(X) 为：$E(X)=\sum_{i=4}^{6} iP(X=i)=\frac{13}{3}$。

【考点】离散型随机变量及其分布列，离散型随机变量的期望。

【解析】(1) X 的可能取值有：3，4，5，6，求出相应的概率可得所求 X 的分布列。

(2) 利用 X 的数学期望公式，即可得到结论。

例 11. （2012 年湖北省理 12 分）根据以往的经验，某工程施工期间的将数量 X（单位：mm）对工期的影响如下表：

降水量 X	X<300	300≤X<700	700≤X<900	X≥900
工期延误天数 Y	0	2	6	10

历年气象资料表明，该工程施工期间降水量 X 小于 300，700，900 的概率分别为 0.3，0.7，0.9，求：

（I）工期延误天数 Y 的均值与方差；

（Ⅱ）在降水量 X 至少是 300 的条件下，工期延误不超过 6 天的概率。

【答案】解：（Ⅰ）由已知条件和概率的加法公式有：

$P(X<300)=0.3$,

$P(300\le X<700)=P(X<700)-P(X<300)=0.7-0.3=0.4$，

$P(700\le X<900)=P(X<900)-P(X<700)=0.9-0.7=0.2$.

$P(X\ge 900)=1-P(X<900)=1-0.9=0.1$.

∴ Y 的分布列为：

Y	0	2	6	10
P	0.3	0.4	0.2	0.1

∴ $E(Y)=0\times0.3+2\times0.4+6\times0.2+10\times0.1=3$；

$D(Y)=(0-3)^2\times0.3+(2-3)^2\times0.4+(6-3)^2\times0.2+(10-3)^2\times0.1=9.8$.

∴工期延误天数 Y 的均值为 3，方差为 9.8。

（Ⅱ）由概率的加法公式，$P(X\ge300)=1-P(X<300)=0.7$，

又 $P(300\le X<900)=P(X<900)-P(X<300)=0.9-0.3=0.6$.

由条件概率，得 $P(Y\le6|X\ge300)=P(X<900|X\ge300)=\dfrac{P(300\le X<900)}{P(X\ge300)}=\dfrac{0.6}{0.7}=\dfrac{6}{7}$。

∴在降水量 X 至少是 300 mm 的条件下，工期延误不超过 6 天的概率是 $\dfrac{6}{7}$。

【考点】离散型条件概率分布列的期望与方差，条件概率。

【解析】(I）应用概率的加法公式，求出 Y 的分布列即可求得工期延误天数 Y 的均值与方差。

（Ⅱ）应用概率的加法公式，求出 P（X≥300）和 P（300≤X<900），由条件概率即可求得在降水量 X 至少是 300 mm 的条件下，工期延误不超过 6 天的概率。

例 12. （2012 年湖南省理 12 分）某超市为了解顾客的购物量及结算时间等信息，安排一名员工随机收集了在该超市购物的 100 位顾客的相关数据，如下表所示.

一次性购物量	1 至 4 件	5　至 8 件	9 至 12 件	13 至 16 件	17 件及以上
顾客数（人）	x	30	25	y	10
结算时间（分钟/人）	1	1.5	2	2.5	3
一次购物量	1 至 4 件	5 至 8 件	9 至 12 件	13 至 16 件	17 件及以上
顾客数（人）	x	30	25	y	10
结算时间（分钟/人）	1	1.5	2	2.5	3

已知这 100 位顾客中的一次购物量超过 8 件的顾客占 55%.

（Ⅰ）确定 x，y 的值，并求顾客一次购物的结算时间 X 的分布列与数学期望；

（Ⅱ）若某顾客到达收银台时前面恰有 2 位顾客需结算，且各顾客的结算相互独立，求该顾客结算前的等候时间不超过 2.5 分钟的概率.

（注：将频率视为概率）

【答案】解：（Ⅰ）由已知，得 $25\quad y\quad 10\quad 55, x\quad y\quad 35,$ 解得 $x\quad 15, y\quad 20$ 。

该超市所有顾客一次购物的结算时间组成一个总体，所以收集的 100 位顾客一次购物的结算时间可视为总体的一个容量随机样本，将频率视为概率得

$$p(X\quad 1)\quad \frac{15}{100}\quad \frac{3}{20}, p(X\quad 1.5)\quad \frac{30}{100}\quad \frac{3}{10}, p(X\quad 2)\quad \frac{25}{100}\quad \frac{1}{4},$$

$$p(X\quad 2.5)\quad \frac{20}{100}\quad \frac{1}{5}, p(X\quad 3)\quad \frac{10}{100}\quad \frac{1}{10}\text{。}$$

∴ X 的分布为

X	1	1.5	2	2.5	3
P	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

X 的数学期望为

$$E(X)\quad 1\quad \frac{3}{20}\quad 1.5\quad \frac{3}{10}\quad 2\quad \frac{1}{4}\quad 2.5\quad \frac{1}{5}\quad 3\quad \frac{1}{10}\quad 1.9\text{。}$$

（Ⅱ）记 A 为事件“该顾客结算前的等候时间不超过 2.5 分钟”，$X_i(i\quad 1,2)$ 为该顾客前面第 i 位顾客的结算时间，则

$$P(A)\quad P(X_1\quad 1\text{且}X_2\quad 1)\quad P(X_1\quad 1\text{且}X_2\quad 1.5)\quad P(X_1\quad 1.5\text{且}X_2\quad 1)\text{。}$$

由于顾客的结算相互独立，且 X_1, X_2 的分布列都与 X 的分布列相同，所以，

$$P(A)\quad P(X_1\quad 1)\quad P(X_2\quad 1)\quad P(X_1\quad 1)\quad P(X_2\quad 1.5)\quad P(X_1\quad 1.5)\quad P(X_2\quad 1)$$

$$\frac{3}{20}\quad \frac{3}{20}\quad \frac{3}{20}\quad \frac{3}{10}\quad \frac{3}{10}\quad \frac{3}{20}\quad \frac{9}{80}\text{。}$$

故该顾客结算前的等候时间不超过 2.5 分钟的概率为 $\frac{9}{80}$ 。

【考点】分布列及数学期望的计算，概率。

【解析】(Ⅰ)根据统计表和 100 位顾客中的一次购物量超过 8 件的顾客占 55%知 $25\quad y\quad 10\quad 100\quad 55\%,$ $x\quad y\quad 35,$ 从而解得 x，y，计算每一个变量对应的概率，从而求得分布列和期望。