

浙江省杭州市学军中学海创园学校 2023-2024 学年高二上

学期期中数学试题

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

1. 已知幂函数 $f(x) = x^\alpha$ 的图象经过点 $(\sqrt{2}, 4)$, 则 $\alpha =$ ()

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. 4 D. 8

2. 复数 $z = \frac{1}{3+4i}$ 的虚部是 ()

- A. $-\frac{3}{25}$ B. $-\frac{3}{25}i$ C. $-\frac{4}{25}$ D. $-\frac{4}{25}i$

3. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{3, 4, 5\}$ C. $\{-1, 3, 4, 5\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

4. “ $x^2 - x - 2 < 0$ ”是“ $\log_2 x < 1$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 与角 β 均以 Ox 为始边, 它们的终边关于直线 $y = x$

对称, 若 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, 则 $\cos \beta =$ ()

- A. $-\frac{4}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

6. 已知 A, B 是圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 上的两个动点, 若点 $P(1, 2)$ 在以 AB 为直径的圆上,

则 $|AB|$ 的最大值为 ()

- A. $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ B. $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ C. $2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ D. $2(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

7. 已知棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 为棱 AA_1 上一点, 过 PB_1D_1 的平面

截得三棱锥 $A_1-PB_1D_1$ 的体积为 $\frac{1}{24}a^3$, 则异面直线 PB_1 与 BD_1 所成角的余弦值为

()

- A. $-\frac{\sqrt{51}}{17}$ B. $\frac{\sqrt{51}}{17}$ C. $\frac{\sqrt{21}}{8}$ D. $\frac{\sqrt{17}}{8}$

8. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足: $f(x) = \begin{cases} x^2+2, & x \in [0,1) \\ 2-x^2, & x \in [-1,0) \end{cases}$ 且 $f(x+2) = f(x)$,

$g(x) = \frac{2x+5}{x+2}$, 则方程 $f(x) = g(x)$ 在区间 $[-5,1]$ 上的所有实根之和为 ()

- A. -6 B. -7 C. -8 D. -9

二、多选题

9. 下列不是古典概型的是 ()

- A. 任意抛掷两枚骰子, 所得点数之和作为样本点
B. 求任意的一个正整数平方的个位数字是 1 的概率, 将取出的正整数作为样本点
C. 在甲、乙、丙、丁 4 名志愿者中, 任选一名志愿者参加跳高项目, 求甲被选中的概率
D. 抛掷一枚质地均匀的硬币至首次出现正面为止, 抛掷的次数作为样本点

10. 甲、乙两支田径队队员的体重(单位: kg)信息如下: 甲队体重的平均数为 60, 方差为 200, 乙队体重的平均数为 68, 方差为 300, 又已知甲、乙两队的队员人数之比为

1: 3, 则关于甲、乙两队全部队员的体重的平均数和方差的正确的说法是 ()

- A. 平均数为 67 B. 平均数为 66 C. 方差为 296 D. 方差为 287

11. 下列说法正确的是 ()

- A. $y = ax - 2a + 3 (a \in \mathbb{R})$ 直线必过定点 $(2, 3)$

B. 直线 $y+1=2x$ 在 y 轴上的截距为 1

C. 直线 $x+\sqrt{3}y+3=0$ 的倾斜角为 150°

D. 点 $A(2,-3)$, $B(-3,-2)$, 直线 $l:mx+y-m-1=0$ 与线段 AB 相交, 则实数 m 的

取值范围是 $m \leq \frac{3}{4}$ 或 $m \geq 4$

12. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AD=2AB=2AA_1=4$, E 是棱 B_1C_1 的中点, 过点

B, E, D_1 的平面 α 交棱 AD 于点 F , 点 P 为线段 D_1F 上一动点, 则 ()

A. 三棱锥 $P-ABE$ 的体积为定值

B. 存在点 P , 使得 $DP \perp \alpha$

C. 直线 PE 与平面 BCC_1B_1 所成角的正切值的最大值为 $\sqrt{2}$

D. 三棱锥 $P-BB_1E$ 外接球表面积取值范围是 $[12\pi, 44\pi]$

三、填空题

13. 若 $A(3,1)$, $B(-2,k)$, $C(8,1)$ 三点能构成三角形, 则实数 k 的取值范围为_____.

14. $\min\{a,b\}$ 表示 a,b 两个数中的最小值, 则函数 $f(x)=\min\{-2x^2+x+\frac{7}{8}, \log_{\frac{1}{2}}(x+\frac{1}{4})\}$ 的

最大值为_____.

15. 已知存在两个正数 x 和 y 满足 $\begin{cases} 4x+\frac{1}{y}=a, \\ \frac{1}{x}+9y=26-a, \end{cases}$ 则实数 a 的取值范围是_____.

16. 设函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$ ($\omega>0$) 在 $\left(\frac{\pi\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ 上恰有两个零点, 且 $f(x)$ 的图象在

$\left(\frac{\pi\pi}{6}, -\frac{1}{4}\right)$ 上恰有两个最高点, 则 ω 的取值范围是_____.

四、解答题

17. 已知 $\triangle ABC$ 的三个角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 而且满足

$$\frac{a^2 \sin B \sin C}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}(a^2 + b^2 - c^2)}{2}.$$

(1)求角 C 的值;

(2)若 $a=2, b=5$, 边 AB 上的中点为 D , 求 CD 的长度.

18. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x + t (\omega > 0)$, 且 $f(x)$ 的最大值为 3, 最小正周期为 π .

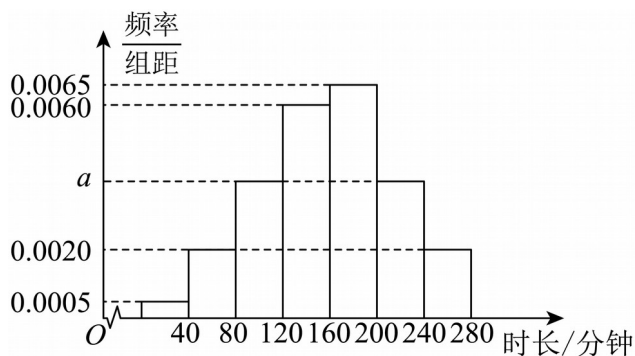
(1)求 $f(x)$ 的解析式;

(2)求 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi\pi}{3}, -\frac{1}{6}\right]$ 上的值域, 并指出 $f(x)$ 取得最大值时自变量 x 的值.

19. 2022 年卡塔尔世界杯是第二十二届世界杯足球赛, 是历史上首次在卡塔尔和中东国家境内举行、也是继 2002 年韩日世界杯之后时隔二十年第二次在亚洲举行的世界杯足球赛. 某学校统计了该校 500 名学生观看世界杯比赛直播的时长情况 (单位: 分钟),

将所得到的数据分成 7 组: $[0, 40), [40, 80), [80, 120), [120, 160), [160, 200),$

$[200, 240), [240, 280]$ (观看时长均在 $[0, 280]$ 内), 并根据样本数据绘制如图所示的频率分布直方图.



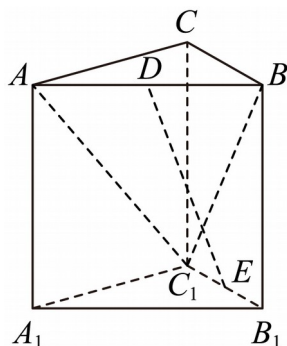
(1)求 a 的值，并估计样本数据的平均数（同一组中的数据用该组区间的中点值作代表）；

(2)采用分层抽样的方法在观看时长在 $[200, 240)$ 和 $[240, 280]$ 的学生中抽取 6 人，现从

这 6 人中随机抽取 2 人分享观看感想，求抽取的 2 人恰好观看时长在 $[200, 240)$ 的概率.

20. 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， D ， E 分别是棱 AB ， B_1C_1 的中点，

$$AC = BC = 2, \quad AA_1 = 3.$$



(1)求证： $DE \parallel$ 平面 ACC_1A_1 ；

(2)再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，并求直线 DE 与平面 ABC_1 所成的角的正弦值.

条件①： $BC \perp AC_1$ ； 条件②： $DE \perp B_1C_1$ ；

21. 已知圆 $C: (x-a)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ ，四点 $P_1(1, 1)$ ， $P_2(0, 2)$ ， $P_3(1, \sqrt{3})$ ， $P_4(1, -\sqrt{3})$ 中恰有三点在圆 C 上.

(1)求圆 C 的方程;

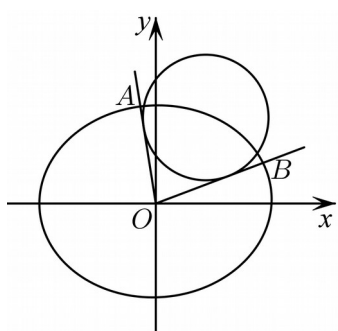
(2)设以 k 为斜率的直线 l 经过点 $Q(4, -2)$, 但不经过点 P_2 , 若 l 与圆 C 相交于不同两点 A, B .

①求 k 的取值范围;

②证明: 直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率之和为定值.

22. 如图所示, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 2 , 直线 $y = x$ 被椭圆 C 截

得的弦长为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.



(1)求椭圆 C 的方程;

(2)设点 $M(x_0, y_0)$ 是椭圆 C 上的动点, 过原点 O 引两条射线 l_1, l_2 与圆

$M: (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \frac{2}{3}$ 分别相切, 且 l_1, l_2 的斜率 k_1, k_2 存在. ①试问 $k_1 \cdot k_2$ 是否为定

值? 若是, 求出该定值, 若不是, 说明理由;

②若射线 l_1, l_2 与椭圆 C 分别交于点 A, B , 求 $|OA| \cdot |OB|$ 的最大值.

参考答案:

1. C

【分析】将点代入，解方程求 α 即可.

【详解】依题意可得 $4 = (\sqrt{2})^\alpha$,

则 $(\sqrt{2})^4 = (\sqrt{2})^\alpha$, 解得 $\alpha = 4$.

故选: C.

2. C

【分析】利用复数除法法则计算出 $z = \frac{1}{3+4i} = \frac{3}{25} - \frac{4i}{25}$, 从而求出虚部.

【详解】 $z = \frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3-4i}{25} = \frac{3}{25} - \frac{4i}{25}$,

故 $z = \frac{1}{3+4i}$ 的虚部为 $-\frac{4}{25}$.

故选: C

3. A

【分析】根据交集的概念, 找到两集合的公共元素即可.

【详解】 $A \cap B = \{0, 1, 2\}$.

故选 A.

4. B

【分析】根据一元二次不等式的解法、对数函数的单调性, 结合充分性、必要性的定义进行判断即可.

【详解】 $x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2$,

由 $\log_2 x < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x < \log_2 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 2$,

显然由 $-1 < x < 2$ 不一定能推出 $0 < x < 2$ ，但是由 $0 < x < 2$ 一定能推出 $-1 < x < 2$ ，

所以“ $x^2 - x - 2 < 0$ ”是“ $\log_2 x < 1$ ”的必要不充分条件，

故选：B

5. B

【分析】根据题意利用任意角的三角函数的定义，结合诱导公式可求得结果.

【详解】因为平面直角坐标系 xOy 中，角 α 与角 β 均以 Ox 为始边，它们的终边关于直线

$y = x$ 对称，

所以 $\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，即 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z}$ ，

所以 $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha + 2k, k \in \mathbb{Z}$ ，

因为 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ，

所以 $\cos \beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + 2k\pi\right) = \sin \alpha = \frac{4}{5}, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cap \mathbb{R}$ ，

故选：B

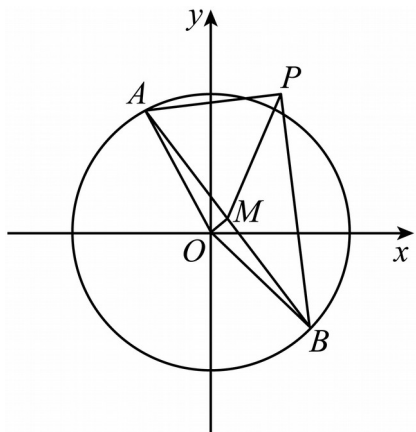
6. B

【分析】设 AB 的中点为 M ，得到 $|AM| = |BM| = |PM|$ ，根据 $OM \perp AB$ ，得到

$|OM|^2 + |PM|^2 = 4$ ，设 $M(x, y)$ ，求得 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{3}{4}$ ，得出点 M 的轨迹，再由

$|AB| = 2|PM|$ 可知，当 $|PM|$ 取最大值时， $|AB|$ 取最大值，结合圆的性质，即可求解.

【详解】如图所示，设 AB 的中点为 M ，连接 PM ，



因为点 $P(1,2)$ 在以 AB 为直径的圆上，所以 $PA \perp PB$ ，

$$\text{所以 } |AM| = |BM| = |PM| = \frac{1}{2}|AB|,$$

连接 AO ， BO ， MO ，则 $|AO| = |BO| = 2$ ，所以 $OM \perp AB$ ，

$$\text{所以 } |OM|^2 + |AM|^2 = |OM|^2 + |PM|^2 = |OA|^2 = 4,$$

$$\text{设 } M(x, y), \text{ 则 } x^2 + y^2 + (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4, \text{ 整理得 } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{3}{4},$$

所以点 M 的轨迹是以点 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 为圆心， $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 为半径的圆，

因为 $|AB| = 2|PM|$ ，所以当 $|PM|$ 取最大值时， $|AB|$ 取最大值，

$$\text{又因为 } |PM|_{\max} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + (2-1)^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2},$$

故 $|AB|$ 的最大值为 $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ 。

故选：B.

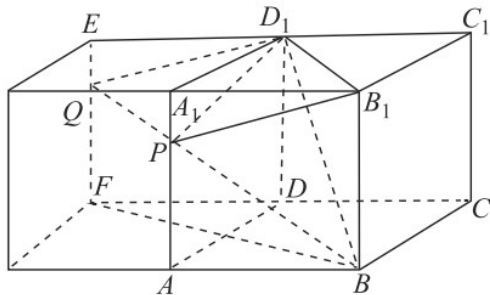
7. B

【分析】利用异面直线所成角的定义，结合补体，转化为相交直线所成的角，再利用余弦定理，即可求解.

【详解】由三棱锥 $A_1-PB_1D_1$ 的体积为 $\frac{1}{24}a^3$,

可知 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}a \cdot a \cdot A_1P = \frac{1}{24}a^3$, 即 $A_1P = \frac{1}{4}a$,

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 侧面补一个相同的正方体, 如图所示,



取 $EQ = \frac{1}{4}EF = \frac{1}{4}a$, 连 BF , 则易证明 $B_1P \parallel D_1Q$,

所以异面直线 PB_1 与 BD_1 所成的角即为 $\angle BD_1Q$ 或其补角,

则 $BF = \sqrt{5}a$, $BQ = \sqrt{5a^2 + \frac{9}{16}a^2} = \frac{\sqrt{89}}{4}a$, $D_1Q = \sqrt{a^2 + \frac{1}{16}a^2} = \frac{\sqrt{17}}{4}a$, $BD_1 = \sqrt{3}a$

在 $\triangle BD_1Q$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle BD_1Q = -\frac{\sqrt{51}}{17}$,

所以异面直线 PB_1 与 BD_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{51}}{17}$.

故选:B.

8. B

【分析】作出函数 $f(x), g(x)$ 的图象, 然后利用数形结合即得.

【详解】因为 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \in [0, 1) \\ 2 - x^2, & x \in [-1, 0) \end{cases}$, 且 $f(x+2) = f(x)$,

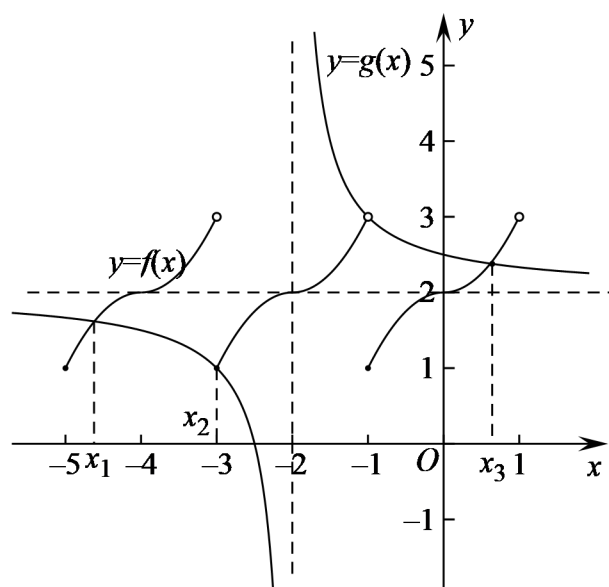
所以函数 $f(x)$ 的周期为 2,

$$\text{因为 } g(x) = \frac{2x+5}{x+2},$$

$$\text{所以 } g(x) = 2 + \frac{1}{x+2}, \text{ 所以 } g(x) - 2 = \frac{1}{x+2},$$

函数 $g(x)$ 关于点 $(-2, 2)$ 对称,

作出函数 $f(x), g(x)$ 的图象,



由图象可知, 方程 $g(x) = f(x)$ 在区间 $[-5, 1]$ 上的实数根有 3 个,

$$x_2 = -3, x_1 \text{ 满足 } -5 < x_1 < -4, \quad x_3 \text{ 满足 } 0 < x_3 < 1, x_1 + x_3 = -4,$$

所以方程 $g(x) = f(x)$ 在区间 $[-5, 1]$ 上的实数根之和为 -7 .

故选: B.

9. ABD

【分析】根据古典概型的知识对选项进行分析, 从而确定正确答案.

【详解】A 选项, 任意抛掷两枚骰子, 所得点数之和不满足“等可能”, 所以 A 选项不是

古典概型.

B 选项, 取出的正整数不满足“有限”, 所以 B 选项不是古典概型.

C 选项, 在甲、乙、丙、丁 4 名志愿者中, 任选一名志愿者参加跳高项目,

基本事件是有限的, 且是等可能的, 所以求甲被选中的概率属于古典概型, 所以 C 选项是古典概型.

D 选项, 抛掷的次数不满足“等可能”, 所以 D 选项不是古典概型.

故选: ABD

10. BD

【解析】先利用比重计算全部队员体重的平均值, 再利用平均值计算方差即可.

【详解】依题意, 甲的平均数 $\bar{x}_1 = 60$, 乙的平均数 $\bar{x}_2 = 68$, 而甲、乙两队的队员人数之比为 1: 3,

所以甲队队员在所有队员中所占比重为 $\frac{1}{4}$, 乙队队员在所有队员中所占比重为 $\frac{3}{4}$

故甲、乙两队全部队员的体重的平均数为: $\bar{x} = 60 \times \frac{1}{4} + 68 \times \frac{3}{4} = 66$;

甲、乙两队全部队员的体重的方差为:

$$s^2 = \frac{1}{4} \times [200 + (60 - 66)^2] + \frac{3}{4} \times [300 + (68 - 66)^2] = 59 + 228 = 287.$$

故选: BD.

11. AC

【分析】根据直线过定点、纵截距、倾斜角、数形结合等知识对选项进行分析, 从而确定正确答案.

【详解】A 选项, $y = ax - 2a + 3 = a(x - 2) + 3$ 过定点 $(2, 3)$, A 选项正确.

B 选项, 直线 $y + 1 = 2x$ 即 $y = 2x - 1$, 纵截距为 -1 , B 选项错误.

C 选项, 直线 $x + \sqrt{3}y + 3 = 0$ 的斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$,

倾斜角为 150° , C 选项正确.

D 选项, 直线 $l: mx + y - m - 1 = 0$ 即 $m(x-1) + y - 1 = 0$ 过定点 $C(1,1)$,

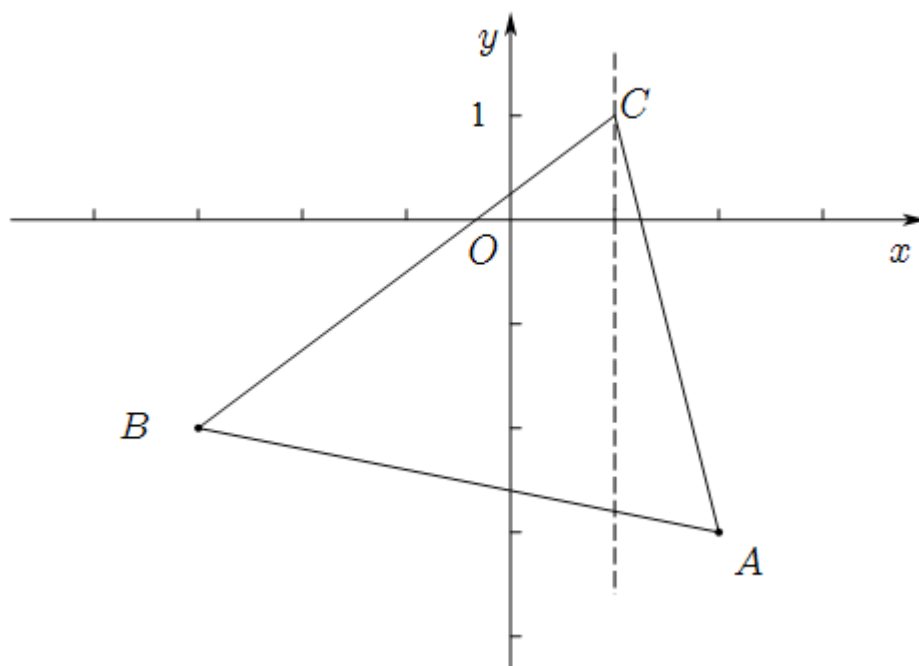
画出图象如下图所示,

其中 $k_{AC} = \frac{-4}{1} = -4, k_{BC} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$,

直线 l 的斜率为 $-m$, 所以 $-m \geq \frac{3}{4}$ 或 $-m \leq -4$,

解得 $m \geq 4$ 或 $m \leq -\frac{3}{4}$, 所以 D 选项错误.

故选: AC



12. ACD

【分析】对于选项 A, 利用面面平行的性质, 得到 $D_1F \parallel$ 平面 ABC , 从而可判断出选项 A

正确；对于选项 B，假设存在，可推出 $BF \perp$ 平面 AA_1D_1D ，从而判断选项 B 错误；对于选

项 C，利用线面角的定义，找出线面角为 $\angle PEP'$ ，从而在 $Rt\triangle PP'E$ 中，求出 $\tan\angle PEP'$ 的

值，进而判断选项 C 正确.对于选项 D，利用球的截面圆的几何性质，找出球心在直线 O_1O_2

上，利用 $R^2 = r^2 + d^2$ ，建立方程 $|OO_1|^2 + |O_1B|^2 = |OO_2|^2 + |O_2P|^2$ ，从而求出球的表面积取值范围.

【详解】对于 A，因为平面 $AA_1D_1D \parallel$ 平面 BB_1C_1C ，根据面面平行的性质，平面 α 与这两

个平面的交线互相平行，即 $D_1F \parallel BE$ ，

因为 $D_1F \not\subset$ 面 ABE ， $BE \subset$ 面 ABE ，所以 $D_1F \parallel$ 平面 ABE ，

又点 P 在线段 D_1F 上，所以三棱锥 $P-ABE$ 的体积为定值，故 A 正确；

对于 B，若存在点 P ，使得 $DP \perp \alpha$ ，因为 $BF \subset \alpha$ ，则 $DP \perp BF$ ，

因为 $DD_1 \perp BF, DD_1 \cap DP = D$ ， $DD_1, DP \subset$ 平面 AA_1D_1D ，所以 $BF \perp$ 平面 AA_1D_1D ，与题意矛盾，故 B 错误；

对于 C，如图 1 所示，取 BC 的中点 Q ，连接 C_1Q ，

则点 P 在平面 BCC_1B_1 内的射影 P' 在 C_1Q 上，直线 PE 与平面 BCC_1B_1 所成角即 $\angle PEP'$ ，且

$$\text{有 } \tan\angle PEP' = \frac{PP'}{EP'}$$

由已知可得 $PP' = 2$ ， EP' 最小为 $\sqrt{2}$ ，所以 $\tan\angle PEP'$ 的最大值为 $\sqrt{2}$ ，故 C 正确.

对于 D，如图 2，取 A_1D_1 的中点 G ，连接 AG ，分别取 BE, AG 的中点 O_1, O_2 ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/487030200036006050>