知识点31 利用导数求函数的极值问题（P3-25）

知识点32 利用导数求函数的最值问题（P26-53）

01

知识点31 利用导数求函数的极值问题

教材知识萃取

函数的极值

条件		
	侧	< >
图象		
极值		③$f(x_0)$为极小值 (x_0)
极值点		极小值点 x_0

极小值点和极大值点统称为⑤__极值点__，极小值和极大值统称为⑥__极值__

教材知识萃取

易错警示

（1）极值点不是点，若函数$f(x)$在x_1处取得极大值，则x_1为极大值点，极大值为$f(x_1)$.

(2)极大值与极小值没有必然关系，极小值可能比极大值还大.

(3)有极值的函数一定不是单调函数.

（4）$f'(x_0)=0$是x_0为可导函数$f(x)$的极值点的必要不充分条件，而非充要条件.

例如，$f(x)=x^3$，$f'(0)=0$，但$x=0$不是极值点.

教材知识萃取

方法技巧

根据函数图象判断极值的方法

（1）先找导数为0的点，再判断导数为0的点的左、右两侧的导数符号，进而判断函数极值的情况.

（2）由导函数$y=f'(x)$的图象可以看出$y=f'(x)$的值的正负，从而可得函数$y=f(x)$的单调性，进而求得极值.

教材知识萃取

方法技巧

求可导函数 $f(x)$ 的极值的步骤

（1）确定函数的定义域，求导数 $f'(x)$;

（2）求方程 $f'(x) = 0$ 的根;

教材知识萃取

（3）检验 $f'(x)$ 在方程 $f'(x)=0$ 的根的左右两侧的符号,具体如下表：

		x	$x<x_0$
		$f'(x)$	$f'(x)>0$
	增	$f(x)$	减
		x	$x<x_0$
		$f'(x)$	$f'(x)<0$
	减	$f(x)$	增

（4）得出结论.

教材知识萃取

方法技巧

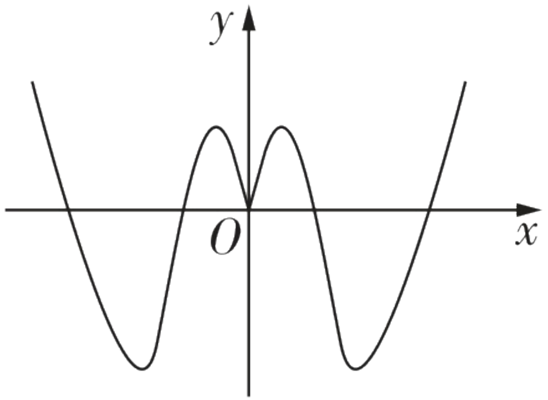
1.已知函数极值点或极值求参数的两个要领

列式	根据极值以及极值点处导数为0列方程（组），利用待定系数法求解.
验证	因为 必须验证根的合理性.

2.若函数$y=f(x)$在区间(a,b)上存在极值点，则$y=f(x)$在(a,b)上不是单调函数，即函数$y=f'(x)$在区间(a,b)内存在变号零点.

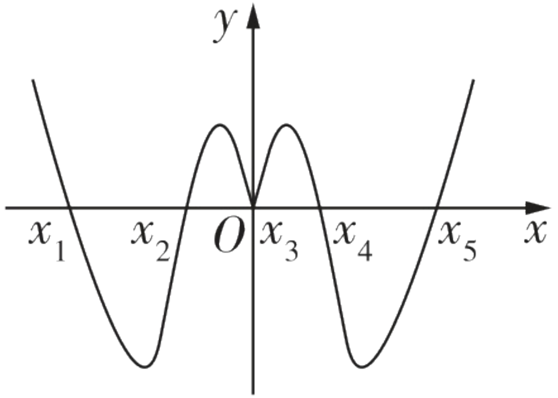
教材素材变式

1.［人A选必二P92练习第1题变式］函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，其导函数$f'(x)$的图象如图所示，则函数$f(x)$极值点的个数为(C)

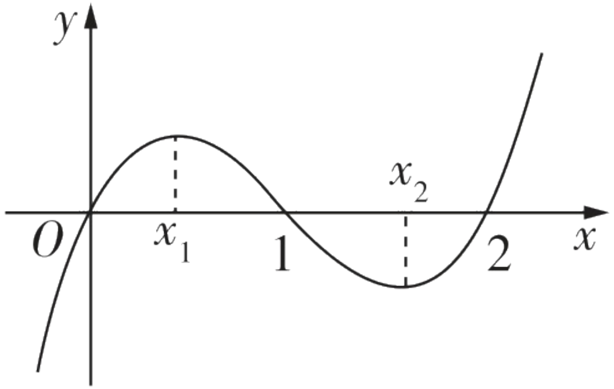


A.2　　B.3　　C.4　　D.5

【解析】如图所示，设导函数$f'(x)$的图象与x轴的交点的横坐标从左到右分别为x_1,x_2,x_3,x_4,x_5，由函数的极值的定义可知，在极值点处左右两侧的导函数值符号相反，可得x_1,x_4为函数$f(x)$的极大值点，x_2,x_5为函数$f(x)$的极小值点，所以函数$f(x)$极值点的个数为4.故选C．



2. [人B选必三P100练习A第1题变式] 已知函数$y=f(x)=x^3+bx^2+cx$的图象如图所示，则$x_1\cdot x_2=$(C)



A.2　　B.$\frac{4}{3}$　　C.$\frac{2}{3}$　　D.$\frac{1}{2}$

【解析】由题图知，$x=1$和$x=2$是方程$f(x)=x^3+bx^2+cx=0$的根，即

$\begin{cases} f(1)=1+b+c=0, \\ f(2)=8+4b+2c=0, \end{cases}$解得$\begin{cases} b=-3, \\ c=2, \end{cases}$所以$f(x)=x^3-3x^2+2x$，则

$f'(x)=3x^2-6x+2$．由题图知x_1,x_2是函数$f(x)$的极值点，即x_1,x_2是$f'(x)=0$的两个根，即x_1,x_2是

$3x^2-6x+2=0$的两个根，则$x_1\cdot x_2=\frac{2}{3}$，故选C．

3.［多选］［人A选必二P95例3变式］已知函数$f(x)=xe^{2x}-x^2-x-\frac{1}{4}$，则（ **ACD** ）

A.$-\frac{1}{2}$和0是函数$f(x)$的极值点

B.$f(x)$在$[-\frac{1}{2},0]$上单调递增

C.$f(x)$的极大值为$-\frac{1}{2e}$

D.$f(x)$的极小值为$-\frac{1}{4}$

【解析】由题得$f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}-2x-1=e^{2x}(2x+1)-(2x+1)=(2x+1)(e^{2x}-1)$，当$x<-\frac{1}{2}$或$x>0$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增，当$-\frac{1}{2}<x<0$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减，所以$-\frac{1}{2}$和0分别是函数$f(x)$的极大值点和极小值点，所以选项A正确；$f(x)$在$[-\frac{1}{2},0]$上单调递减，所以选项B错误；$f(x)$的极大值为$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\times e^{-1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2e}$，所以选项C正确；$f(x)$的极小值为$f(0)=-\frac{1}{4}$，所以选项D正确.故选ACD.

4. [人B选必三P101练习B第3题变式] 已知函数$f(x)=x^3+ax^2+bx+a^2$在$x=1$处有极值10，则$a=$__4__，$b=$__-11__.

【解析】 $f'(x)=3x^2+2ax+b$.由题意得，$\begin{cases}f'(1)=0,\\f(1)=10,\end{cases}$即$\begin{cases}2a+b+3=0,\\a^2+a+b+1=10,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=4,\\b=-11\end{cases}$或$\begin{cases}a=-3,\\b=3.\end{cases}$当$a=4$，$b=-11$时，$f'(x)=3x^2+8x-11=(3x+11)(x-1)$，在$x=1$的左、右附近，$f'(x)$异号，此时$f(x)$在$x=1$处有极值；当$a=-3$，$b=3$时，$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$，在$x=1$的左、右附近，恒有$f'(x)>0$，不变号，此时$f(x)$在$x=1$处无极值.（防范：本题易错在将有极值的必要条件$f'(x_0)=0$当作充要条件使用.一般地对于可导函数$f(x)$，$f'(x_0)=0$是在$x_0$处取得极值的必要而非充分条件，解题时还要验证在$x_0$左、右附近$f'(x_0)$是否异号，否则会产生增解）故$a=4$，$b=-11$.

变式1 **在定义域上有极值**已知函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-cx-d$有极值，则$c$的取值范围为(　　)D

A.$\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)$　　B.$(-\infty,-\frac{1}{4}]$　　C.$[-\frac{1}{4},+\infty)$　　D.$\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$

【解析】由题意知，$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，$f'(x)=x^2+x-c$，要使函数$f(x)$有极值，则$f'(x)=0$必有两个不等的实根，则$\Delta=1+4c>0$，解得$c>-\frac{1}{4}$．故选D．

变式2 **在区间上有极值**［多选］已知函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2ax+1$，若函数$f(x)$在$(1,2)$上有极值，则实数$a$可以取(**BCD**)

A.$\frac{3}{2}$ B.2 C.$\frac{5}{2}$ D.3

【解析】由题意知，$f'(x)=x^2+2x-2a$在$(1,2)$上有变号零点，易知$f'(x)=x^2+2x-2a$在$(1,2)$上单调递增，故$f'(x)\in(3-2a,8-2a)$，可得$\begin{cases}3-2a<0,\\8-2a>0,\end{cases}$解得$\frac{3}{2}<a<4$.故选BCD.

变式3 **在区间上有极小值**若函数$f(x)=x^3-3ax+1$在区间$(0,1)$上有极小值，则实数a的取值范围为$\underline{(0,1)}$.

【解析】 第1步：对$f(x)$求导

由$f(x)=x^3-3ax+1$可得$f'(x)=3x^2-3a$.

第2步：讨论$a\leq 0$时，$f(x)$的极值

当$a\leq 0$时，$f'(x)=3x^2-3a>0$在区间$(0,1)$上恒成立，$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，无极值．

第3步：讨论$a>0$时，$f(x)$的极值

当$a>0$时，令$f'(x)=3x^2-3a>0$，可得$x>\sqrt{a}$或$x<-\sqrt{a}$，令$f'(x)=3x^2-3a<0$，可得$-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$，所以当$a>0$时，$f(x)$在$x=\sqrt{a}$处取得极小值.

第4步：求a的取值范围

若函数$f(x)$在区间$(0,1)$上有极小值，则$0<\sqrt{a}<1$，得$0<a<1$.所以实数a的取值范围为$(0,1)$.