

江苏省梁丰高级中学 2024 届高三第一次调研测试数学试卷

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

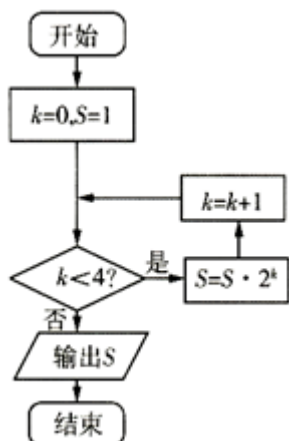
1. 已知全集 $\square = \{\square \mid \square^2 \leq 4, \square \in \square\}$ ， $\square = \{1, 2\}$ ，则 $\square \square = ()$

- A. $\{-1\}$ B. $\{-1, 0\}$ C. $\{-2, -1, 0\}$ D. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

2. 若 $(1-x)^{2019} = a_0 + a_1(x+1) + \dots + a_{2019}(x+1)^{2019}$ ， $x \in \mathbf{R}$ ，则 $a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 + \dots + a_{2019} \cdot 3^{2019}$ 的值为 $()$

- A. $-1-2^{2019}$ B. $-1+2^{2019}$ C. $1-2^{2019}$ D. $1+2^{2019}$

3. 执行如图所示的程序框图，则输出的 S 的值是 $()$



- A. 8 B. 32 C. 64 D. 128

4. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$)，以点 $P(b, 0)$ 为圆心， a 为半径作圆 P ，圆 P 与双曲线 C 的一条渐近线交于 M ， N 两点，若 $\angle MPN = 90^\circ$ ，则 C 的离心率为 $()$

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

5. 已知函数 $f(x) = \ln x - 2ax$ ， $g(x) = \frac{4ax^2}{\ln x} - 2x$ ，若方程 $f(x) = g(x)$ 恰有三个不相等的实根，则 a 的取值范围为 $()$

- A. $(0, e]$ B. $\left(0, \frac{1}{2e}\right]$

C. $(e, +\infty)$

D. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$

6. 已知 F_1, F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点， P 是它们的一个公共点，且 $\angle F_1PF_2 = \frac{2\pi}{3}$ ，设椭圆和双曲线的离心率分别为 e_1, e_2 ，则 e_1, e_2 的关系为（ ）

A. $\frac{3}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 4$

B. $\frac{4}{3}e_1^2 + \frac{1}{3}e_2^2 = 4$

C. $\frac{1}{e_1^2} + \frac{3}{e_2^2} = 4$

D. $e_1^2 + 3e_2^2 = 4$

7. 已知集合 $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ， $B = \{2, 3, 4, 5\}$ ，则 $A \cap B =$

A. $\{3\}$

B. $\{5\}$

C. $\{3, 5\}$

D. $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

8. 抛物线 $\square: \square^2 = 2\square\square$ 的焦点 $\square$ 是双曲线 $\square_2: \frac{\square^2}{\square} - \frac{\square^2}{1-\square} = 1 (0 < \square < 1)$ 的右焦点，点 $\square$ 是曲线 $\square_1, \square_2$ 的交点，点 $\square$ 在抛物线的准线上， $\square\square\square$ 是以点 $\square$ 为直角顶点的等腰直角三角形，则双曲线 $\square_2$ 的离心率为（ ）

A. $\sqrt{2} + 1$

B. $2\sqrt{2} + 3$

C. $2\sqrt{10} - 3$

D. $2\sqrt{10} + 3$

9. 设集合 $M = \{x | x^2 + 3x + 2 > 0\}$ ，集合 $N = \{x | (\frac{1}{2})^x \leq 4\}$ ，则 $M \cup N =$ （ ）

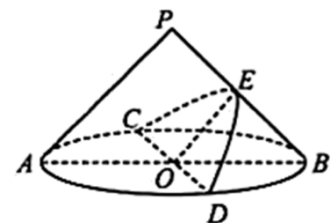
A. $\{x | x \geq -2\}$

B. $\{x | x > -1\}$

C. $\{x | x \leq -2\}$

D. $\mathbb{R}$

10. 如图，圆锥底面半径为 $\sqrt{2}$ ，体积为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ ， AB 、 CD 是底面圆 O 的两条互相垂直的直径， E 是母线 PB 的中点，已知过 CD 与 E 的平面与圆锥侧面的交线是以 E 为顶点的抛物线的一部分，则该抛物线的焦点到圆锥顶点 P 的距离等于（ ）



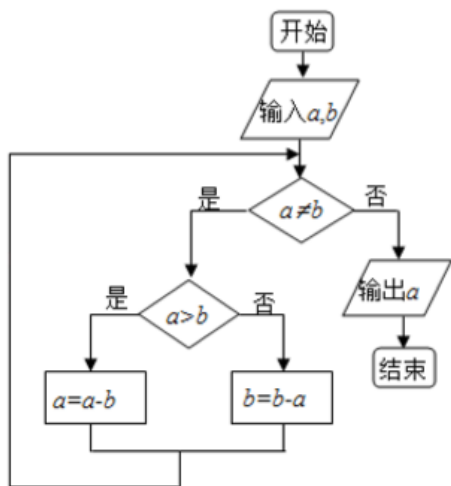
A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. $\frac{\sqrt{10}}{4}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

11. 如下的程序框图的算法思路源于我国古代数学名著《九章算术》中的“更相减损术”。执行该程序框图，若输入的 a, b 分别为 176, 320，则输出的 a 为（ ）



- A. 16 B. 18 C. 20 D. 15

12. 已知函数 $f(x) = te^{2x} + (t-2)e^x - x$ ($t \geq 0$), 若函数 $f(x)$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 上有唯一零点, 则 t 的值为 ()

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ 或 0 C. 1 或 0 D. 2 或 0

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 F 为抛物线 $C: x^2 = 8y$ 的焦点, P 为 C 上一点, $M(-4, 3)$, 则 $\triangle PMF$ 周长的最小值是_____.

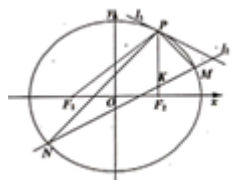
14. 已知函数 $f(x) = e^{2x}$, 则过原点且与曲线 $y = f(x)$ 相切的直线方程为_____.

15. 曲线 $f(x) = (x^2 + x)\ln x$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为_____.

16. 验证码就是将一串随机产生的数字或符号, 生成一幅图片, 图片里加上一些干扰像素 (防止 OCR), 由用户肉眼识别其中的验证码信息, 输入表单提交网站验证, 验证成功后才能使用某项功能. 很多网站利用验证码技术来防止恶意登录, 以提升网络安全. 在抗疫期间, 某居民小区电子出入证的登录验证码由 0, 1, 2, ..., 9 中的五个数字随机组成. 将中间数字最大, 然后向两边对称递减的验证码称为“钟型验证码” (例如: 如 14532, 12543), 已知某人收到了一个“钟型验证码”, 则该验证码的中间数字是 7 的概率为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别是 F_1, F_2 , 点 $P(1, \frac{3}{2})$ 在椭圆 C 上, 满足 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = \frac{9}{4}$

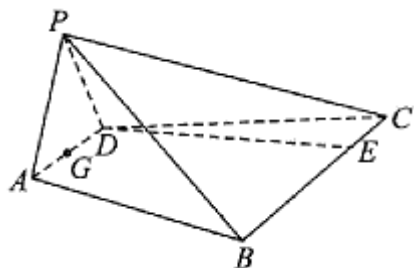


(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 直线 l_1 过点 P , 且与椭圆只有一个公共点, 直线 l_1 与 l_2 的倾斜角互补, 且与椭圆交于异于点 P 的两点 M, N , 与直线 $x=1$ 交于点 K (K 介于 M, N 两点之间), 是否存在直线 l_2 , 使得直线 l_1, l_2, PM, PN

的斜率按某种排序能构成等比数列？若能，求出 l_2 的方程，若不能，请说明理由。

18. (12 分) 如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是等腰梯形， $AD \parallel BC$ ， $AD=2$ ， $BC=4$ ， $\angle ABC=60^\circ$ ， $\triangle PAD$ 为等边三角形，且点 P 在底面 $ABCD$ 上的射影为 AD 的中点 G ，点 E 在线段 BC 上，且 $CE:EB=1:3$ 。



(1) 求证： $DE \perp$ 平面 PAD 。

(2) 求二面角 $A-PC-D$ 的余弦值。

19. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与抛物线 $y^2 = 4x$ 有共同的焦点，且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，设 F_1, F_2 分别是

A, B 为椭圆的上下顶点

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 过点 $(0, 2)$ 与 x 轴不垂直的直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 M, N ，当弦 MN 的中点 P 落在四边形 F_1AF_2B 内（含边界）时，求直线 l 的斜率的取值范围。

20. (12 分) 已知点 $P(1, \frac{3}{2})$, $\vec{a} = (x-1, y)$, $\vec{b} = (x+1, y)$ ，且 $|\vec{a}| + |\vec{b}| = 4$ ，满足条件的 $Q(x, y)$ 点的轨迹为曲线 C 。

(1) 求曲线 C 的方程；

(2) 是否存在过点 $(0, -1)$ 的直线 l ，直线 l 与曲线 C 相交于 A, B 两点，直线 PA, PB 与 y 轴分别交于 M, N 两点，使得 $|PM| = |PN|$ ？若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，请说明理由。

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = |x-k| + |x+2| (k \in \mathbb{R})$, $g(x) = |2x+m| (m \in \mathbb{Z})$ 。

(1) 若关于 x 的不等式 $g(x) \leq 1$ 的整数解有且仅有一个值 -4 ，当 $k=1$ 时，求不等式 $f(x) \leq m$ 的解集；

(2) 已知 $h(x) = x^2 - 2x + 3$ ，若 $\forall x_1 \in \mathbb{R}, \exists x_2 \in (0, +\infty)$ ，使得 $f(x_1) \leq h(x_2)$ 成立，求实数 k 的取值范围。

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = ax^2 - a - \ln x$ ， $\exists a \in [0, +\infty)$ ，使得对任意两个不等的正实数 x_1, x_2 ，都有

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \text{ 恒成立.}$$

(1) 求 $f(x)$ 的解析式；

(2) 若方程 $\frac{1}{2x} = f(x) + m$ 有两个实根 x_1, x_2 ，且 $x_1 < x_2$ ，求证： $x_1 + x_2 > 1$ 。

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

先求出集合 U，再根据补集的定义求出结果即可。

【详解】

由题意得 $\square = \{\square \mid \square^2 \leq 4, \square \in \square\} = \{\square \mid -2 \leq \square \leq 2, \square \in \square\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ，

$\therefore \square = \{1, 2\}$ ，

$\therefore \square \square = \{-2, -1, 0\}$ 。

故选 C。

【点睛】

本题考查集合补集的运算，求解的关键是正确求出集合 $\square$ 和熟悉补集的定义，属于简单题。

2、A

【解析】

取 $x = -1$ ，得到 $a_0 = 2^{2019}$ ，取 $x = 2$ ，则 $a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 + \dots + a_{2019} \cdot 3^{2019} = -1$ ，计算得到答案。

【详解】

取 $x = -1$ ，得到 $a_0 = 2^{2019}$ ；取 $x = 2$ ，则 $a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 + \dots + a_{2019} \cdot 3^{2019} = -1$ 。

故 $a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 + \dots + a_{2019} \cdot 3^{2019} = -1 - 2^{2019}$ 。

故选：A。

【点睛】

本题考查了二项式定理的应用，取 $x = -1$ 和 $x = 2$ 是解题的关键。

3、C

【解析】

根据给定的程序框图，逐次计算，结合判断条件，即可求解.

【详解】

由题意，执行上述程序框图，可得

第 1 次循环，满足判断条件， $S = 1, k = 1$ ；

第 2 次循环，满足判断条件， $S = 2, k = 2$ ；

第 3 次循环，满足判断条件， $S = 8, k = 3$ ；

第 4 次循环，满足判断条件， $S = 64, k = 4$ ；

不满足判断条件，输出 $S = 64$.

故选：C.

【点睛】

本题主要考查了循环结构的程序框图的计算与输出，其中解答中认真审题，逐次计算，结合判断条件求解是解答的关键，着重考查了推理与运算能力，属于基础题.

4、A

【解析】

求出双曲线的一条渐近线方程，利用圆 P 与双曲线 C 的一条渐近线交于 M, N 两点，且 $\angle MPN = 90^\circ$ ，则可根据圆心

到渐近线距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 列出方程，求解离心率.

【详解】

不妨设双曲线 C 的一条渐近线 $bx - ay = 0$ 与圆 P 交于 M, N ，

因为 $\angle MPN = 90^\circ$ ，所以圆心 P 到 $bx - ay = 0$ 的距离为： $\frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b^2}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ ，

即 $2c^2 - 2a^2 = \sqrt{2}ac$ ，因为 $e = \frac{c}{a} > 1$ ，所以解得 $e = \sqrt{2}$.

故选 A.

【点睛】

本题考查双曲线的简单性质的应用，考查了转化思想以及计算能力，属于中档题. 对于离心率求解问题，关键是建立关于 a, c 的齐次方程，主要有两个思考方向，一方面，可以从几何的角度，结合曲线的几何性质以及题目中的几何关系建立方程；另一方面，可以从代数的角度，结合曲线方程的性质以及题目中的代数的关系建立方程.

5、B

【解析】

由题意可将方程转化为 $\frac{\ln x}{x} - 2a = \frac{4ax}{\ln x} - 2$ ，令 $t(x) = \frac{\ln x}{x}$ ， $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ ，进而将方程转化为 $[t(x)+2][t(x)-2a]=0$ ，即 $t(x)=-2$ 或 $t(x)=2a$ ，再利用 $t(x)$ 的单调性与最值即可得到结论。

【详解】

由题意知方程 $f(x)=g(x)$ 在 $(0,1) \cup (1,+\infty)$ 上恰有三个不相等的实根，

$$\text{即 } \ln x - 2ax = \frac{4ax^2}{\ln x} - 2x, \quad \textcircled{1}.$$

因为 $x > 0$ ， $\textcircled{1}$ 式两边同除以 x ，得 $\frac{\ln x}{x} - 2a = \frac{4ax}{\ln x} - 2$ 。

所以方程 $\frac{\ln x}{x} - 2a - \frac{4ax}{\ln x} + 2 = 0$ 有三个不等的正实根。

$$\text{记 } t(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x \in (0,1) \cup (1,+\infty), \text{ 则上述方程转化为 } t(x) - 2a - \frac{4a}{t(x)} + 2 = 0.$$

$$\text{即 } [t(x)+2][t(x)-2a]=0, \text{ 所以 } t(x)=-2 \text{ 或 } t(x)=2a.$$

因为 $t'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ ，当 $x \in (0,1) \cup (1,e)$ 时， $t'(x) > 0$ ，所以 $t(x)$ 在 $(0,1)$ ， $(1,e)$ 上单调递增，且 $x \rightarrow 0$ 时， $t(x) \rightarrow -\infty$ 。

当 $x \in (e,+\infty)$ 时， $t'(x) < 0$ ， $t(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，且 $x \rightarrow +\infty$ 时， $t(x) \rightarrow 0$ 。

所以当 $x=e$ 时， $t(x)$ 取最大值 $\frac{1}{e}$ ，当 $t(x)=-2$ ，有一根。

所以 $t(x)=2a$ 恰有两个不相等的实根，所以 $0 < a < \frac{1}{2e}$ 。

故选：B.

【点睛】

本题考查了函数与方程的关系，考查函数的单调性与最值，转化的数学思想，属于中档题。

6、A

【解析】

设椭圆的半长轴长为 a_1 ，双曲线的半长轴长为 a_2 ，根据椭圆和双曲线的定义得：
$$\begin{cases} |PF_1| + |PF_2| = 2a_1 \\ |PF_1| - |PF_2| = 2a_2 \end{cases}, \text{ 解得}$$

$$\begin{cases} |PF_1| = a_1 + a_2 \\ |PF_2| = a_1 - a_2 \end{cases}, \text{ 然后在 } \triangle F_1PF_2 \text{ 中, 由余弦定理得:}$$

$4c^2 = (a_1 + a_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 - 2(a_1 + a_2) \cdot (a_1 - a_2) \cdot \cos \frac{2\pi}{3}$ ，化简求解.

【详解】

设椭圆的长半轴长为 a_1 ，双曲线的长半轴长为 a_2 ，

由椭圆和双曲线的定义得：
$$\begin{cases} |PF_1| + |PF_2| = 2a_1 \\ |PF_1| - |PF_2| = 2a_2 \end{cases},$$

解得 $\begin{cases} |PF_1| = a_1 + a_2 \\ |PF_2| = a_1 - a_2 \end{cases}$ ，设 $|F_1F_2| = 2c$, $\angle F_1PF_2 = \frac{2\pi}{3}$ ，

在 $\triangle F_1PF_2$ 中，由余弦定理得： $4c^2 = (a_1 + a_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 - 2(a_1 + a_2) \cdot (a_1 - a_2) \cdot \cos \frac{2\pi}{3}$ ，

化简得 $3a_1^2 + a_2^2 = 4c^2$ ，

即 $\frac{3}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 4$ 。

故选：A

【点睛】

本题主要考查椭圆，双曲线的定义和性质以及余弦定理的应用，还考查了运算求解的能力，属于中档题。

7、C

【解析】

分析：根据集合 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ 可直接求解 $A \cap B = \{3, 5\}$ 。

详解：Q $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ ，

$$\therefore A \cap B = \{3, 5\},$$

故选 C

点睛：集合题也是每年高考的必考内容，一般以客观题形式出现，一般解决此类问题时要先将参与运算的集合化为最简形式，如果是“离散型”集合可采用 Venn 图法解决，若是“连续型”集合则可借助不等式进行运算。

8、A

【解析】

先由题和抛物线的性质求得点 P 的坐标和双曲线的半焦距 c 的值，再利用双曲线的定义可求得 a 的值，即可求得离心率。

【详解】

由题意知，抛物线焦点 $F(1, 0)$ ，准线与 x 轴交点 $M(-1, 0)$ ，双曲线半焦距 $c = 1$ ，设点 $P(-1, y_0)$ 是以点 M 为直角顶点的等腰直角三角形，即 $|PM| = |PF|$ ，结合 P 点在抛物线上，

所以 $\square\square \perp$ 抛物线的准线，从而 $\square\square \perp \square$ 轴，所以 $\square(1,2)$ ，

$$\therefore 2\square = |\square\square'| - |\square\square| = 2\sqrt{2} - 2$$

$$\text{即 } \square = \sqrt{2} - 1.$$

故双曲线的离心率为 $\square = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1.$

故选 A

【点睛】

本题考查了圆锥曲线综合，分析题目，画出图像，熟悉抛物线性质以及双曲线的定义是解题的关键，属于中档题.

9、D

【解析】

试题分析：由题 $M = \{x | x^2 + 3x + 2 > 0\} = \{x | x < -2 \text{ 或 } x > -1\}$ ，

$$N = \left\{x \mid \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 4\right\} = \left\{x \mid \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right\} = N = \{x | x \geq -2\}, \therefore M \cup N = R, \text{ 选 D}$$

考点：集合的运算

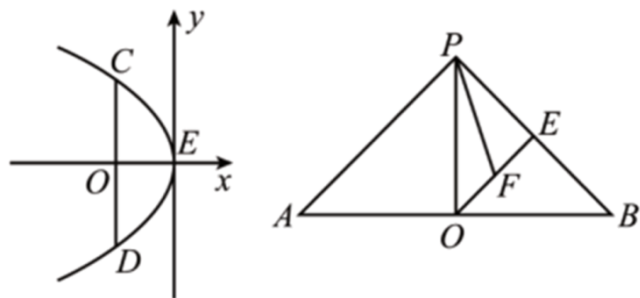
10、D

【解析】

建立平面直角坐标系，求得抛物线的轨迹方程，解直角三角形求得抛物线的焦点到圆锥顶点 P 的距离.

【详解】

将抛物线放入坐标系，如图所示，



$$\because PO = \sqrt{2}, OE = 1, OC = OD = \sqrt{2},$$

$$\therefore C(-1, \sqrt{2}), \text{ 设抛物线 } y^2 = 2px, \text{ 代入 } C \text{ 点,}$$

$$\text{可得 } y^2 = -2x$$

$$\therefore \text{焦点为} \left(-\frac{1}{2}, 0\right),$$

即焦点为 OE 中点, 设焦点为 F ,

$$EF = \frac{1}{2}, \quad PE = 1, \quad \therefore PF = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

故选: D

【点睛】

本小题考查圆锥曲线的概念, 抛物线的性质, 两点间的距离等基础知识; 考查运算求解能力, 空间想象能力, 推理论证能力, 应用意识.

11、A

【解析】

根据题意可知最后计算的结果为 a, b 的最大公约数.

【详解】

输入的 a, b 分别为 176, 320, 根据流程图可知最后计算的结果为 a, b 的最大公约数, 按流程图计算 $320-176=144$, $176-144=32$, $144-32=112$, $112-32=80$, $80-32=48$, $48-32=16$, $32-16=16$, 易得 176 和 320 的最大公约数为 16,

故选: A.

【点睛】

本题考查的是利用更相减损术求两个数的最大公约数, 难度较易.

12、C

【解析】

求出函数的导函数, 当 $t > 0$ 时, 只需 $f(-\ln t) = 0$, 即 $\ln t - \frac{1}{t} + 1 = 0$, 令 $g(t) = \ln t - \frac{1}{t} + 1$, 利用导数求其单调区间, 即可求出参数 t 的值, 当 $t = 0$ 时, 根据函数的单调性及零点存在性定理可判断;

【详解】

$$\text{解: } \because f(x) = te^{2x} + (t-2)e^x - x \quad (t \geq 0),$$

$$\therefore f'(x) = 2te^{2x} + (t-2)e^x - 1 = (te^x - 1)(2e^x + 1), \quad \therefore \text{当 } t > 0 \text{ 时, 由 } f'(x) = 0 \text{ 得 } x = -\ln t,$$

则 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln t)$ 上单调递减, 在 $(-\ln t, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(-\ln t)$ 是极小值, $\therefore$ 只需 $f(-\ln t) = 0$,

$$\text{即 } \ln t - \frac{1}{t} + 1 = 0. \text{ 令 } g(t) = \ln t - \frac{1}{t} + 1, \text{ 则 } g'(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} > 0, \therefore \text{函数 } g(t) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单}$$

调递增. $\therefore g(1) = 0, \therefore t = 1$;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/487113120116006114>