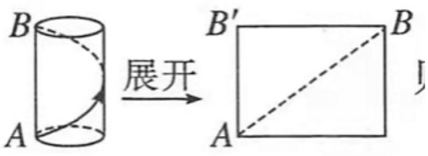
专题 15 勾股定理中的最短路径模型

勾股定理中的最短路线问题通常是以“两点之间，线段最短”为基本原理推出的。人们在生产、生活实践中，常常遇到带有某种限制条件的最近路线即最短路线问题。对于数学中的最短路线问题可以分为两大类：第一类为在同一平面内；第二类为空间几何体中的最短路线问题，对于平面内的最短路线问题可先画出方案图，然后确定最短距离及路径图。对于几何题内问题的关键是将立体图形转化为平面问题求解，然后构造直角三角形，利用勾股定理求解。

模型 1.圆柱中的最短路径模型

【模型解读】圆柱体中最短路径基本模型如下：



圆柱

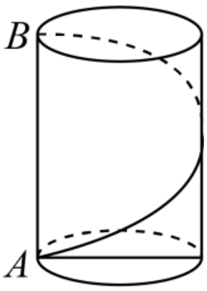
计算跟圆柱有关的最短路径问题时，要注意圆柱的侧面展开图为矩形，利用两点之间线段最短结合勾股定理进行求解，注意展开后两个端点的位置，有时候需要用底面圆的周长进行计算，有时候需要用底面圆周长的一半进行计算。

注意：1）运用勾股定理计算最短路径时，按照展开—定点—连线—勾股定理的步骤进行计算；

2）缠绕类题型可以求出一圈的最短长度后乘以圈数。

【最值原理】两点之间线段最短。

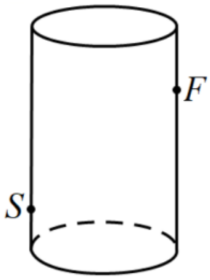
例 1．（2023 春·湖北武汉·八年级统考期中）如图，圆柱的底面周长为 32cm，高为 24cm，从圆柱底部 A 处沿侧面缠绕一圈丝线到顶部 B 处做装饰（点 B 在点 A 的正上方），则这条丝线的最小长度为（　　）



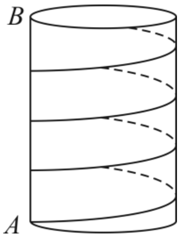
A．30cm　　B．40cm　　C．50cm　　D．60cm

例 2．（2023·重庆·八年级期末）如图，圆柱形玻璃杯高14cm，底面周长为18cm，在外侧距下底处1cm有一只蜘蛛，与蜘蛛相对的圆柱形容器的上端距开口处1cm

的外侧点处有一只苍蝇，蜘蛛捕到苍蝇的最短路线长是______cm．



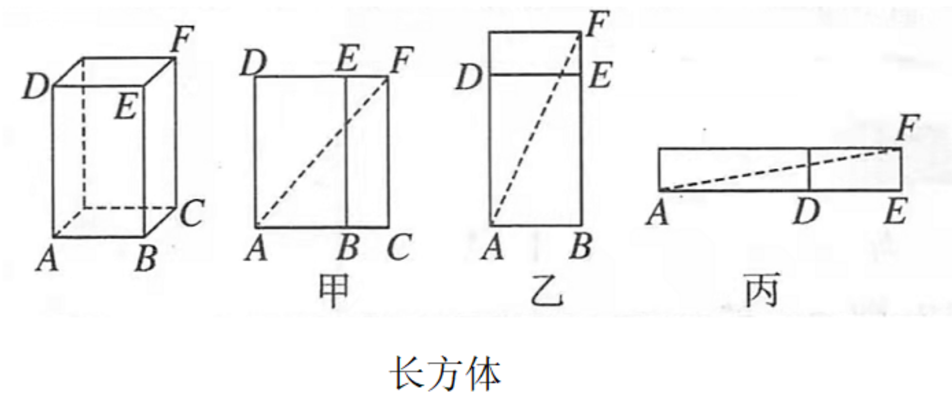
例 3．（2023 春·河南新乡·八年级新乡市第十中学校考期末）如图，小冰想用一条彩带缠绕圆柱 4 圈，正好从 A 点绕到正上方的 B 点，已知知圆柱底面周长是 3m，高为 16m，则所需彩带最短是（　　）m．



A．8　　　　B．5　　　　C．20　　　　D．10

模型 2.长方体中的最短路径模型

【模型解读】长方体中最短路径基本模型如下：



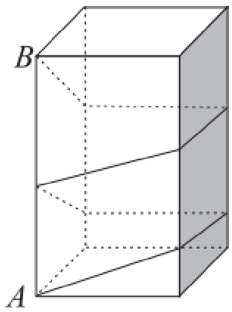
计算跟长方体有关的最短路径问题时，要熟悉长方体的侧面展开图，利用两点之间线段最短结合勾股定理进行求解，注意长方体展开图的多种情况和分类讨论。

注意：1）长方体展开图分类讨论时可按照“前+右”、“前+上”和“左+上”三种情况进行讨论；

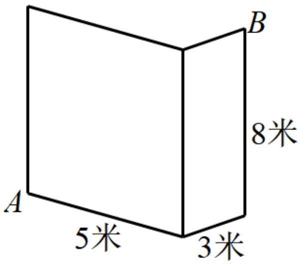
2）两个端点中有一个不在定点时讨论方法跟第一类相同。

【最值原理】两点之间线段最短。

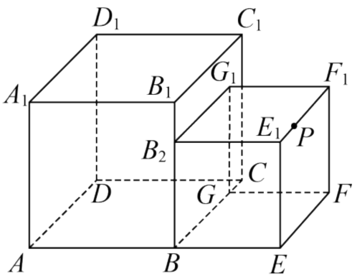
例 1．（2023·四川乐山·八年级统考期末）如图，长方体的底面是边长为1cm 的正方形，高为4cm．如果从点A 开始经过 4 个侧面缠绕 2 圈到达点 B，那么所用细线最短需要_______cm．



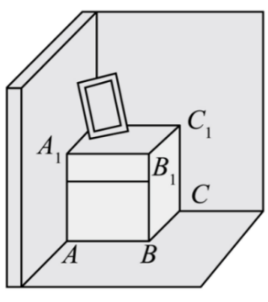
例 2．（2023·浙江·八年级假期作业）小南同学报名参加了学校的攀岩选修课，攀岩墙近似一个长方体的两个侧面，如图所示，他根据学过的数学知识准确地判断出：从点 A 攀爬到点 B 的最短路径为________米．



例 3．（2023 春·广东八年级课时练习）棱长分别为5cm,3cm 两个正方体如图放置，点 P 在 E_1F_1 上，且 $E_1P=\frac{1}{3}E_1F_1$，一只蚂蚁如果要沿着长方体的表面从点 A 爬到点 P，需要爬行的最短距离是______．



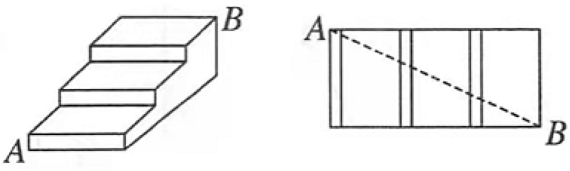
例 4．（2023 春·山西大同·八年级统考期中）如图，在墙角处放着一个长方体木柜（木柜与墙面和地面均没有缝隙），一只蚂蚁从柜角 A 处沿着木柜表面爬到柜角 C_1 处．若 $AB=3$， $BC=4$， $CC_1=5$，则蚂蚁爬行的最短路程是（　）



A．$\sqrt{74}$　　B．$3\sqrt{10}$　　C．$\sqrt{89}$　　D．12

模型 3.阶梯中的最短路径模型

【模型解读】阶梯中最短路径基本模型如下：

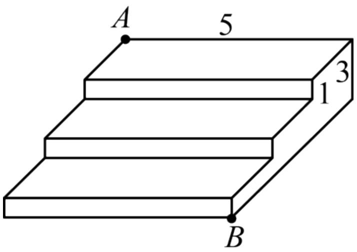


阶梯问题

注意：展开—定点—连线—勾股定理

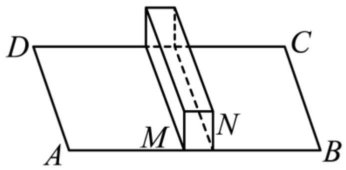
【最值原理】两点之间线段最短。

例 1．（2023 秋·山东枣庄·八年级校考开学考试）如图一个三级台阶，它的每一级的长宽高分别是 5 cm，3 cm 和 1 cm，A 和 B 是这个台阶的两个相对的端点，点A 上有一只蚂蚁，想到点 B 去吃可口的食物，则蚂蚁沿着台阶面爬到点 B 的最短路程长为（　　）

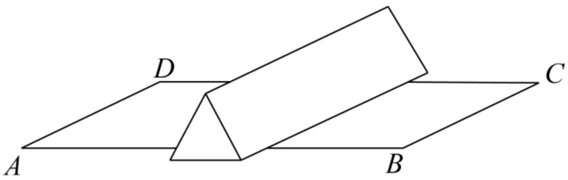


A．10　　　　B．11　　　　C．12　　　　D．13

例 2．（2023 春·四川成都·九年级校考阶段练习）如图所示，$ABCD$ 是长方形地面，长 $AB=20\text{m}$，宽 $AD=10\text{m}$．中间竖有一堵砖墙高 $MN=2\text{m}$．一只蚂蚱从A 点爬到 C 点，它必须翻过中间那堵墙，则它要走的路程 s 取值范围是________．

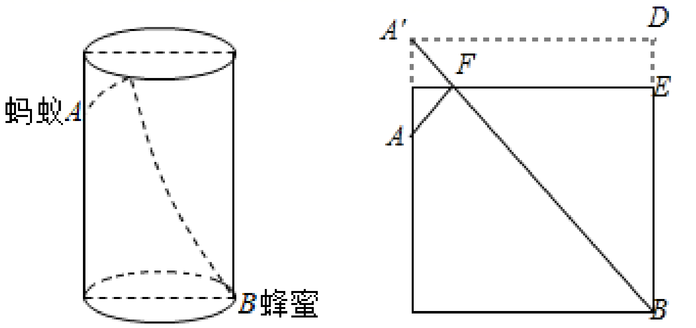


例 3．（2023 春·重庆八年级课时练习）在一个长为5 米，宽为 3 米的长方形草地 ABCD 上，如图堆放着一根正三棱柱的木块，它的侧棱长平行且大于场地宽 AD，木块的主视图是边长为1 米的正三角形， 一只蚂蚁从 点A 处到 C 处需要走的最短路程是______米．



模型4.将军饮马与最短路径模型

【模型解读】将军饮马与最短路径基本模型如下：



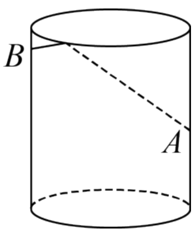
将军饮马问题

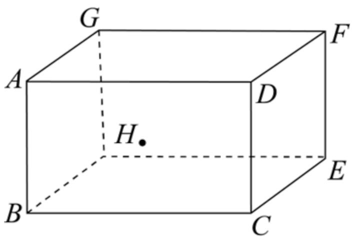
解决线段之和最小值问题：对称+连线，根据两点之间线段最短解决。

注意：立体图形中从外侧到内侧最短路径问题需要先作对称，再运用两点之间线段最短的原理结合勾股定理求解。

【最值原理】两点之间线段最短。

例1．（2023·四川广安·统考中考真题）如图，圆柱形玻璃杯的杯高为9cm，底面周长为16cm，在杯内壁离杯底4cm的点A处有一滴蜂蜜，此时，一只蚂蚁正好在杯外壁上，它在离杯上沿1cm，且与蜂蜜相对的点B处，则蚂蚁从外壁B处到内壁A处所走的最短路程为__________cm．（杯壁厚度不计）

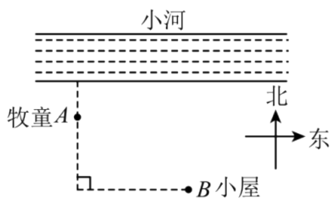




例2．（2023·浙江·八年级假期作业）如图，开口玻璃罐长、宽、高分别为16、6和6，在罐内点E处有一小块饼干碎末，此时一只蚂蚁正好在罐外长方形$ABCD$的中心H处，蚂蚁到达饼干的最短距离是多少（　　）

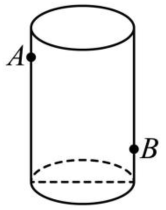
A．$\sqrt{145}$　　　B．$\sqrt{205}$　　　C．$\sqrt{277}$　　　D．17

例3．（2023春·黑龙江齐齐哈尔·八年级校考阶段练习）如图，一个牧童在小河的南4km的A处牧马，而他正位于他的小屋B的西8km北7km处，他想把他的马牵到小河边去饮水，然后回家．他要完成这件事情所走的最短路程是多少？



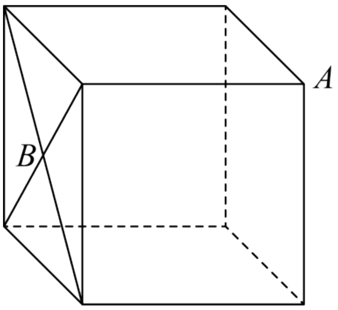
课后专项训练

1．（2023春·山东德州·八年级统考期末）现有一个圆柱体水晶杯（容器厚度忽略不计），其底面圆的周长为16cm，高为15cm，在杯子内壁离容器底部4.5cm的点B处有一滴蜂蜜，与蜂蜜相对，此时一只蚂蚁正好在杯子外壁，离容器上沿4.5cm的点A处，则蚂蚁吃到蜂蜜需爬行的最短路径为（　）



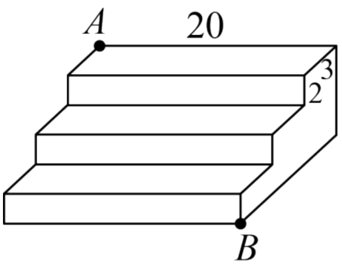
A．17cm　　　　B．10cm　　　　C．$2\sqrt{73}\text{cm}$　　　　D．16cm

2．（2022秋·福建宁德·八年级校考阶段练习）如图，正方体的棱长为4cm，A是正方体的一个顶点，B是侧面正方形对角线的交点，一只蚂蚁在正方体的表面上爬行，从点A爬到点B的最短路径是（　）



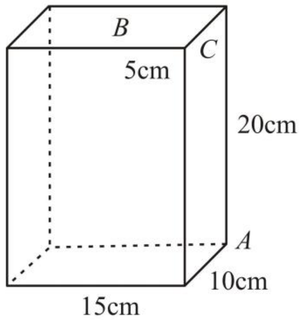
A．$2\sqrt{10}$　　　　B．6　　　　C．$2\sqrt{2}+4$　　　　D．8

3．（2023·江西景德镇·八年级统考期中）如图，一个三级台阶，它的每一级的长宽和高分别为20、3、2，A和B是这个台阶两个相对的端点，点A处有一只蚂蚁，想到点B处去吃可口的食物，则蚂蚁沿着台阶面爬到B点最短路程是（　）



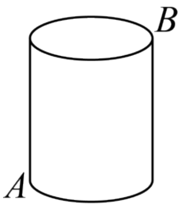
A．20　　　　B．15　　　　C．25　　　　D．27

4．（2023秋·四川成都·八年级统考期末）一个长方体盒子的长、宽、高分别为15cm，10cm，20cm，点B离点C的距离是5cm，一只蚂蚁想从盒底的点A沿盒的表面爬到点B，蚂蚁爬行的最短路程是（　）



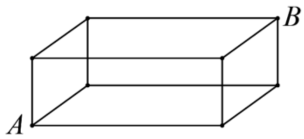
A．$10\sqrt{5}$cm　　B．25cm　　C．$5\sqrt{29}$cm　　D．$5\sqrt{37}$cm

5．（2023春·山东德州·八年级统考期中）如图，圆柱形玻璃容器高18cm，底面圆的周长为48cm，在外侧底部点A处有一蜘蛛，与蜘蛛相对的圆柱形容器的上口外侧顶端的点B处有一只苍蝇，则蜘蛛捕获苍蝇所走的最短路线长度（　）

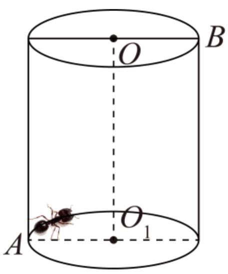


A．52cm　　B．30cm　　C．$6\sqrt{73}$ cm　　D．60cm

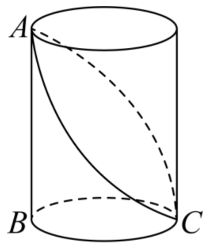
6．（2022秋·河南鹤壁·八年级统考期末）如图，在长为3，宽为2，高为1的长方体中，一只蚂蚁从顶点A出发沿着长方体的表面爬行到顶点B，那么它爬行的最短路程是_____．



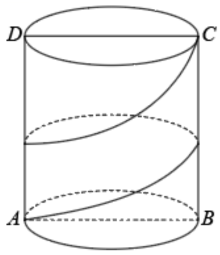
7．（2023春·四川绵阳·八年级统考期末）如图，圆柱的底面半径为$\frac{6}{\pi}$cm，高为$8cm$，蚂蚁在圆柱侧面爬行，从点A爬到点B的最短路程是_____cm．



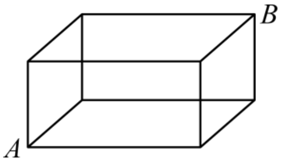
8．（2023春·山东德州·八年级统考期中）如图，圆柱的底面直径为$\frac{12}{\pi}$m，高$AB=8$m，按如图所示的方式缠绕细线，缠绕一周（不记接头）至少需要______长的细线．



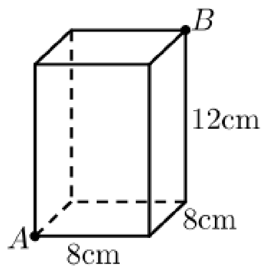
9．（2022秋·黑龙江大庆·七年级大庆市第三十六中学校考期末）在底面直径为2cm，高为3cm的圆柱体侧面上，用一条无弹性的丝带从A至C按如图所示的圈数缠绕，则丝带的最短长度为______（π取3）



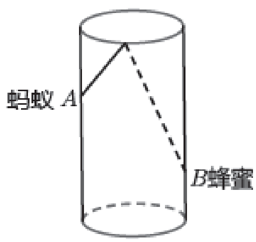
10．（2023·四川成都·八年级校考阶段练习）如图一只蚂蚁从长为4cm，宽为3cm，高为2cm的长方体纸箱A点沿纸箱爬到B点，那么它爬行的最短路线的长是_________cm



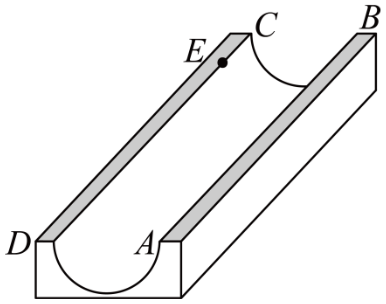
11．（2023·四川成都·八年级校考阶段练习）一个长方体形盒子的长、宽、高分别为8cm，8cm，12cm，一只蚂蚁想从盒底的A点爬到盒顶的B点，蚂蚁要爬行的最短行程是______cm．

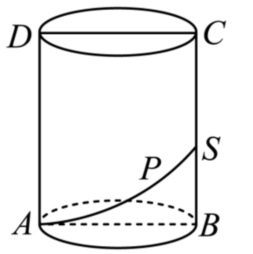


12．（2023·四川成都·八年级校联考阶段练习）如图，圆柱形玻璃杯高为$8cm$，底面周长为$24cm$，在杯内壁离底$2cm$的点B处有一滴蜂蜜，此时一只蚂蚁正好在杯外壁，离杯上沿3cm与蜂蜜相对的点A处，则蚂蚁从外壁A处到内壁B处的最短距离为_______cm（杯壁厚度不计）．



13．（2023春·山东青岛·八年级统考开学考试）如图，这是一个供滑板爱好者使用的U形池，该U形池可以看作是一个长方体去掉一个“半圆柱”而成，中间可供滑行部分的截面是半径为4m的半圆，其边缘$AB=CD=20\text{m}$，点E在CD上，$CE=2\text{m}$，一滑板爱好者从U形池内侧的点A滑到点E，则他滑行的最短距离约为_____m．（π取3）

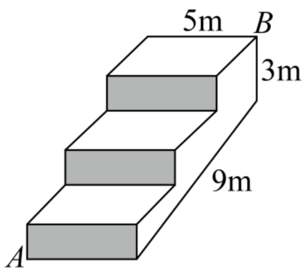




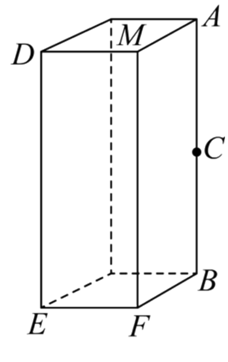
14．（2023春·湖南邵阳·八年级统考期末）如图，在圆柱的截面$ABCD$中，$AB=\dfrac{24}{\pi}$，$BC=32$，动点P从A点出发，沿着圆柱的侧面移动到BC的中点S的最短距离为________．

15．（2023春·福建福州·九年级统考期中）在平面直角坐标系xOy中，点B，P，Q的坐标分别为$(5,0)$，$(a,2)$，$(a+2,2)$，则$\vee BPQ$周长的最小值为_____．

16．（2023春·湖南永州·八年级校考阶段练习）如图，台阶A处的蚂蚁要爬到B处搬运食物，则它爬行的最短距离为 ____．



17．（2023春·安徽六安·八年级校考期中）如图，长方体盒子的长、宽、高分别是$12\text{cm},8\text{cm},30\text{cm}$，在$AB$的中点$C$处有一滴蜜糖，一只小虫从$E$处沿盒子表面爬到$C$处去吃，求小虫爬行的最短路程．



18．（2023秋·浙江·八年级专题练习）如图1，一只蚂蚁要从圆柱的下底面的点A爬到上底面的点B处，求它爬行的最短距离．已知圆柱底面半径为R，高度为h.小明同学在研究这个问题时，提出了两种可供选择的方案，方案1：沿$A\to C\to B$爬行；方案2：沿圆柱侧面展开图的线段AB爬行，如图2.（π取3）

(1)当$R=1$，$h=4$时，哪种方式的爬行距离更近？(2)当$R=1$，$h=1$时，哪种方式的爬行距离更近？

(3)当R与h满足什么条件时，两种方式的爬行距离同样远？

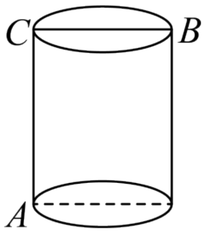


图1

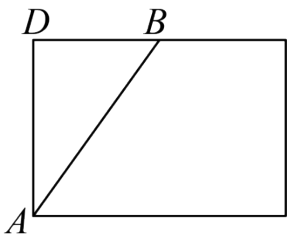
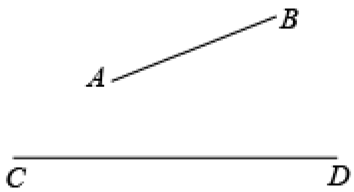


图2

19．（2023春·安徽蚌埠·八年级校考期中）如图，A，B两个村庄在河CD的同侧，两村庄的距离为a千米，$a^2=13$，它们到河CD的距离分别是1千米和3千米．为了解决这两个村庄的饮水问题，乡政府决定在河CD边上修建一水厂向A，B两村输送水．(1)在图上作出向A，B两村铺设水管所用材料最省时的水厂位置M．（只需作图，不需要证明）；(2)经预算，修建水厂需20万元，铺设水管的所有费用平均每千米为3万元，其他费用需5万元，求完成这项工程乡政府投入的资金至少为多少万元．



20．（2023春·山东德州·八年级统考期末）如图1，C为线段BD上一动点，分别过点B、D作$AB\perp BD$，$ED\perp BD$，连接AC、EC．已知$AB=2$，$DE=1$，$BD=8$，设$CD=x$．

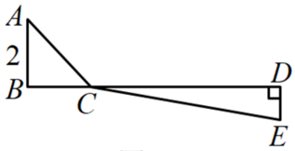


图1

图2

(1)用含x的代数式表示$AC+CE$的长为________；(2)求$AC+CE$的最小值________；

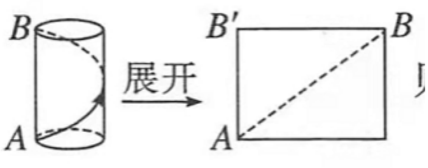
(3)根据（2）中的规律和结论，请模仿图1在网格中（图2）构图并求代数式$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(3-x)^2+4}$的最小值．

专题15 勾股定理中的最短路径模型

勾股定理中的最短路线问题通常是以“两点之间，线段最短”为基本原理推出的。人们在生产、生活实践中，常常遇到带有某种限制条件的最近路线即最短路线问题。对于数学中的最短路线问题可以分为两大类：第一类为在同一平面内；第二类为空间几何体中的最短路线问题，对于平面内的最短路线问题可先画出方案图，然后确定最短距离及路径图。对于几何题内问题的关键是将立体图形转化为平面问题求解，然后构造直角三角形，利用勾股定理求解。

模型1.圆柱中的最短路径模型

【模型解读】圆柱体中最短路径基本模型如下：



圆柱

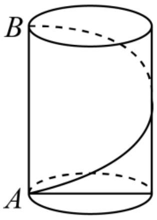
计算跟圆柱有关的最短路径问题时，要注意圆柱的侧面展开图为矩形，利用两点之间线段最短结合勾股定理进行求解，注意展开后两个端点的位置，有时候需要用底面圆的周长进行计算，有时候需要用底面圆周长的一半进行计算。

注意：1）运用勾股定理计算最短路径时，按照展开—定点—连线—勾股定理的步骤进行计算；

2）缠绕类题型可以求出一圈的最短长度后乘以圈数。

【最值原理】两点之间线段最短。

例1．（2023春·湖北武汉·八年级统考期中）如图，圆柱的底面周长为32cm，高为24cm，从圆柱底部A处沿侧面缠绕一圈丝线到顶部B处做装饰（点B在点A的正上方），则这条丝线的最小长度为（　）



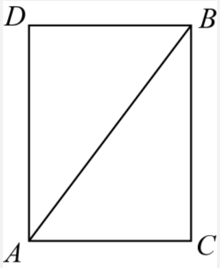
A．30cm　　B．40cm　　C．50cm　　D．60cm

【答案】B

【分析】要求丝线的长，需将圆柱的侧面展开，进而根据“两点之间线段最短”得出结果，在求线段长时，借助于勾股定理．

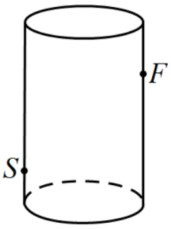
【详解】解: 如图，把圆柱的侧面展开，得到矩形 $ACBD$，则从圆柱底部 A 处沿侧面缠绕一圈丝线到顶部 B 处做装饰，这条丝线的最小长度是长方形的对角线 AB 的长.

Q 圆柱的底面周长是 32cm，高是 24cm，$\therefore AB^2=32^2+24^2=1024+576=1600$，$\therefore AB=40(\text{cm})$. 故选 B.



【点睛】本题考查了平面展开- 最短路径问题，圆柱的侧面展开图是一个矩形，此矩形的长等于圆柱底面周长，宽等于圆柱的高，本题就是把圆柱的侧面展开成矩形，“化曲面为平面”，用勾股定理解决.

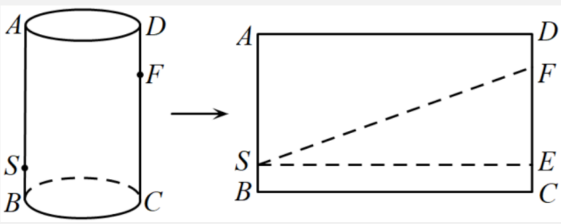
例 2．（2023·重庆·八年级期末）如图，圆柱形玻璃杯高 14cm，底面周长为 18cm，在外侧距下底处 1cm 有一只蜘蛛，与蜘蛛相对的圆柱形容器的上端距开口处 1cm 的外侧点处有一只苍蝇，蜘蛛捕到苍蝇的最短路线长是______cm.



【答案】15

【分析】展开后连接 SF，求出 SF 的长就是捕获苍蝇的蜘蛛所走的最短路径，过 S 作 $SE\perp CD$ 于 E，求出 SE、EF，根据勾股定理求出 SF 即可.

【详解】解：如图展开后连接 SF，求出 SF 的长就是捕获苍蝇的蜘蛛所走的最短路径，

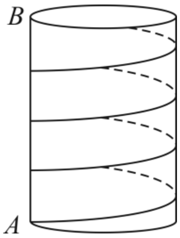


过 S 作 $SE\perp CD$ 于 E，则 $SE=BC=\frac{1}{2}\times18=9$（cm），$EF=14-1-1=12$（cm），

在 RtVFES 中，由勾股定理得：$SF=\sqrt{SE^2+EF^2}=\sqrt{9^2+12^2}=15$（cm），故答案为 15.

【点睛】本题考查勾股定理、平面展开-最短路线问题，关键是构造直角三角形，题目比较典型，难度适中．

例 3．（2023 春·河南新乡·八年级新乡市第十中学校考期末）如图，小冰想用一条彩带缠绕圆柱 4 圈，正好从 A 点绕到正上方的 B 点，已知知圆柱底面周长是 3m，高为 16m，则所需彩带最短是（　　）m．



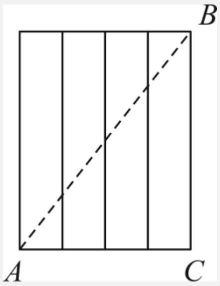
A．8　　B．5　　C．20　　D．10

【答案】C

【分析】把曲面展开变为平面，利用两点间线段最短，再根据勾股定理即可求解．

【详解】解：如图，线段 AB 即为所需彩带最短，由图可知 $AC=3\times4=12$， $BC=16$，

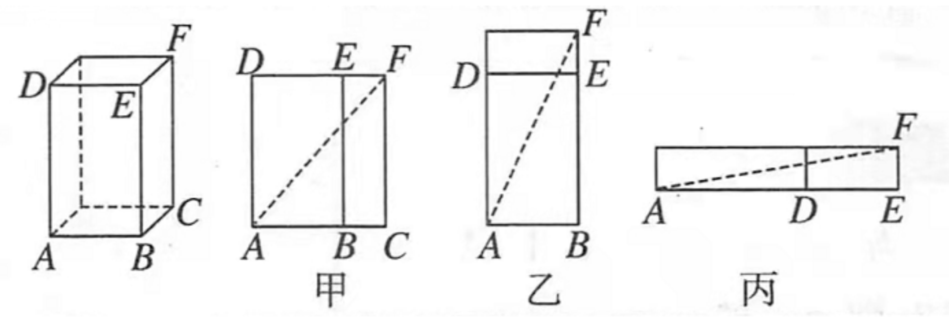
∴由勾股定理得， $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{12^2+16^2}=20$，故选 C.



【点睛】本题考查两点间线段最短和勾股定理在生活中的应用．将曲面问题变为平面问题是解答本题关键．

模型 2.长方体中的最短路径模型

【模型解读】长方体中最短路径基本模型如下：



长方体

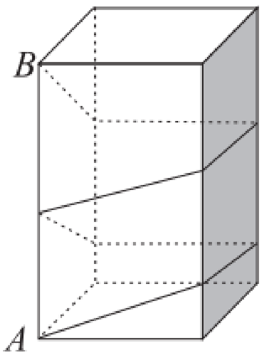
计算跟长方体有关的最短路径问题时，要熟悉长方体的侧面展开图，利用两点之间线段最短结合勾股定理进行求解，注意长方体展开图的多种情况和分类讨论。

注意：1）长方体展开图分类讨论时可按照“前+右”、“前+上”和“左+上”三种情况进行讨论；

2）两个端点中有一个不在定点时讨论方法跟第一类相同。

【最值原理】两点之间线段最短。

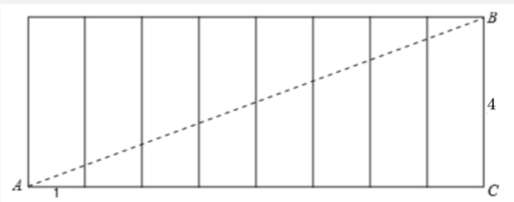
例 1．（2023·四川乐山·八年级统考期末）如图，长方体的底面是边长为1cm的正方形，高为4cm．如果从点A开始经过4个侧面缠绕2圈到达点B，那么所用细线最短需要________cm．



【答案】$4\sqrt{5}$

【分析】根据从点A开始经过4个侧面缠绕2圈到达点B，则展开后$AC=1\times 8=8\text{cm}$，$BC=4\text{cm}$，由勾股定理计算出AB的长，即可得到答案．

【详解】解：如图所示：



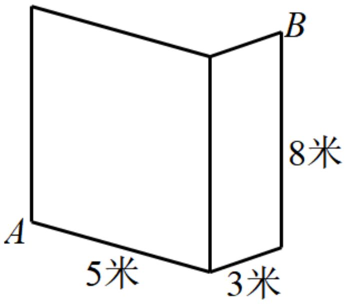
，

Q 从点A开始经过4个侧面缠绕2圈到达点B，$\therefore$展开后$AC=1\times 8=8\text{cm}$，$BC=4\text{cm}$，

$\therefore$由勾股定理得：$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}\text{cm}$，故答案为：$4\sqrt{5}$．

【点睛】本题考查了平面展开—最短路线问题和勾股定理的应用，能正确画出图形是此题的关键．

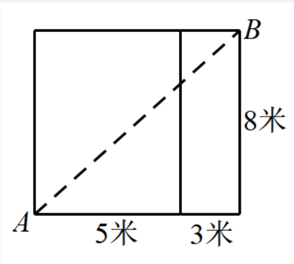
例 2．（2023·浙江·八年级假期作业）小南同学报名参加了学校的攀岩选修课，攀岩墙近似一个长方体的两个侧面，如图所示，他根据学过的数学知识准确地判断出：从点A攀爬到点B的最短路径为________米．



【答案】$8\sqrt{2}$

【分析】利用立体图形路径最小值为展开平面图的两点间距离，再根据勾股定理求解即可．

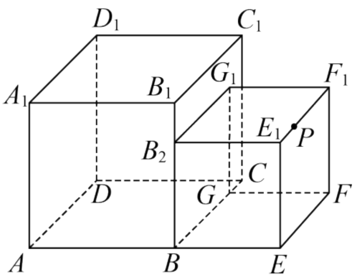
【详解】解：平面展开图为：



$AB=\sqrt{(5+3)^2+8^2}=8\sqrt{2}$（米），故答案为$8\sqrt{2}$．

【点睛】本题考查立体图形中两点间最短路径问题，通用办法是展开为平面图形，两点间最短路径为两点线段长度，利用水平距离和竖直距离得到直角三角形，勾股定理求出两点线段长度．熟悉立体图形中两点间最短路径问题的计算方法是解题的关键．

例 3．（2023 春·广东八年级课时练习）棱长分别为5cm,3cm 两个正方体如图放置，点 P 在 E_1F_1 上，且 $E_1P=\frac{1}{3}E_1F_1$，一只蚂蚁如果要沿着长方体的表面从点 A 爬到点 P，需要爬行的最短距离是______．

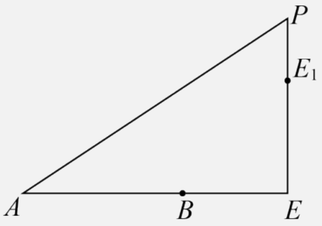


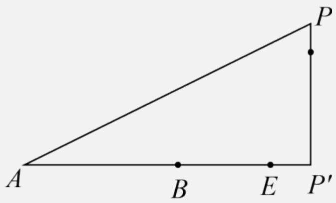
【答案】$4\sqrt{5}$ cm．

【分析】求出两种展开图 PA 的值，比较即可判断；

【详解】解：如图，有两种展开方法：

方法一：$PA=\sqrt{(5+3)^2+(3+1)^2}=4\sqrt{5}\text{cm}$，方法二：$PA=\sqrt{(5+3+1)^2+3^2}=3\sqrt{10}\text{cm}$．

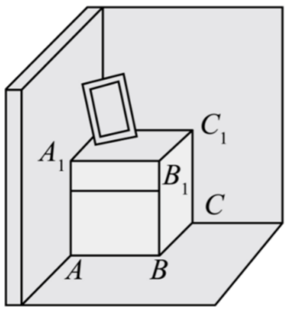




故需要爬行的最短距离是$4\sqrt{5}$cm．故答案为：$4\sqrt{5}$cm．

【点睛】本题考查平面展开-最短问题，解题的关键是学会用转化的思想思考问题，属于中考常考题型．

例 4．（2023 春·山西大同·八年级统考期中）如图，在墙角处放着一个长方体木柜（木柜与墙面和地面均没有缝隙），一只蚂蚁从柜角 A 处沿着木柜表面爬到柜角C_1处．若$AB=3$，$BC=4$，$CC_1=5$，则蚂蚁爬行的最短路程是（　）



A．$\sqrt{74}$　　B．$3\sqrt{10}$　　C．$\sqrt{89}$　　D．12

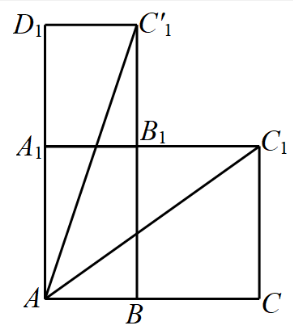
【答案】A

【分析】求出蚂蚁沿着木柜表面经线段A_1B_1到C_1，以及蚂蚁沿着木柜表面经线段BB_1到C_1的距离，再进行比较即可．

【详解】解：蚂蚁沿着木柜表面经线段A_1B_1到C_1，爬过的路径的长是$l_1=\sqrt{3^2+(4+5)^2}=\sqrt{90}$，

蚂蚁沿着木柜表面经线段BB_1到C_1，爬过的路径的长是$l_2=\sqrt{(3+4)^2+5^2}=\sqrt{74}$．

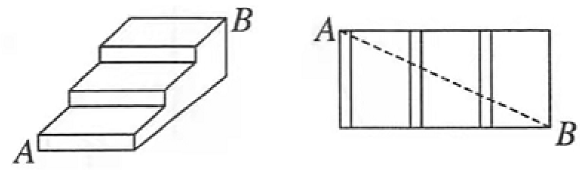
$l_1>l_2$，最短路径的长是$l_2=\sqrt{74}$．故选 A．



【点睛】此题考查了长方体展开图的对角线长度求法，这种题型经常在中考中出现，也是易错题型，希望能引起同学们的注意．

模型 3.阶梯中的最短路径模型

【模型解读】阶梯中最短路径基本模型如下：

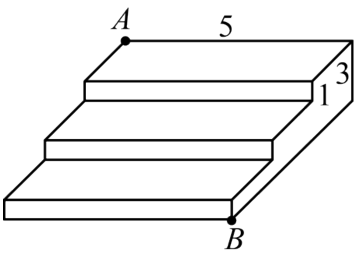


阶梯问题

注意：展开—定点—连线—勾股定理

【最值原理】两点之间线段最短。

例 1．（2023 秋·山东枣庄·八年级校考开学考试）如图一个三级台阶，它的每一级的长宽高分别是 5 cm，3 cm 和 1 cm，A 和 B 是这个台阶的两个相对的端点，点 A 上有一只蚂蚁，想到点 B 去吃可口的食物，则蚂蚁沿着台阶面爬到点 B 的最短路程长为（　　）



A．10　　B．11　　C．12　　D．13

【答案】D

【分析】先将图形平面展开，再用勾股定理根据两点之间线段最短进行解答．

【详解】解：如图所示，