专题 2-5 最值模型之阿氏圆与胡不归

01 题型·解读

知识点梳理

模块一 胡不归模型

【题型 1】胡不归模型·已有相关角直接作垂线

【题型 2】胡不归模型·构造相关角再作垂线

【题型 3】胡不归模型·取最值时对其它量进行计算

模块二 阿氏圆模型

【题型 4】点在圆外：向内取点（系数小于 1）

【题型 5】点在圆内：向外取点（系数大于 1）

【题型 6】一内一外提系数

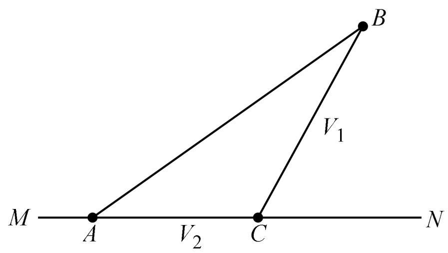
【题型 7】隐圆型阿氏圆

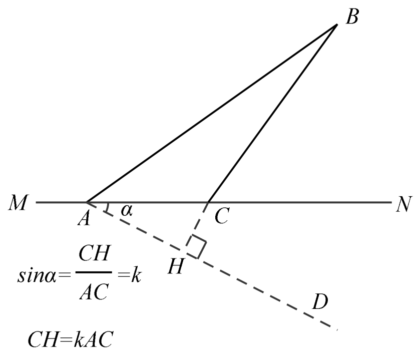
02 满分·技巧

知识点梳理

一、胡不归模型讲解

如图，一动点 P 在直线 MN 外的运动速度为 V_1，在直线 MN 上运动的速度为 V_2，且 $V_1<V_2$，A、B 为定点，点 C 在直线 MN 上，确定点 C 的位置使 $\dfrac{AC}{V_2}+\dfrac{BC}{V_1}$ 的值最小.





$\dfrac{AC}{V_2}+\dfrac{BC}{V_1}=\dfrac{1}{V_1}\left(BC+\dfrac{V_1}{V_2}AC\right)$，记 $k=\dfrac{V_1}{V_2}$，即求 $BC+kAC$ 的最小值．

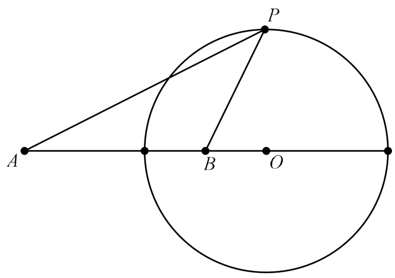
构造射线 AD 使得 $\sin\angle DAN=k$，$CH/AC=k$，$CH=kAC$．

将问题转化为求 $BC+CH$ 最小值，过 B 点作 $BH\perp AD$ 交 MN 于点 C，交 AD 于 H 点，此时 $BC+CH$ 取到最小值，即 $BC+kAC$ 最小．

二、阿氏圆模型讲解

【模型来源】

所谓阿圆，就是动点到两定点距离之比为定值，那么动点的轨迹就是圆，这个圆，称为阿波罗尼斯圆，简称为阿圆．其本质就是通过构造母子相似，化去比例系数，转化为两定一动将军饮马型求最值，难点在于如何构造母子相似．



【模型建立】

如图 1 所示，$\odot O$ 的半径为 R，点 A、B 都在$\odot O$ 外，P 为$\odot O$ 上一动点，已知 $R=\dfrac{2}{5}OB$，

连接 PA、PB，则当“$PA+\dfrac{2}{5}PB$”的值最小时，P 点的位置如何确定？

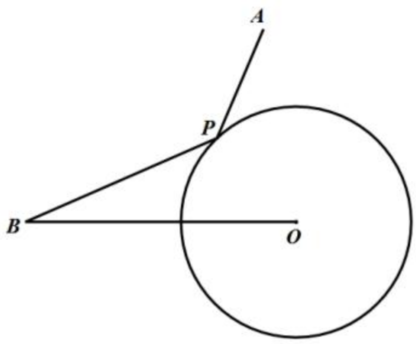


图1

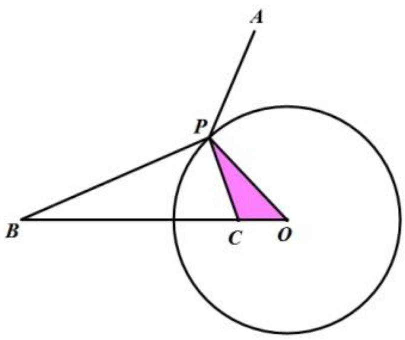


图2

解决办法：如图 2，在线段 OB 上截取 OC 使 $OC=\dfrac{2}{5}R$，则可说明$\triangle BPO$ 与$\triangle PCO$ 相似，则有 $\dfrac{2}{5}PB$

$=PC$。故本题求“$PA+\frac{2}{5}PB$”的最小值可以转化为“$PA+PC$”的最小值，其中与 A 与 C 为定点，P 为动点，故当 A、P、C 三点共线时，“$PA+PC$”值最小。

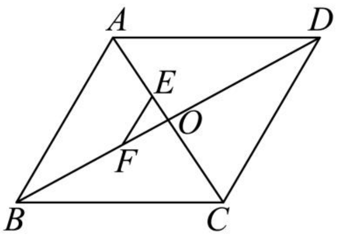
03 核心·题型

模块一 胡不归模型

【题型 1】胡不归模型·已有相关角直接作垂线

2023·西安·二模

1．如图，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=60°$，$AD=6$，对角线 AC、BD 相交于点 O，点 E 在线段 AC 上，且 $AE=2$，点 F 为线段 BD 上的一个动点，则 $EF+\frac{1}{2}BF$ 的最小值为 ________.



【答案】$2\sqrt{3}$

【分析】过 F 作 $FM\perp BC$，由菱形 $ABCD$，$\angle ABC=60°$，得到 BD 为 $\angle ABC$ 平分线，求出 $\angle FBM=30°$，在 $\mathrm{Rt}\triangle FBM$ 中，利用 $30°$ 角所对的直角边等于斜边的一半，得到 $FM=\frac{1}{2}F$，故 $EF+\frac{1}{2}BF=EF+FM$，求出 $EF+FM$ 的最小值即为所求最小值，当 E、F、M 三点共线时最小，求出即可.

【详解】解：过 F 作 $FM\perp BC$，

$\because$ 菱形 $ABCD$，$\angle ABC=60°$，

$\therefore \angle FBM=\frac{1}{2}\angle ABC=30°$，$AB=BC$，即 $\triangle ABC$ 为等边三角形，$\angle ACM=60°$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle FBM$ 中，$FM=\frac{1}{2}BF$，

$\therefore EF+\frac{1}{2}BF=EF+FM$，

$\therefore$ 当 E、F、M 三点共线时，取得最小值，

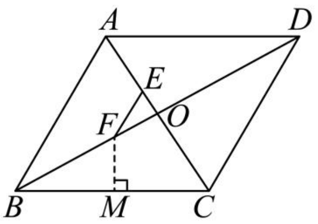
$\because AE=2$，$AC=AB=BC=6$，

$\therefore EC=AC-AE=6-2=4$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ECM$中，$EM=EC\cdot\sin60°=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，

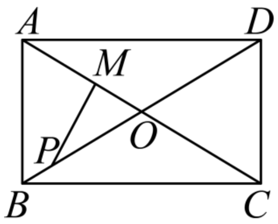
则$EF+\frac{1}{2}BF$的最小值为$2\sqrt{3}$．

故答案为：$2\sqrt{3}$．



2023·保定·一模

2．如图，在矩形$ABCD$中，对角线AC，BD交于点O，$AB=OB=3$，点M在线段AC上，且$AM=2$．点P为线段OB上的一个动点．



（1）$\angle OBC=$____________°；

（2）$MP+\frac{1}{2}PB$的最小值为____________．

【答案】　30　2

【分析】（1）由矩形的性质得到$OA=OB=OC=OD$，$\angle ABC=90°$，又由$AB=OB$得到$\triangle OAB$是等边三角形，则$\angle ABO=60°$，即可得到答案；

（2）过点P作$PE\perp BC$于点E，过点M作$MF\perp BC$于点F，证明$MP+\frac{1}{2}PB=MP+PE\geq MF$，进一求解$MF$即可得到答案．

【详解】解：（1）∵四边形$ABCD$是矩形，

∴$OA=OB=OC=OD$，$\angle ABC=90°$，

∵$AB=OB$，

∴$AB=OB=OA$，

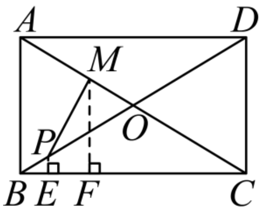
∴$\triangle OAB$是等边三角形，

∴$\angle ABO=60°$，

∴$\angle OBC=\angle ABC-\angle ABO=90°-60°=30°$，

故答案为：30．

（2）过点P作$PE\perp BC$于点E，过点M作$MF\perp BC$于点F，



在Rt△BPE中，

由（1）知：$\angle PBE=30^\circ$，

∴ $PE=\frac{1}{2}PB$，

∴ $MP+\frac{1}{2}PB=MP+PE\geq MF$，

在矩形$ABCD$中，

$AC=2OA=2OB=6$，

∵ $AM=2$，

∴ $CM=AC-AM=6-2=4$，

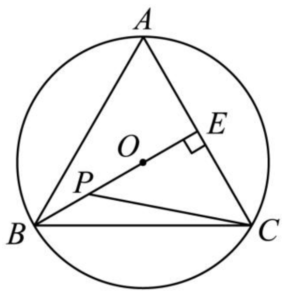
在Rt△CMF中，$\angle MCF=\angle OBC=30^\circ$，

∴ $MF=\frac{1}{2}CM=2$，

∴ $MP+\frac{1}{2}PB$的最小值为2

2023·湘西·中考真题

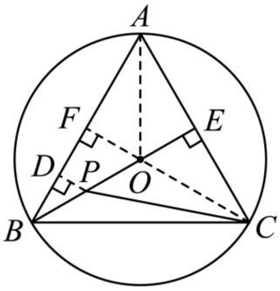
3．如图，⊙O是等边三角形ABC的外接圆，其半径为4．过点B作$BE\perp AC$于点E，点P为线段BE上一动点（点P不与B，E重合），则$CP+\frac{1}{2}BP$的最小值为__________．



【答案】6

【分析】过点P作$PD\perp AB$，连接CO并延长交AB于点F，连接AO，根据等边三角形的性质和圆内接三角形的性质得到$OA=OB=4$，$CF\perp AB$，然后利用含30°角直角三角形的性质得到$OE=\frac{1}{2}OA=2$，进而求出$BE=BO+EO=6$，然后利用$CP+\frac{1}{2}BP=CP+PD\leq CF$代入求解即可．

【详解】如图所示，过点P作$PD\perp AB$，连接CO并延长交AB于点F，连接AO



∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，$BE\perp AC$

∴ $\angle ABE=\angle CBE=\frac{1}{2}\angle ABC=30^{\circ}$

∵ $\odot O$ 是等边三角形 ABC 的外接圆，其半径为 4

∴ $OA=OB=4$，$CF\perp AB$，

∴ $\angle OBA=\angle OAB=30^{\circ}$

∴ $\angle OAE=\angle OAB=\frac{1}{2}\angle BAC=30^{\circ}$

∵ $BE\perp AC$

∴ $OE=\frac{1}{2}OA=2$

∴ $BE=BO+EO=6$

∵ $PD\perp AB$，$\angle ABE=30^{\circ}$

∴ $PD=\frac{1}{2}PB$

∴ $CP+\frac{1}{2}BP=CP+PD\leq CF$

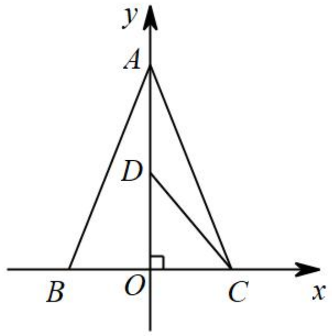
∴ $CP+\frac{1}{2}BP$ 的最小值为 CF 的长度

∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，$BE\perp AC$，$CF\perp AB$

∴ $CF=BE=6$

∴ $CP+\frac{1}{2}BP$ 的最小值为 6

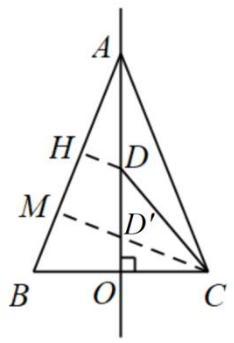
4．如图，$AB=AC$，$A\left(0,\sqrt{15}\right)$，$C$（1，0），$D$ 为射线 AO 上一点，一动点 P 从 A 出发，运动路径为 $A-D-C$，在 AD 上的速度为 4 个单位/秒，在 CD 上的速度为 1 个单位/秒，则整个运动时间最少时，D 的坐标为__________.



【答案】$\left(0,\dfrac{\sqrt{15}}{15}\right)$

【分析】如图，作 $DH\perp AB$ 于 H，$CM\perp AB$ 于 M，交 AO 于 D'．运动时间 $t=\dfrac{AD}{4}+\dfrac{CD}{1}=\dfrac{AD}{4}+CD$，由 $\triangle AHD\backsim\triangle AOB$，推出 $DH=\dfrac{1}{4}AD$，可得 $\dfrac{1}{4}AD+CD=CD+DH$，推出当 C，D，H 共线且和 CM 重合时，运动时间最短．

【详解】如图，作 $DH\perp AB$ 于 H，$CM\perp AB$ 于 M，交 AO 于 $D¢$．



$\because$运动时间 $t=\dfrac{AD}{4}+\dfrac{CD}{1}=\dfrac{AD}{4}+CD$，

$\because AB=AC$，$AO\perp BC$，

$\therefore BO=OC=1$，

$\because A(0,\sqrt{15})$，C（1，0），$AB=AC$，$AO\perp BC$，

$\therefore AB=AC=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{15+1}=4$，

$\because \angle DAH=\angle BAO$，$\angle DHA=\angle AOB=90°$，

$\therefore \triangle AHD\backsim\triangle AOB$，

$\therefore \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{DH}{OB}$，

$\therefore DH=\dfrac{1}{4}AD$，

$\therefore \dfrac{1}{4}AD+CD=CD+DH$，

$\therefore$当 C，D，H 共线且和 CM 重合时，运动时间最短，

$\therefore \frac{1}{2}BC\cdot AO=\frac{1}{2}AB\cdot CM$，

$\therefore CM=\frac{\sqrt{15}}{2}$，

$\therefore AM=\sqrt{AC^2-CM^2}=\sqrt{4^2-\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2}=\frac{7}{2}$，

$\because AD'=4MD'$，设 $MD'=m$，则 $AD'=4m$，

则有：$16m^2-m^2=\frac{49}{4}$

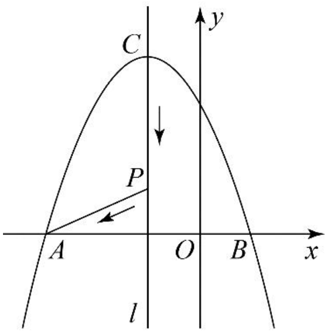
$\therefore m=\frac{7\sqrt{15}}{30}$ 或 $-\frac{7\sqrt{15}}{30}$（舍去），

$\therefore AD'=\frac{14\sqrt{15}}{15}$

$\therefore D\left(0,\frac{\sqrt{15}}{15}\right)$

2023·江苏宿迁中考模拟

5．如图，二次函数 $y=ax^2+2ax-3a$ 与 x 轴交于点 A，B，对称轴为直线 l，顶点 C 到 x 轴的距离为 $2\sqrt{3}$．点 P 为直线 l 上一动点，另一点从 C 出发，先以每秒 2 个单位长度的速度沿 CP 运动到点 P，再以每秒 1 个单位长度的速度沿 PA 运动到点 A 停止，则时间最短为________秒．



【答案】$2\sqrt{3}$

【分析】如图，连接 AC,BC，作 $AD\perp BC$ 于点 D，AD 与 EC 交点即为符合题意的点 P，可得 $AB=AC=BC$，利用 $30°$ 角所对的直角边等于斜边的一半得到动点运动的时间为 $\frac{CP}{2}+AP$ 解题即可．

【详解】如图，连接 AC,BC，作 $AD\perp BC$ 于点 D，AD 与 EC 交点即为符合题意的点 P，

令 $y=0$，则 $ax^2+2ax-3a=0$，

解得 $x=-3$ 或 $x=1$，

$\therefore A$，B 两点坐标为 $(-3,0)$，$(1,0)$，

$\therefore AB=4$，

$\because A$，B 两点关于 l 对称，

∴ $AE = BE = 2$，

∵顶点 C 到 x 轴的距离为 $2\sqrt{3}$，

∴ $AC = BC = \sqrt{EA^2 + EC^2} = 4$

∴ $AB = AC = BC$，

∵ AD, CE 都是 $\triangle ABC$ 的高，

∴ $AD = CE = 2\sqrt{3}$，

由题意得动点运动的时间为 $\frac{CP}{2} + AP$，

∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，$CE \perp AB$，

∴ $\angle PCD = \frac{1}{2}\angle ACB = 30°$，

∵作 $PD \perp CD$，

∴ $PD = \frac{1}{2}CP$，

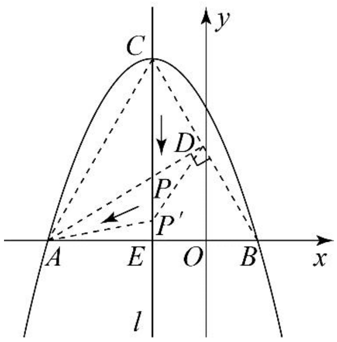
∴ $\frac{1}{2}CP + AP = PD + AP = 2\sqrt{3}$，

显然在 l 上另取一点 P'，连接 $P'A$，$P'D$，

∵ $P'A + P'D \geq AD$，

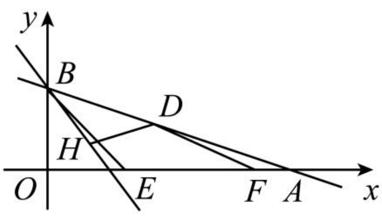
∴当 $PA + PD = AD$ 时，运动时间最短为 $2\sqrt{3}$，

故答案为：$2\sqrt{3}$．



2023·四川自贡·统考中考真题

6．如图，直线 $y = -\frac{1}{3}x + 2$ 与 x 轴，y 轴分别交于 A，B 两点，点 D 是线段 AB 上一动点，点 H 是直线 $y = -\frac{4}{3}x + 2$ 上的一动点，动点 $E(m,0)$，$F(m+3,0)$，连接 BE，DF，HD．当 $BE + DF$ 取最小值时，$3BH + 5DH$ 的最小值是 ________．



【答案】$\frac{39}{2}$

【分析】作出点$C(3,-2)$，作$CD\perp AB$于点D，交x轴于点F，此时$BE+DF$的最小值为CD的长，利用解直角三角形求得$F\left(\frac{11}{3},0\right)$，利用待定系数法求得直线$CD$的解析式，联立即可求得点D的坐标，过点D作$DG\perp y$轴于点G，此时$3BH+5DH$的最小值是$5DG$的长，据此求解即可．

【详解】解：∵直线$y=-\frac{1}{3}x+2$与x轴，y轴分别交于A，B两点，

∴$B(0,2)$，$A(6,0)$，

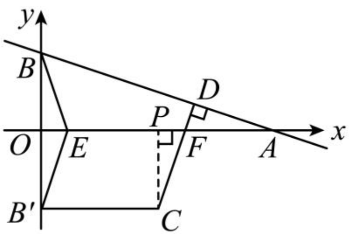
作点B关于x轴的对称点$B'(0,-2)$，把点B'向右平移3个单位得到$C(3,-2)$，

作$CD\perp AB$于点D，交x轴于点F，过点B'作$B'E\mathbin{/\mkern-4mu/}CD$交x轴于点E，则四边形$EFCB'$是平行四边形，

此时，$BE=B'E=CF$，

∴$BE+DF=CF+DF=CD$有最小值，

作$CP\perp x$轴于点P，



则$CP=2$，$OP=3$，

∵$\angle CFP=\angle AFD$，

∴$\angle FCP=\angle FAD$，

∴$\tan\angle FCP=\tan\angle FAD$，

∴$\frac{PF}{PC}=\frac{OB}{OA}$，即$\frac{PF}{2}=\frac{2}{6}$，

∴$PF=\frac{2}{3}$，则$F\left(\frac{11}{3},0\right)$，

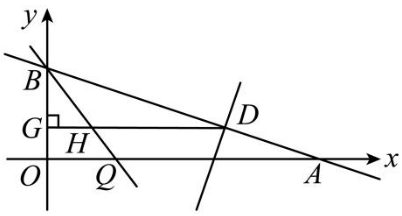
设直线CD的解析式为$y=kx+b$，

则$\begin{cases}3k+b=-2\\ \frac{11}{3}k+b=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}k=3\\ b=-11\end{cases}$，

∴直线CD的解析式为$y=3x-11$，

联立，$\begin{cases}y=3x-11\\ y=-\frac{1}{3}x+2\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=\frac{39}{10}\\ y=\frac{7}{10}\end{cases}$，即$D\left(\frac{39}{10},\frac{7}{10}\right)$；

过点D作$DG\perp y$轴于点G，



直线 $y=-\frac{4}{3}x+2$ 与 x 轴的交点为 $Q\left(\frac{3}{2},0\right)$，则 $BQ=\sqrt{OQ^2+OB^2}=\frac{5}{2}$，

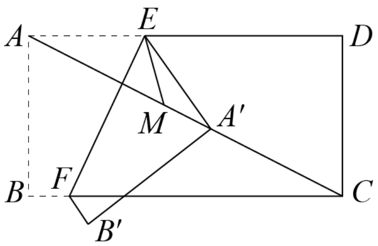
$\therefore \sin\angle OBQ=\frac{OQ}{BQ}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}}=\frac{3}{5}$，$\therefore HG=BH\sin\angle GBH=\frac{3}{5}BH$，

$\therefore 3BH+5DH=5\left(\frac{3}{5}BH+DH\right)=5(HG+DH)=5DG$，

即 $3BH+5DH$ 的最小值是 $5DG=5\times\frac{39}{10}=\frac{39}{2}$

2023·成都市七中校考

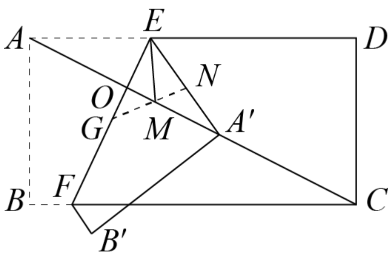
7．如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=8$，点 E，F 分别在边 AD，BC 上，且 $AE=3$，沿直线 EF 翻折，点A的对应点 A' 恰好落在对角线 AC 上，点 B 的对应点为 B'，点 M 为线段 AA' 上一动点，则 $EM+\frac{\sqrt{5}}{5}A'M$ 的最小值为______．



【答案】$\frac{12}{5}$

【分析】过点 M 作 $MN\perp A'E$ 于点 N，作点 E 关于 AC 的对称点 G，连接 MG．由勾股定理求出 AD 的长，根据锐角三角函数的知识可得 $MN=\frac{\sqrt{5}}{5}A'E$，从而可得当 G，M，N 三点共线时 $GM+MN$ 取得最小值，即 $EM+\frac{\sqrt{5}}{5}A'M$ 取得最小值，然后利用锐角三角函数和勾股定理可求出 GN 的长．

【详解】解：如图，过点 M 作 $MN\perp A'E$ 于点 N，作点 E 关于 AC 的对称点 G，连接 MG，则 $EM=MG$．



由折叠的性质可知，$EF\perp AC$，$AE=A'E$，$\angle AEF=\angle A'EF$，

∴ $\angle DAC=\angle AA'E$．∵四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $CD=AB=4$， $\angle D=90°$．

∴ $AD=\sqrt{AD^2+CD^2}=4\sqrt{5}$．

∵ $\sin\angle DAC=\frac{CD}{AC}=\frac{\sqrt{5}}{5}$， ∴ $\sin\angle AA'E=\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{MN}{A'M}$， ∴ $MN=\frac{\sqrt{5}}{5}A'M$，

∴ $EM+\frac{\sqrt{5}}{5}A'M=GM+MN$，

∴当 G，M，N 三点共线时 $GM+MN$ 取得最小值，即 $EM+\frac{\sqrt{5}}{5}A'M$ 取得最小值，

∵ $\angle DAC+\angle AEF=90°$， $\angle EGN+\angle A'EF=90°$， ∴ $\angle EGN=\angle DAC$，

∴ $\sin\angle EGN=\sin\angle DAC=\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{EN}{GE}$．

∵ $\sin\angle DAC=\frac{OE}{AE}=\frac{\sqrt{5}}{5}$， $AE=3$， ∴ $OE=\frac{3\sqrt{5}}{5}$， ∴ $GE=\frac{6\sqrt{5}}{5}$， ∴ $\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{EN}{\frac{6\sqrt{5}}{5}}$， ∴ $EN=\frac{6}{5}$，

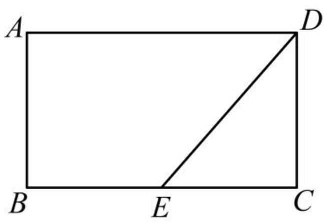
∴ $GN=\sqrt{\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2-\left(\frac{6}{5}\right)^2}=\frac{12}{5}$．

即 $EM+\frac{\sqrt{5}}{5}A'M$ 取得最小值是 $\frac{12}{5}$．

【题型 2】胡不归模型 • 构造相关角再作垂线

8．如图，在长方形 $ABCD$ 中， $AB=2$， $AD=2\sqrt{3}$，点 E 在 BC 上，连接 DE，在点 E 的运动过程中，

$BE+\sqrt{2}DE$ 的最小值为______．



【答案】 $2+2\sqrt{3}$ / $2\sqrt{3}+2$

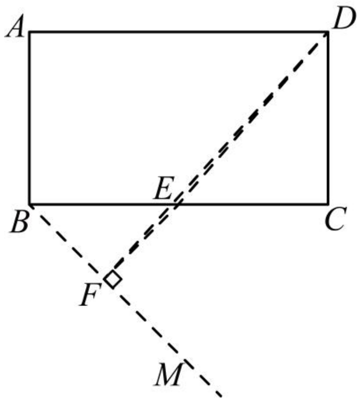
【分析】在线段 BC 下方作 $\angle CBM$=45°，过点 E 作 $EF\perp BM$ 于点 F，连接 DF，求出此时的 DF 的长度便可．

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 是矩形， $AB=2$， $AD=2\sqrt{3}$，

∴ $\angle DCE=90°$， $CD=AB=2$， $BC=AD=2\sqrt{3}$，

∴ $BE=2\sqrt{3}-CE$，

在线段 BC 下方作 $\angle CBM$=45°，过点 E 作 $EF\perp BM$ 于点 F，连接 DF，



∴ $EF=\frac{\sqrt{2}}{2}BE$，

∴ $\frac{\sqrt{2}}{2}BE+DE=EF+DE\geq DF$，

当 D、E、F 三点共线时，$\frac{\sqrt{2}}{2}BE+DE=EF+DE=DF$ 的值最小，

此时 $\angle DEC=\angle BEF=45^\circ$，

∴ $CE=CD=2$，

∴ $BE=2\sqrt{3}-2$，$DE=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

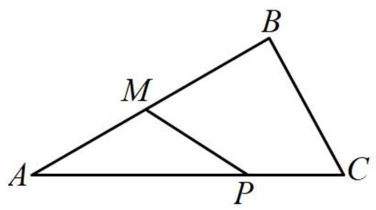
∴ $EF=\frac{\sqrt{2}}{2}BE=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，

∴ $\frac{\sqrt{2}}{2}BE+DE$ 的最小值为：$EF+DE=\sqrt{2}+\sqrt{6}$，

∴ $BE+\sqrt{2}DE$ 的最小值为 $BE+\sqrt{2}DE=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}BE+DE\right)=2+2\sqrt{3}$

2023·广西二模

9．如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=30^\circ$，M 为线段 AB 上一定点，P 为线段 AC 上一动点．当点 P 在运动的过程中，满足 $PM+\frac{1}{2}AP$ 的值最小时，则 $\angle APM=$______．



【答案】120°

【详解】解：作 $\angle CAF=\angle CAB$，过 M 作 $MD\perp AF$ 交 AC 于一点即为点 P，

∵ $\angle CAB=30^\circ$，

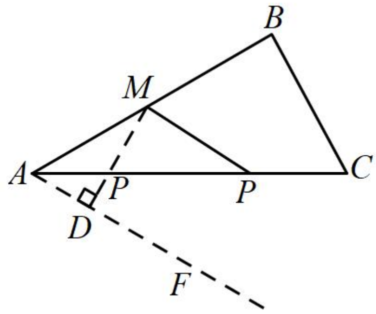
∴ $\angle CAF=\angle CAB=30^\circ$，

∴ $\mathrm{DP}=\frac{1}{2}\mathrm{AP}$，

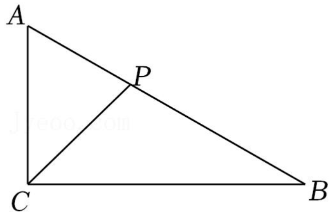
∴当 $MD\perp AF$ 时 $PM+\frac{1}{2}AP$ 的值最小，

∴在$\triangle ADP$ 中， $\angle APM=90^\circ+30^\circ=120^\circ$，

故答案为120°；



10．如图，$\angle ACB=90^\circ$， $AC=2$， $AB=4$，点 P 为 AB 上一点，连接 PC，则 $PC+\frac{1}{2}PB$ 的最小值为 <u> 3 </u>．



【答案】3

【解答】解：作 $\angle ABE=30^\circ$，过点 C 作 $CD\perp BE$ 于点 D，

则此时 $PC+\frac{1}{2}PB$ 最小，

$\because\angle ACB=90^\circ$， $AC=2$， $AB=4$，

$\therefore\sin\angle CBA=\frac{AC}{AB}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$， $BC=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，

$\therefore\angle CBA=30^\circ$，

$\therefore DP=\frac{1}{2}PB$，

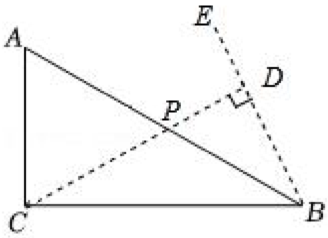
$\therefore\angle CBE=60^\circ$，

$\therefore\sin60^\circ=\frac{DC}{BC}=\frac{CD}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

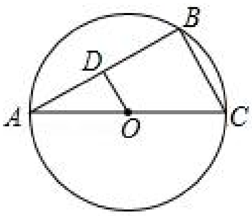
解得： $DC=3$，

$\therefore PC+\frac{1}{2}PB=DC=3$．

故答案为：3．



11．如图，AC 是圆 O 的直径，$AC=4$，弧 $BA=120°$，点 D 是弦 AB 上的一个动点，那么 $OD+\frac{1}{2}BD$ 的最小值为(　　)



A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$1+\sqrt{3}$

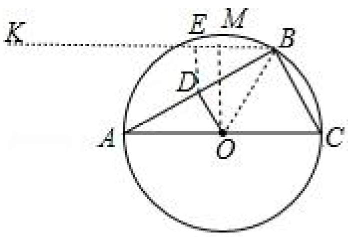
【答案】B

【解答】解：$\because \widehat{BA}$ 的度数为 $120°$，$\therefore \angle C=60°$，$\because AC$ 是直径，$\therefore \angle ABC=90°$，

$\therefore \angle A=30°$，作 $BK//CA$，$DE\perp BK$ 于 E，$OM\perp BK$ 于 M，连接 OB．

$\because BK//AC$，$\therefore \angle DBE=\angle BAC=30°$，在 RtΔDBE 中，$DE=\frac{1}{2}BD$，

$\therefore OD+\frac{1}{2}BD=OD+DE$，



根据垂线段最短可知，当点 E 与 M 重合时，$OD+\frac{1}{2}BD$ 的值最小，最小值为 OM，

$\because \angle BAO=\angle ABO=30°$，

$\therefore \angle OBM=60°$，

在 RtΔOBM 中，

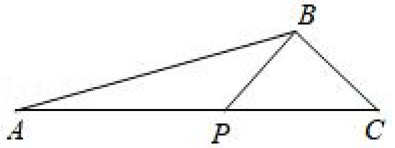
$\because OB=2$，$\angle OBM=60°$，

$\therefore OM=OB\cdot \sin 60°=\sqrt{3}$，

$\therefore \frac{1}{2}DB+OD$ 的最小值为 $\sqrt{3}$，故选：B．

12．如图，在 ΔABC 中，$\angle A=15°$，$AB=10$，P 为 AC 边上的一个动点（不与 A、C 重合），连接 BP，

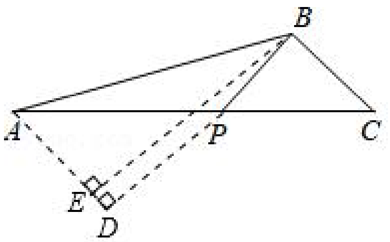
则 $\frac{\sqrt{2}}{2}AP+PB$ 的最小值是(　　)



A． $5\sqrt{2}$　　　B． $5\sqrt{3}$　　　C． $\frac{10\sqrt{3}}{3}$　　　D． 8

【答案】B

【解答】解：如图，以 AP 为斜边在 AC 下方作等腰 $\mathrm{Rt}\Delta\mathrm{ADP}$，过 B 作 $BE\perp AD$ 于 E，



$\because \angle PAD=45^{\circ}$，

$\therefore \sin\angle PAD=\frac{DP}{AP}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore DP=\frac{\sqrt{2}}{2}AP$，

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}AP+PB=DP+PB\geqslant BE$，

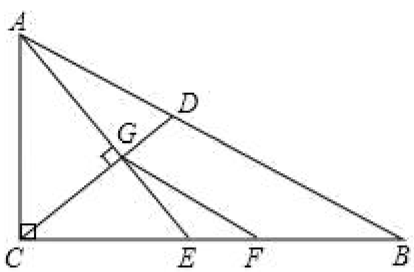
$\because \angle BAC=15^{\circ}$，

$\therefore \angle BAD=60^{\circ}$，

$\therefore BE=AB\sin 60^{\circ}=5\sqrt{3}$，

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}AP+PB$ 的最小值为 $5\sqrt{3}$．故选：B．

13．如图，在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle ACB=90^{\circ}$，$\angle B=30^{\circ}$，$AB=4$，点 D、F 分别是边 AB，BC 上的动点，连接 CD，过点 A 作 $AE\perp CD$ 交 BC 于点 E，垂足为 G，连接 GF，则 $GF+\frac{1}{2}FB$ 的最小值是__



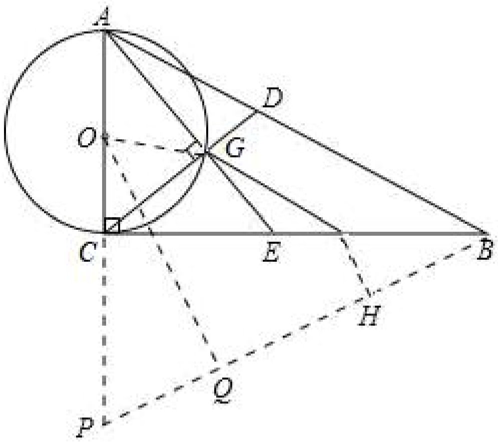
【答案】$\frac{3\sqrt{3}}{2}-1$

【分析】由 $\frac{1}{2}FB$ 联想到给 FB 构造含 30° 角的直角三角形，故把 $Rt\Delta ABC$ 补成等边 ΔABP，过 F 作

BP 的垂线 FH，$GF+\frac{1}{2}FB=GF+FH$，易得当 G、F、H 成一直线时，$GF+\frac{1}{2}FB$ 最短，又由于点 G 为动点，易证点 G 在以 AC 为直径的圆上，求点 G 到 PB 的最短距离即当点 G 在点 O 到 BP 的垂线段上时，GQ 的长度．

【详解】延长 AC 到点 P，使 $CP=AC$，连接 BP，过点 F 作 $FH\perp BP$ 于点 H，取 AC 中点 O，连接 OG，过点 O 作 $OQ\perp BP$ 于点 Q，

$\because \angle ACB=90°$，$\angle ABC=30°$，$AB=4$



$\therefore AC=CP=2$ ，$BP=AB=4$

$\therefore \triangle ABP$ 是等边三角形

$\therefore \angle FBH=30°$

$\therefore$ $Rt\triangle FHB$ 中，$FH=\frac{1}{2}FB$

$\therefore$ 当 G、F、H 在同一直线上时，

$GF+\frac{1}{2}FB=GF+FH=GH$ 取得最小值

$\because AE\perp CD$ 于点 G

$\therefore \angle AGC=90°$

$\because O$ 为 AC 中点

$\therefore OA=OC=OG=\frac{1}{2}AC$

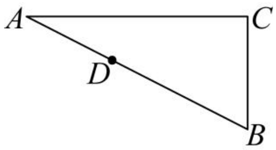
$\therefore A$、C、G 三点共圆，圆心为 O，即点 G 在$\odot O$ 上运动，

$\therefore$ 当点 G 运动到 OQ 上时，GH 取得最小值

$\because Rt\triangle OPQ$ 中，$\angle P=60°$，$OP=3$，$\sin\angle P=\frac{OQ}{OP}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore OQ=\frac{\sqrt{3}}{2}OP=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ $\therefore GH$ 最小值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$-1

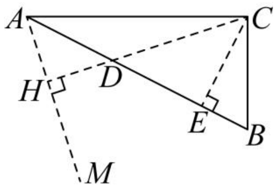
14．如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=4$，$BC=3$，点 D 是斜边 AB 上的动点，则 $CD+\frac{\sqrt{2}}{2}AD$ 的最小值为____________．



【答案】$\dfrac{14\sqrt{2}}{5}$

【分析】根据两点之间线段最短画出图形，再根据锐角三角函数及相似三角形判定可知$\triangle BCE\backsim\triangle BAC$，最后利用相似三角形的性质及直角三角形的性质即可解答.

【详解】解：过点A做$\angle BAM=45°$，过点D作$DH\perp AM$于H，过点C作$CE\perp AB$于点E，



$\therefore DH=AD\cdot\sin\angle DAH=AD\cdot\sin 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AD$，

$\therefore CD+\dfrac{\sqrt{2}}{2}AD=CD+DH$，

$\because$两点之间线段最短，

$\therefore$当C、D、H共线时，$CD+DH$的值最小，

即$CD+DH$的最小值为CH，

【法一：正切和角公式】详情见本专辑 1-3 “12345 模型”

$\tan\angle CAH=\dfrac{1+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=7$，故△AHC 的三边之比为$1:7:5\sqrt{2}$，则答案为$\dfrac{14\sqrt{2}}{5}$

【法二：常规法】

$\because\angle ACB=90°$，$AC=4$，$BC=3$，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=5$，

$\because CE\perp AB$，

$\therefore\angle CEB=\angle ACB=90°$，

$\because\angle B=\angle B$，

$\therefore\triangle BCE\backsim\triangle BAC$，

$\therefore\dfrac{CE}{AC}=\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{3}{5}$，

$\therefore CE=\dfrac{3}{5}\times 4=\dfrac{12}{5}$，$BE=\dfrac{3}{5}\times 3=\dfrac{9}{5}$，

$\because\angle CDE=\angle ADH=45°$，$\therefore DE=CE=\dfrac{12}{5}$，

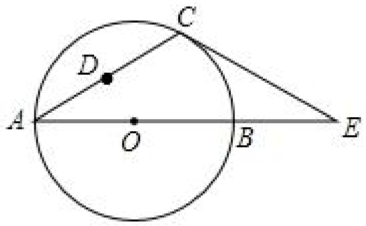
$\therefore CD=\sqrt{2}CE=\dfrac{12\sqrt{2}}{5}$，$AD=AB-DE-BE=5-\dfrac{12}{5}-\dfrac{9}{5}=\dfrac{4}{5}$，

$\therefore DH=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$，$\therefore CH=CD+DH=\dfrac{12\sqrt{2}}{5}+\dfrac{2\sqrt{2}}{5}=\dfrac{14\sqrt{2}}{5}$，故答案为$\dfrac{14\sqrt{2}}{5}$.

【题型 3】胡不归模型·取最值时对其它量进行计算

2023·广东深圳·统考三模

15．如图，在△ACE 中，$CA=CE$，$\angle CAE=30°$，⊙O 经过点 C，且圆的直径 AB 在线段 AE 上．



（1）试说明 CE 是⊙O 的切线；

（2）若△ACE 中 AE 边上的高为 h，试用含 h 的代数式表示⊙O 的直径 AB；

（3）设点 D 是线段 AC 上任意一点（不含端点），连接 OD，当 $\frac{1}{2}CD+OD$ 的最小值为 6 时，求⊙O 的直径 AB 的长．

【答案】（1）证明见试题解析；（2）$AB=\frac{4\sqrt{3}}{3}h$；（3）$8\sqrt{3}$．

【详解】解：（1）连接 OC，如图 1，∵$CA=CE$，$\angle CAE=30°$，

∴$\angle E=\angle CAE=30°$，$\angle COE=2\angle A=60°$，

∴$\angle OCE=90°$，

∴CE 是⊙O 的切线；

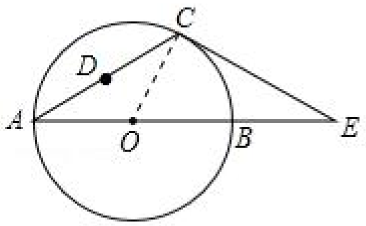


图1

（2）过点 C 作 $CH\perp AB$ 于 H，连接 OC，

如图 2，由题可得 $CH=h$，在 Rt△OHC 中，$CH=OC\cdot\sin\angle COH$，

∴$h=OC\cdot\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}OC$，∴$OC=\frac{2h}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}h$，

∴$AB=2OC=\frac{4\sqrt{3}}{3}h$；

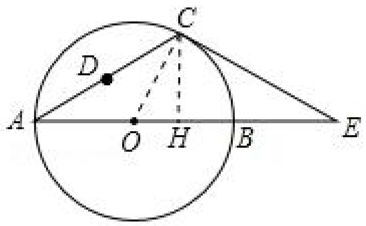


图2

（3）作 OF 平分 $\angle AOC$，交⊙O 于 F，连接 AF、CF、DF，

如图 3，则 $\angle AOF=\angle COF=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}$（$180°-60°$）$=60°$，

∵$OA=OF=OC$，∴△AOF、△COF 是等边三角形，

∴$AF=AO=OC=FC$，∴四边形 $AOCF$ 是菱形，

∴根据对称性可得 $DF=DO$，过点 D 作 $DH\perp OC$ 于 H，∵$OA=OC$，∴$\angle OCA=\angle OAC=30°$，

∴$DH=DC\bullet sin\angle DCH=DC\bullet sin30°=\frac{1}{2}DC$，

∴$\frac{1}{2}CD+OD=DH+FD$．

根据两点之间线段最短可得：当 F、D、H 三点共线时，$DH+FD$（即 $\frac{1}{2}CD+OD$）最小，此时 $FH=OF\bullet sin\angle FOH=\frac{\sqrt{3}}{2}OF=6$，则 $OF=4\sqrt{3}$，$AB=2OF=8\sqrt{3}$，

∴当 $\frac{1}{2}CD+OD$ 的最小值为 6 时，⊙O 的直径 AB 的长为 $8\sqrt{3}$．

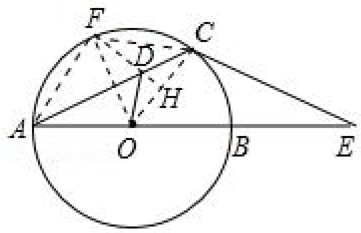


图3

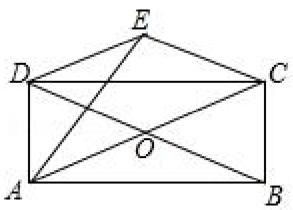
16．如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，ΔCOD 关于 CD 的对称图形为 ΔCED．

（1）求证：四边形 $OCED$ 是菱形；

（2）连接 AE，若 $AB=6cm$，$BC=\sqrt{5}cm$．

①求 $\sin\angle EAD$ 的值；

②若点 P 为线段 AE 上一动点（不与点 A 重合），连接 OP，一动点 Q 从点 O 出发，以 $1cm/s$ 的速度沿线段 OP 匀速运动到点 P，再以 $1.5cm/s$ 的速度沿线段 PA 匀速运动到点 A，到达点 A 后停止运动，当点 Q 沿上述路线运动到点 A 所需要的时间最短时，求 AP 的长和点 Q 走完全程所需的时间．



【解答】（1）证明：$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形.

$\therefore OD=OB=OC=OA$，

$\because \Delta EDC$ 和 ΔODC 关于 CD 对称，

$\therefore DE=DO$， $CE=CO$，

$\therefore DE=EC=CO=OD$，

$\therefore$四边形 $CODE$ 是菱形.

（2）①设 AE 交 CD 于 K .

$\because$四边形 $CODE$ 是菱形，

$\therefore DE//AC$， $DE=OC=OA$，

$\therefore \dfrac{DK}{KC}=\dfrac{DE}{AC}=\dfrac{1}{2}$

$\because AB=CD=6$，

$\therefore DK=2$， $CK=4$，

在 RtΔADK 中， $AK=\sqrt{AD^2+DK^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2}=3$，

$\therefore \sin\angle DAE=\dfrac{DK}{AK}=\dfrac{2}{3}$，

②作 $PF\perp AD$ 于 F . 易知 $PF=AP\cdot\sin\angle DAE=\dfrac{2}{3}AP$，

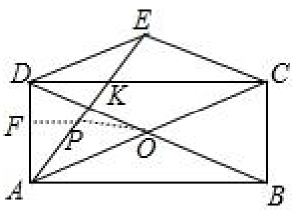
$\because$点 Q 的运动时间 $t=\dfrac{OP}{1}+\dfrac{AP}{\frac{3}{2}}=OP+\dfrac{2}{3}AP=OP+PF$，

$\therefore$当 O 、 P 、 F 共线时， $OP+PF$ 的值最小，此时 OF 是 ΔACD 的中位线，

$\therefore OF=\dfrac{1}{2}CD=3$． $AF=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$， $PF=\dfrac{1}{2}DK=1$，

$\therefore AP=\sqrt{(\dfrac{\sqrt{5}}{2})^2+1^2}=\dfrac{3}{2}$，

$\therefore$当点 Q 沿上述路线运动到点 A 所需要的时间最短时， AP 的长为 $\dfrac{3}{2}cm$， 点 Q 走完全程所需的时间为 $3s$.



17．抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点，与 y 轴交于点 C ，且 $B(-1,0)$， $C(0,3)$.