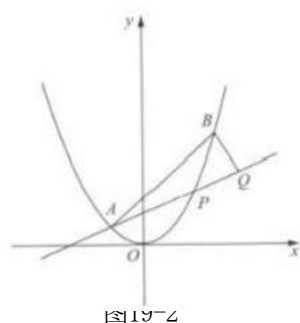


第21题 解几最值求有妙法，构造函数多方出击



(2017年全国高考浙江卷第21题) 如图19-2所示，已知抛物线 $x^2=y$ ，点 $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ 、

点 $B\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ ，抛物线上的点 $P(x, y) \left(-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right)$ 过点B 作直线AP 的垂线，垂足为Q.



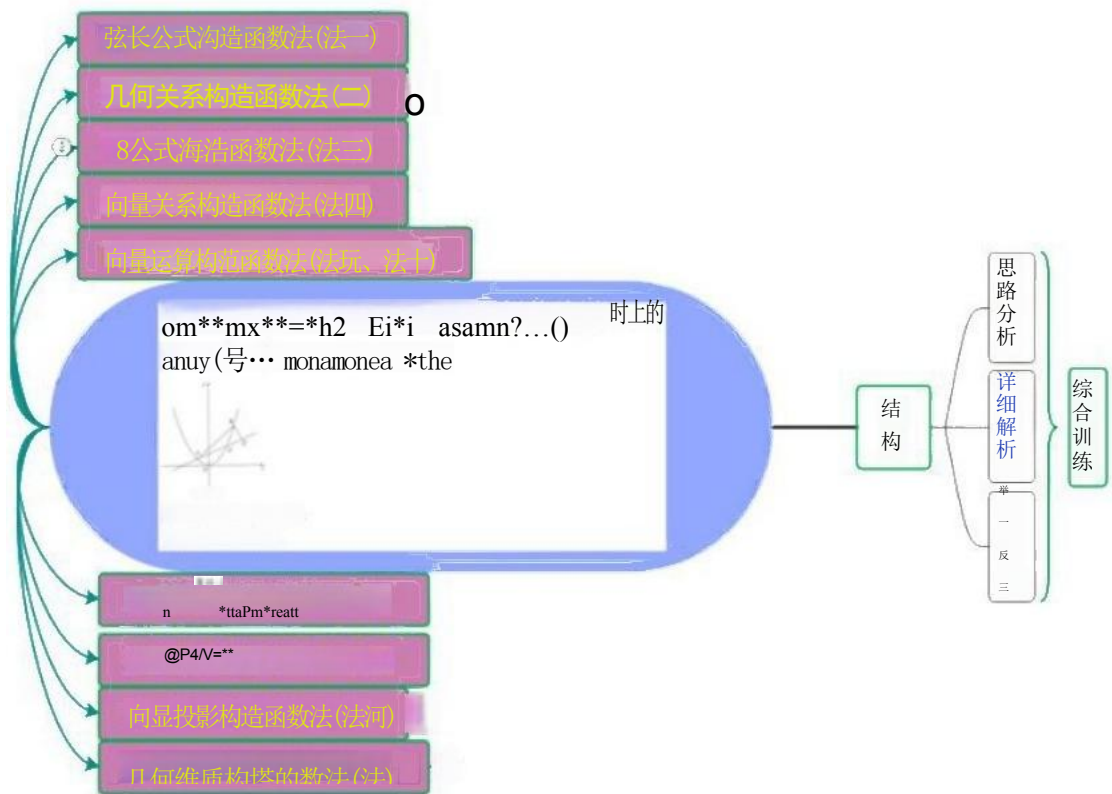
排

(1) 求直线AP 斜率的取值范围；

(2) 求 $|PA| \cdot |PQ|$ 的最大值.



一题多解*综述





题多解法——弦长公式构造函数法

用

思路分析

本例两问以直线与抛物线的位置关系为载体，考查范围与最值的求解，可以有多种解法，其中第(1)小题有三种思路：一是利用直线的斜率公式及 x 的取值范围求解；

二是根据图形分析，抓住极端位置，利用导数确定抛物线在点A处切线斜率及直线AB的斜率，从而确定开区间 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 上斜率的范围；三是转化为直线AP与抛物线在区间 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 内有实数解，由一元二次方程在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 内有交点运用方程理论求解. 第(2)小题思路更多，

思路一，先联立直线AP与BQ的方程，得出点Q的横坐标，并表示出 $|PA|$ 、 $|PQ|$ ，然后构造函数求 $|PA|/|PQ|$ 的最大值

详细解析

$$k = \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{x + \frac{1}{2}} = x - \frac{1}{2}$$

(1) 解法一 设直线AP的斜率为 k ,

$$\therefore -\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \quad \therefore \text{直线AP斜率的取值范围是} (-1, 1).$$

值范围是 $(-1, 1)$.

$$(2) \text{联立直线AP与BQ的方程} \begin{cases} kx - y + \frac{1}{2}k + \frac{1}{4} = 0, \\ x + ky - \frac{9}{4}k - \frac{3}{2} = 0. \end{cases}$$

$$\therefore \text{解得点Q的横坐标是 } x_Q = \frac{-k^2 + 4k + 3}{2(k^2 + 1)}$$

$$|PA| = \sqrt{1+k^2} \left(x + \frac{1}{2} \right) = \sqrt{1+k^2} (k+1) \quad |PQ| = \sqrt{1+k^2} (x_Q - x) = -\frac{(k-1)(k+1)^2}{\sqrt{k^2+1}}$$

$$k = \frac{1}{2} \quad \therefore \frac{27}{16}$$

$$\therefore |PA|/|PQ| = -(k-1)(k+1)^3. \quad \text{令 } f(k) = -(k-1)(k+1)^3.$$

$$\therefore f(k) = -(4k-2)(k+1)^2.$$

$$\therefore f(k) \text{ 在区间 } \left[-1, \frac{1}{2}\right] \text{ 上单调递增, } \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ 上单调递减.}$$

时， $|PAI|PQ|$ 取得最大值

因此，当

.

举一反三

1. 已知点A(0,-2), 椭圆E: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (a>b>0)的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. F 是椭圆E 的右焦点, 直线AF 的斜率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. O 为坐标原点.

(1)求E 的方程;

(2) 设过点A的动直线l 与 E 相交于P,Q

两点. 当△OPQ 的面积最大时, 求l的方程.



一题多解*法二

几何关系构造函数法

提

思路分析 本例两问以直线与抛物线的位置关系为载体, 考查范围与最值的求解, 可以有多种解法, 其中第(1)小题有三种思路: 一是利用直线的斜率公式及x 的取值范围求解; 二是根据图形分析, 抓住极端位置, 利用导数确定抛物线在点A 处切线斜率及直线AB的斜率, 从而确定开区间 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 上斜率的范围; 三是转化为直线AP 与抛物线在区间 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 内有实数解, 由一元二次方程在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 内有交点运用方程理论求解. 第(2)小题思路更多, 思路二, 由弦长公式求|AP|, 利用勾股定理求|AQ|, 而|PQ|=|AQ|-|AP|, 从而得|PA|PQ 解析式, 运用导数求最大值.

详细解析

(1)解法二由题意可知, 直线AP的斜率介于抛物线在点A $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ 处切线斜率与直线AB的斜率之间.

由于y=六的号函数Y=2x, $y'|_{x=-\frac{1}{2}} = -1$, 即抛的线在点A $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ 处切线的斜率为-1, 又直线AB的斜率为1. 故直线AP 斜率的取值范围是(-1, 1).

(2) 设A(x₁,y₁)、P(x₂,y₂), 设直线AP: $y = k\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$.
 $|AQ| = \sqrt{|AB|^2 + |BQ|^2} = \frac{2(k+1)}{\sqrt{k^2+1}}$
 $\therefore$
 联立抛物线方程 $x^2=y$ 得 $x^2 - kx - \frac{1}{2}k - \frac{1}{4} = 0$ 由韦达定理得 $\begin{cases} x_1 + x_2 = k, \\ x_1 x_2 = -\frac{1}{2}k - \frac{1}{4} \end{cases}$

$$\therefore |AP| \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = (k+1) \sqrt{1+k^2}.$$

$$|BQ| = d_{B-AP} = \frac{|8k-8|}{\sqrt{16k^2+16}} = \frac{2|k-1|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

$$\therefore |PA|PO|=|PA|(AQ|-|AP|).$$

$$= (k+1)\sqrt{1+k^2} \left(\frac{2(k+1)}{\sqrt{k^2+1}} - (k+1)\sqrt{1+k^2} \right) = (1-k^2)(1+k)^2.$$

$$\text{令 } f(k) = (1-k^2)(1+k)^2 = -(k-1)(k+1)^3,$$

$$\because f(k) = -(4k-2)(k+1)^2, \quad f'(\frac{1}{2}) = \frac{27}{16}$$

$\therefore f(k)$ 在区间 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上单调递减.

时, $|PA||PQ|$ 取得最大值
为 $\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = 1$.

因此, 当



椭圆的方程

距离公式构造函数法

左、右焦点, 线段 PQ 是椭圆上过

点 F 的弦, 则 $\triangle PFQ$ 内切圆面积的最大值为_____

一题多解*法三

思路分析 本例两问以直线与抛物线的位置关系为载体, 考查范围与最值的求解, 可以有多种解法, 其中第(1)小题有三种思路: 一是利用直线的斜率公式及 x 的取值范围求解; 二是根据图形分析, 抓住极端位置, 利用导数确定抛物线在点 A 处切线斜率及直线 AB 的斜率, 从而确定开区间 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 上斜率的范围; 三是转化为直线 AP 与抛物线在区间 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 内有实数解, 由一元二次方程在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 内有交点运用方程理论求解. 第(2)小题思路更多,

思路三, 运用两点间距离公式求 $|AP||PQ|$ 构造函数, 再进一步求解

$$\begin{cases} y - \frac{1}{4} = k \left(x + \frac{1}{2} \right), \\ y = x^2 \end{cases}$$

详细解析

(1) 解法三 设直线 AP 的斜率为 k , 则直线 AP 的方程为

由

得关于 x 的一元二次方程为 $x^2 - kx - \frac{2k+1}{4} = 0$ 由题意可知, 上述方程在

区间 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 内有实数解.

$$\text{则} \begin{cases} \Delta = (-k)^2 - 4 \times 1 \times \left(-\frac{2k+1}{4}\right) > 0 \\ -\frac{1}{2} < -\frac{-k}{2 \times 1} < \frac{3}{2} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^2 - k \times \frac{3}{2} - \frac{2k+1}{4} > 0 \end{cases}, \text{解得 } -1 < k < 1.$$

故直线AP 斜率的取值范围是 $(-1, 1)$.

$$(2) \text{ 设 } A\left(k^2 + \frac{1}{4}, k\right), P\left(k^2 + \frac{1}{2}, k^2 + k + \frac{1}{4}\right), Q\left(k^2 + \frac{1}{4}, k\right).$$

$$\text{设直线 } AP: y = k\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}, \text{ 联立抛物线方程 } x^2 = y \text{ 得 } x^2 - kx - \frac{1}{2}k - \frac{1}{4} = 0.$$

$$\therefore x_1 + x_2 = k, \quad x_1 = -\frac{1}{2}, \quad \therefore x_2 = k + \frac{1}{2}$$

$$\therefore x_3 = \frac{-k^2 + 4k + 3}{2(k^2 + 1)}.$$

$$\therefore |AP| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = (k+1)\sqrt{1+k^2}$$

$$\because \text{点 } Q \text{ 坐标为 } \left(x_3, k\left(x_3 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\right) \text{ 且 } AQ \cdot BQ = 0,$$

$$, \quad y_3 = \frac{9k^2 + 8k + 1}{4(k^2 + 1)}$$

$$\therefore |PQ| = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = \frac{(k+1)(1-k^2)}{\sqrt{k^2 + 17}}.$$

$$k = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{16}.$$

$$\therefore |PA| \cdot |PQ| = (1-k^2)(1+k)^2.$$

$$\text{令 } f(x) = (1-k^2)(1+k)^2 = -(k-1)(k+1)^3,$$

$$\therefore f(k) = -(4k-2)(k+1)^2.$$

$$\therefore f(k) \text{ 在区间 } \left(-1, \frac{1}{2}\right) \text{ 上单调递增, } \left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ 上单调递减.}$$

因此, 当 $\lambda = -1$ 时, $|PA||PQ|$ 取得最大值

举一反三

3. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 上一点 $M(4, -4)$, A, B 是抛物线 C 上的两动点, 且 $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$,

则点 M 到直线 AB 距离的最大值是 _____



题多解*法四

向量关系构造函数法

用

思路分析

本例两问以直线与抛物线的位置关系为载体,考查范围与最值的求解,可以有多种解法,其中第(1)小题有三种思路:一是利用直线的斜率公式及 x 的取值范围求解;二是根据图形分析,抓住极端位置,利用导数确定抛物线在点 A 处切线斜率及直线 AB 的斜率,从而确定开区间 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 上斜率的范围;三是转化为直线 AP 与抛物线在区间 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 内有实数解,由一元二次方程在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 内有交点运用方程理论求解.第(2)小题思路更多,思路四,利用 AP 、 AQ 共线, BQ 、 AQ 垂直得方程组求 x ,进一步求 $|PQ|$,而 $|AP|$ 易求,再结合导数法求解.

详细解析

(1) 同上

(2) 设 $P\left(t, t^2\right)\left(-\frac{1}{2} < t < \frac{3}{2}\right), Q\left(x_3, y_3\right)$,

$$\text{则 } |AP| = \left| \left(t + \frac{1}{2}, t^2 - \frac{1}{4} \right) \right| = \sqrt{\left(t + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(t^2 - \frac{1}{4} \right)^2} = \sqrt{\left(t + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(t^2 - \frac{1}{4} \right)^2} = \sqrt{\left(t + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(t^2 - \frac{1}{4} \right)^2}$$

$$\begin{cases} \left(x_3 + \frac{1}{2} \right) \left(x_3 - \frac{3}{2} \right) + \left(y_3 - \frac{1}{4} \right) \left(y_3 - \frac{9}{4} \right) = 0, \\ \left(x_3 + \frac{1}{2} \right) \left(x_3 - \frac{3}{2} \right) + \left(y_3 - \frac{1}{4} \right) \left(y_3 - \frac{9}{4} \right) = 0, \end{cases}$$

$$x_3 = \frac{-4t^2 + 20t + 3}{2(4t^2 - 4t + 5)}$$

$\because AP$ 与 AQ 共线, $BQ \perp AQ, \therefore$

$$|PQ| = \sqrt{1 + \left(t - \frac{1}{2} \right)^2} |x_3 - t|.$$

由此,求得点 Q 数坐标为

进一步求出

$$\therefore |PA||PQ| = \left(t + \frac{1}{2}\right) \sqrt{t^2 - t + \frac{5}{4}} \cdot \sqrt{1 + \left(t - \frac{1}{2}\right)^2} \left| \frac{-4t^2 + 20t + 3}{2(4t^2 - 4t + 5)} - t \right| = \frac{1}{16}(-16t^4 + 24t^2 + 16t + 3)$$

$$\text{己 } g(t) = \frac{1}{16}(-16t^4 + 24t^2 + 16t + 3), \text{ 则 } g'(t) = (-4t^3 + 12t + 1),$$

$$\therefore \text{当 } t=1 \text{ 时取得最大值. 此时 } g(t)_{\max} = \frac{27}{16}.$$

举一反三

(23-24 高三下·上海浦东新·期中)

4. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 点 F_1 、 F_2 分别为椭圆的左、右焦点.

(1) 若椭圆上点 P 满足 $PF_2 \perp F_1F_2$, 求 $|PF_1|$ 的值;

(2) 点 A 为椭圆的右顶点, 定点 $T(t, 0)$ 在 x 轴上, 若点 S 为椭圆上一动点, 当 $|ST|$ 取得最小值时点 S 恰与点 A 重合, 求实数 t 的取值范围;

(3) 已知 m 为常数, 过点 F_2 且法向量为 $(1, -m)$ 的直线 l 交椭圆于 M 、 N 两点, 若椭圆 C 上存

群

在点 R 满足: $\overrightarrow{OR} = \lambda \overrightarrow{OM} + \mu \overrightarrow{ON}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$), 求 $\lambda + \mu$ 的最大值.

向量运算构造函数法

思路分析 本例两问以直线与抛物线的位置关系为载体, 考查范围与最值的求解, 可以有多种解法, 其中第(1)小题有三种思路: 一是利用直线的斜率公式及 x 的取值范围求解; 二是根据图形分析, 抓住极端位置, 利用导数确定抛物线在点 A 处切线斜率及直线 AB 的斜率, 从而确定开区间 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 上斜率的范围; 三是转化为直线 AP 与抛物线在区间 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 内有实数解, 由一元二次方程在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 内有交点运用方程理论求解. 第(2)小题思路更多, 思路五, 运用向量运算实现转化, 运用导数或四元均值不等式或配方法求解.

详细解析

(1) 同上

(2) $|PA||PQ| = -PA \cdot PQ = -PA \cdot (PB + BQ)$, $\therefore PA \cdot BQ = 0$,

$$\therefore |PA||PQ| = -PA \cdot PB = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2} - x\right) + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{9}{4} - x^2\right) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{3}{2} - x\right) \quad 1 < x < \frac{3}{2}$$

令 $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{3}{2} - x\right)$ $\left(-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right)$ (此函数求最大值的方法有多种).

方法1: $f'(x) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2(1-x)$, $\therefore$ 当 $-\frac{1}{2} < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当

时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

∴当 $x=1$ 时, $f(x)$ 取得最大值, 且 $[f(x)]_{\max} = f(1) = \frac{27}{16}$. $|PA| \cdot |PQ|$ 的最大值为 $\frac{27}{16}$.

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2} - x\right) = \frac{1}{3} \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{9}{2} - 3x\right) \leq$$

$$\frac{1}{3} \left[\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right) + \left(x + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{9}{2} - 3x\right)}{4} \right]^3 = \frac{27}{16}$$

(四元均值不等式).

当且仅当 $\frac{1}{2} + x = \frac{9}{2} - 3x$, 即 $x=1$ 时取等号, ∴ $|PA| \cdot |PQ|$ 的最大值为 $\frac{27}{16}$.

方法3: $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2} - x\right) = -x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} = -\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + \frac{27}{16} = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{16} \leq \frac{27}{16}$.

当且仅当: $-1=0, x-\frac{3}{2}=0$ 得 $x=1 \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 取等号.

∴ $|PA| \cdot |PQ|$ 的最大值为 $\frac{27}{16}$.

举一反三

(23-24高二上·广东东莞·期中)

5. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a>0, b>0$) 的离心率为2, F_1, F_2 分别是双曲线的左、右焦点, 点 $M(-a, 0), N(0, b)$, 点 P 为线段 MN 上的动点, 当 $|PF_1| \cdot |PF_2|$ 取得最大值和最小值时,

$\triangle PF_1F_2$ 的面积分别为 S_1, S_2 , 则 $\frac{S_1}{S_2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

向量投影构造函数法

思路分析

本例两问以直线与抛物线的位置关系为载体, 考查范围与最值的求解, 可以有多种解法, 其中第(1)小题有三种思路: 一是利用直线的斜率公式及 x 的取值范围求解; 二是根据图形分析, 抓住极端位置, 利用导数确定抛物线在点 A 处切线斜率及直线 AB 的斜率, 从而确定开区间 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 上斜率的范围; 三是转化为直线 AP 与抛物线在区间 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 内有实数解, 由一元二次方程在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 内有交点运用方程理论求解. 第(2)小题思路更多, 思路六, 运用向量数量积的几何意义求解.

详细解析

(1) 同上.

(2) $\because |PO|$ 是 PB 在 PQ 上的投影,

$$\therefore |PA| \cdot |PQ| = |PA| \cdot |PO| = |PA| \cdot |PB|$$

$$\text{设 } PA \cdot PB = \left(t + \frac{1}{2}, t^2 - \frac{1}{4}\right) \left(t - \frac{3}{2}, t^2 - \frac{9}{4}\right) = t^4 - \frac{3}{2}t^2 - t - \frac{3}{16}$$

$$g(t)_{\min} = -\frac{27}{16},$$

则

$$\text{记 } g(t) = t^4 - \frac{3}{2}t^2 - t - \frac{3}{16} \text{ 则 } g'(t) = (t-1)(2t+D), \therefore \text{ 当 } t=1 \text{ 时,}$$

$$\therefore |PA| \cdot |PQ| \text{ 的最大值为 } \frac{27}{16}.$$

一题多解*法七 极化恒等式转化法

用

思路分析 本例两问以直线与抛物线的位置关系为载体,考查范围与最值的求解,可以有多种解法,其中第(1)小题有三种思路: 一是利用直线的斜率公式及 x 的取值范围求解; 二是根据图形分析,抓住极端位置,利用导数确定抛物线在点 A 处切线斜率及直线 AB 的斜率,从而确定开区间 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 上斜率的范围; 三是转化为直线 AP 与抛物线在区间 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 内有实数解,由一元二次方程在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 内有交点运用方程理论求解. 第(2)小题思路更多,思路七,使用极化恒等式,构造以 AB 中点 M 为圆心的圆与抛物线相切求解.

详细解析

(1) 同上

(2) $\because |PO|$ 是 PB 在 PQ 上的投影, $\therefore |PA| \cdot |PQ| = |PA| \cdot |PO| = |PA| \cdot |PB|$.

取 AB 中点 M , 则由极化恒等式可得 $PA \cdot PB = PM^2 - BM^2$.

$\because BM$ 是定值, $\therefore$ 要求 $PA \cdot PB$ 最小值, 只要求 $|PM|$ 的最小值.

以 M 为圆心作圆 M , 使得圆和抛物线相切, 此时 $|PM|$ 最小.

与抛物线方程 $x^2=y$ 联立得

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x^2 - \frac{5}{4}\right)^2 = a \quad (a > 0).$$

$$k_2 = (x^2)' \Big|_{x=x_2} = 2x_2.$$

设 $P(x_2, y_2)$, 则抛物线在点 P 处的斜率为

$$\because k_2 k_{MP} = -1, \therefore 2x_2 \cdot \frac{x_2 - \frac{3}{2}}{x_2 - \frac{1}{2}} = -1$$

$$\therefore \text{可得 } P(1, 1), \text{ 此时 } |PA||PQ| = \overline{PM}^2 \text{ 得 } x_2 = 1 = \frac{27}{16}$$

思路分析



题多解*法八 几何性质构造函数法

, 即 $|PA|PQ|$ 的最大值为 $\frac{27}{16}$

本例两问以直线与抛物线的位置关系为载体, 考查范围与最值的求解, 可以有多种解法, 其中第(1)小题有三种思路: 一是利用直线的斜率公式及 x 的取值范围求解; 二是根据图形分析, 抓住极端位置, 利用导数确定抛物线在点 A 处切线斜率及直线 AB 的斜率, 从而确定开区间 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 上斜率的范围; 三是转化为直线 AP 与抛物线在区间 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 内有实数解, 由一元二次方程在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 内有交点运用方程理论求解. 第(2)小题思路更多, 思路八, 构造以 AB 为直径的圆, 利用相交弦定理构造函数求解.

详细解析

(1)

(2) 直径的圆上, 如图19-3所示, 易知 $|AB|=2\sqrt{2}$, 则半径 $r=\sqrt{2}$.

设 A 交 MP 与圆的交点分别为 E 、 F ,

$$|PA||PQ| = |PE||PF| = 2 \left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(x^2 - \frac{5}{4} \right)^2 \right] = -x^4 + \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{3}{16}.$$

则由相交弦定理得

令

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{3}{2} - x\right) \left(-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right) \quad (\text{此函数求最大值的方法有多种}).$$

方法1: $f'(x) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2(1-x)$, $\therefore$ 当 $-\frac{1}{2} < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $1 < x < \frac{3}{2}$

时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减. 且 $[f(x)]_{\max} = f(1) = \frac{27}{16}$

$\therefore$ 当 $x=1$ 时, $f(x)$ 取得最大值, $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2} - x\right) = \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{9}{2} - 3x\right) \leq$ 的最大值为 $\frac{27}{16}$.

$$\frac{1}{3} \left[\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) + \left(x + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{9}{2} - 3x\right)}{4} \right]^4 = \frac{27}{16}$$

为 $\frac{27}{16}$.

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{3}{2} - x\right) = -x^4 + \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{1}{16} = -\frac{1}{4}(x^2 - 1)^2 + \frac{27}{16} \leq \frac{27}{16}$$

当且仅当 $\frac{1}{2} + x = \frac{9}{2} - 3x$ 即 $x=1$ 时取等号, $\therefore |PA| \cdot |PQ|$ 的最大值

方法3:

当且仅当 $x^2 - 1 = 0, x - 1 = 0$ 得 $x = 1 \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 取等号.
 $\therefore |PA| \cdot |PQ|$ 的最大值为 $\frac{27}{16}$.

举一反三

参数方程构造函数法

(2023·浙江宁波·一模)

6. 已知抛物线 $F: y^2 = 2x$ 与直线 $l: y = -x + 4$ 围成的封闭区域中有矩形 $ABCD$, 点 A, B 在

抛物线上, 点 C, D 在直线 l 上, 则矩形对角线 BD 长度的最大值是 _____



题多解*法九

■ 本例两问以直线与抛物线的位置关系为载体, 考查范围与最值的求解, 可以有

多种解法, 其中第(1)小题有三种思路: 一是利用直线的斜率公式及 x 的取值范围求解;

二是根据图形分析, 抓住极端位置, 利用导数确定抛物线在点 A 处切线斜率及直线 AB 的斜

率，从而确定开区间上斜率的范围；三是转化为直线AP 与抛物线在区间 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 内有实数解，由一元二次方程在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 内有交点运用方程理论求解. 第(2)小题思路更多，思路九，利用直线AP 的参数方程的几何意义求解.

详细解析

(1) 同上,

(2) 设点 $P(m, m^2)$, 直线 AP 的倾斜角为 α , 则直线 AP 的参数方程为 $\begin{cases} x = m + t \cos \alpha, \\ y = m^2 + t \sin \alpha. \end{cases}$

以 AB 为直径的圆的方程为 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = 2$, 点 A, Q 是直线 AP 与圆的两个交点,

把直线方程代入圆的方程, 可得 $t^2 + 2\left[\left(m - \frac{1}{2}\right)\cos \alpha + \left(m^2 - \frac{5}{4}\right)\sin \alpha\right]t + m^4 - \frac{3}{2}m^2 - m - \frac{3}{16} = 0$,
 $\left(m + t \cos \alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(m^2 + t \sin \alpha - \frac{5}{4}\right)^2 = 2$.

整理可得, $-m^4 + \frac{3}{2}m^2 + m + \frac{3}{16}$

$$\therefore |PA||PQ| = f(m) = -m^4 + \frac{3}{2}m^2 + m + \frac{3}{16}.$$

设 $-\frac{1}{2} < m < \frac{3}{2}$ 则 $f(m) = -(2m + D^2(m - I))$.

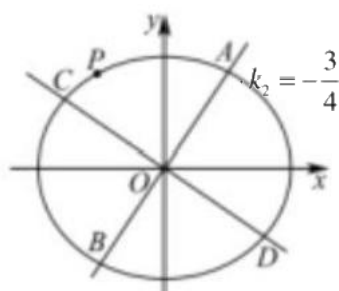
$\therefore f(m)$ 在区间 $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ 内单调递增, 在区间 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 内单调递减.

即 $|PA||PQ|$ 的最大值为 $\frac{27}{16}$.

举一反三

(23-24高二下·黑龙江大庆·开学考试)

7. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过 $\quad$, 且离心率: $e = \frac{1}{2}$



(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 已知经过坐标原点的两条直线分别与椭圆相交于 A, B, C, D 四个点, 若该两条直线的斜率

求 $\triangle AOC$ 的面积;
分别为 a, b, c , 且 k

(3) 如图, 在 (2) 的条件下, 椭圆上一点 P , 位于 A, C 之间, 求四边形 $PAOC$ 面积的最大值.



向量运算构造函数法

思路分析 本例两问以直线与抛物线的位置关系为载体，考查范围与最值的求解，可以有多种解法，其中第(1)小题有三种思路：一是利用直线的斜率公式及 x 的取值范围求解；二是根据图形分析，抓住极端位置，利用导数确定抛物线在点A处切线斜率及直线AB的斜率，从而确定开区间 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 上斜率的范围；三是转化为直线AP与抛物线在区间 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 内有实数解，由一元二次方程在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 内有交点运用方程理论求解. 第(2)小题思路更多，思路十，直接运用向量数量积坐标运算结合均值不等式求解.

详细解析

$$\text{故 } PA = \left(-\frac{1}{2} - x, \frac{1}{4} - x^2\right) \quad PB = \left(\frac{3}{2} - x, \frac{9}{4} - x^2\right)$$

(1) 同上

$$PB = -\left(-\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{3}{2} - x\right)$$

(2) 设 $P(x^2)$, $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$,

而 $PA \perp PQ \Leftrightarrow PA \cdot PQ = 0$

$$PQ = -PA(PB + BO) = -PA$$

$$-\left(\frac{1}{4} - x^2\right)\left(\frac{9}{4} - x^2\right) = \left(\frac{1}{2} + x\right)\left(\frac{3}{2} - x\right),$$

令 $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{3}{2} - x\right)$ $\left(-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right)$ (此函数求最大值的方法有多种).

方法1: $f'(x) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2} - x\right) - \left(x + \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{3} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \left(3 - 4x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{5}{2} - 4x\right)$ 当 $\frac{1}{2} < x < \frac{5}{4}$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $\frac{5}{4} < x < \frac{3}{2}$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

当 $x = \frac{5}{4}$ 时, $f(x)$ 取得最大值, 且 $f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{27}{16}$. 故 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{27}{16}$.

方法2: $\frac{1}{2} + x = \frac{9}{2} - 3x$,

(四元均值不等式).

当且仅当

方法3:

即 $x=1$ 时取等号, $\therefore |PA|PQ|$ 的最大值为 $\frac{27}{16}$.

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{3}{2} - x\right) = -x^4 + \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{3}{16} = -(x^2 - 1)^2 - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{27}{16} \leq \frac{27}{16}$$

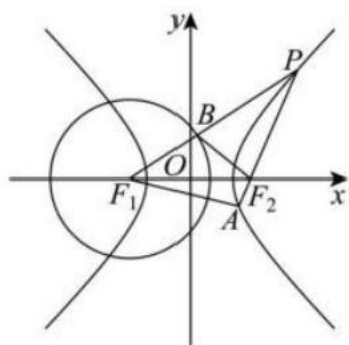
当且仅当 $E-1=0, x-1=0$ 得, $x=1 \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 取等号.

$\therefore |PA||PQ|$ 的最大值为 $\frac{27}{16}$.

举一反三

(23-24高二上·河北石家庄·期末)

8. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率为 $\sqrt{2}$, 点 F_1, F_2 分别是双曲线的左右焦点, 过 F_2 的直线交双曲线右支于 P, A 两点, 点 P 在第一象限, 当直线 PA 的斜率不存在时, $|PA|=2\sqrt{2}$.



(1) 求双曲线的标准方程;

(2) 线段 PF_2 交圆 $C_2: (x+2)^2 + y^2 = 8$ 于点 B , 记 $\triangle PFB, \triangle AF_2F, \triangle PAF$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 ,

求 $\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_3}{S_2}$ 的最小值.

【点评】

1. 与圆锥曲线有关的最值或范围问题大都是综合性问题, 解法灵活, 技巧性强, 涉及代数函数、三角函数、平面几何等方面的知识, 求最值常见的解法有几何法和代数法两种, 若题目的条件和结论能明显体现几何特征及意义, 如与圆锥曲线的定义相关或涉及过焦点的弦长、焦半径、焦点三角形等, 则考虑利用图形性质来解决; 若题目的条件和结论能体现一种明确的函数关系, 则可首先建立起目标函数, 再求这个函数的最值, 圆锥曲线中的最值问题的载体是直线与圆锥曲线的关系, 特别是相交所引出的图形的最值问题, 大致可分为两类: ①涉及距离、面积的最值以及与之相关的一些问题; ②求直线或圆锥曲线中几何元素的最值以及这些元素存在最值时求解与之有关的一些问题.

2. 建立目标函数解与圆锥曲线有关的最值问题是一种常规方法, 其关键是选取适当的变量建立目标函数, 然后运用求函数最值的方法确定最值. 此类方法下难点体现在两个方面: ①如何建立目标函数. 关键要把相关图形的特点吃透, 变量可以是直线的斜截、截距、曲线上的

动点坐标、变动的线段等等，通常所得到的解析式的形式不会太简单，对下一步的求解会带来困难. ②对所求得的目标函数如何求其最值，常常需要进行再次构造为常见函数并运用相应的解题策略解之，比如转化为二次函数或三角函数的最值问题，然后利用配方法、基本不等式、函数的单调性或三角函数的有界性等，尤其是对复杂函数解析式的再构造，其方法并非唯一，不同的构造必有多种不同的解法，或繁或简，通过解题经验的积累，尽可能找到最为巧妙的构造，得到最为简捷的解法.



9. 已知点A、B 是双曲线 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 右支上两个不同的动点，O 为坐标原点，则 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ 的取值范围是_____

(2024高三下·全国·专题练习)

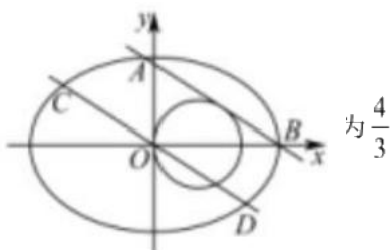
10. 已知F 是椭圆E: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点，A,B 分别是E的左、右顶点，C是E上一点(异于A,B), 线段FC的中点为D,O 为坐标原点， $|\vec{DF}| + |\vec{DO}| = 2|\vec{AF}|$.

(1) 求椭圆 E 的标准方程;

(2) 已知过F 且斜率不为0的直线与椭圆E 交于 M, N 两点，求四边形AMBN 面积的最大值.

(2024高三·全国·专题练习)

11. 如图，已知椭圆C: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ ，直线 $l: y = kx + m (m > 0)$ 与圆C₂: $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 相切且与椭圆C₁交于A,B 两点.



(1) 若线段AB中点的横坐标为 $\frac{4}{3}$ ，求 m 的值;

(2) 过原点O作 l 的平行线 l_2 交椭圆于C,D 两点，设 $|\vec{AB}| = \lambda |\vec{CD}|$ ，求 λ 的最小值.

(23-24高二上·重庆九龙坡·期末)

12. 设双曲线C: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为F, $a^2 + b^2 = 1$, O 为坐标原点，过F 的

直线 l 与 C 的右支相交于 A, B 两点.

(1) 若 $b < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 求 C 的离心率 e 的取值范围;

(2) 若 $\angle AOB$ 恒为锐角, 求 C 的实轴长的取值范围.

(2024·广东佛山·模拟预测)

13. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 中, 焦距为 $4\sqrt{2}$, 且双曲线过点 $P(-3, 1)$. 斜率不为零的直线与双曲线交于 A, B 两点, 且以 AB 为直径的圆过点 P .

(1) 求双曲线的方程;

(2) 是否存在直线 AB , 使得点 P 到直线 AB 的距离最大? 若存在, 求出直线 AB 的方程; 若不存在, 请说明理由.

(2024·陕西·模拟预测)

14. 已知过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F 的直线与抛物线交于 A, B 两点, 抛物线的准线与 x 轴的交点为 M .

(1) 若点 A 的横坐标大于1, 当直线 MA 与抛物线的另一个交点恰好为线段 MA 的中点时, 求直线 AB 的方程;

(2) 求 $\triangle MAB$ 内切圆的圆心到坐标原点距离的最大值.

参考答案:

$$1. (1) \quad \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad (2) \quad y = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}x - 2$$

【详解】试题分析：设出F，由直线AF的斜率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 求得c，结合离心率求得a，再由隐含条件求得b，即可求椭圆方程；(2)点l⊥x轴时，不合题意；当直线l斜率存在时，设直线l:y=kx-2，联立直线方程和椭圆方程，由判别式大于零求得k的范围，再由弦长公式求得|PO|，由点到直线的距离公式求得O到l的距离，代入三角形面积公式，化简后换元，利用基本不等式求得最值，进一步求出k值，则直线方程可求.

试题解析：(1) 设F(c,0)，因为直线AF的斜率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，A(0,-2)

所! ,c=√5.

$$\text{又 } \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, b^2 = a^2 - c^2$$

解得a=2,b=1,

所以椭圆E的方程: 为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

$$(2) \text{解: 设 } P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) \quad k^2 > \frac{3}{4} \quad k < -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad k > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

由题意可设直线l的方程为: $y=kx-2$,

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ y = kx - 2. \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 x_2 = \frac{12}{1+4k^2} \\ \text{消去 } y \text{ 得 } (1+4k^2)x^2 - 16kx + 12 = 0, \end{matrix}$$

$$y=kx-2.$$

当 $A=16(4k^2-3)>0$, 所以

, 即 或 时

$$x_1 + x_2 = \frac{16k}{1+4k^2}.$$

$$\text{所以 } |PQ| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2}$$

$$= \sqrt{1+k^2} \sqrt{\left(\frac{16k}{1+4k^2}\right)^2 - \frac{48}{1+4k^2}}$$

$$= \frac{4\sqrt{1+k^2}\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2}$$

$$\text{点O到直线l的距离 } d = \frac{2}{\sqrt{k^2+1}}$$

所以 $S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2}d|PQ| = \frac{4\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2},$

设 ~~$\sqrt{4k^2-3} > 0$~~ , 则 ~~$4k^2 = t^2 + 3$~~ ,

$$S_{\triangle OPQ} = \frac{4t}{t^2 + 4} = \frac{4}{t + \frac{4}{t}} \leq \frac{4}{2\sqrt{4}} = 1,$$

$$k = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$$

当且仅当 $t=2$, 即 $\sqrt{4k^2-3}=2$,

解得, $y = \frac{\sqrt{7}}{2}x - 2$ 或 $y = -\frac{\sqrt{7}}{2}x - 2$

满足 $k^2 > \frac{3}{4}$

所以 $\triangle OPQ$ 的面积最大时直线 l 的方程为:

或

【方法点睛】 本题主要考查待定系数法求椭圆方程及圆锥曲线求最值, 属于难题. 解决圆锥曲线中的最值问题一般有两种方法: 一是几何意义, 特别是用圆锥曲线的定义和平面几何的有关结论来解决, 非常巧妙; 二是将圆锥曲线中最值问题转化为函数问题, 然后根据函数的特征选用参数法、配方法、判别式法、三角函数有界法、函数单调性法以及均值不等式法,

本题(2)就是用的这种思路利用均值不等式法求三角形最值的.

$$S_{\triangle PF_1Q} = \frac{1}{2} |PQ| \cdot d$$

$$2. \quad \frac{9}{16} \pi \quad S_{\triangle PF_1Q} = \frac{1}{2} |F_1F_2| |y_1 - y_2|$$

【分析】

$$\therefore r = \frac{S_{\triangle PF_1Q}}{4} \quad r = \frac{S_{\triangle PF_1Q}}{4}$$

解法一:

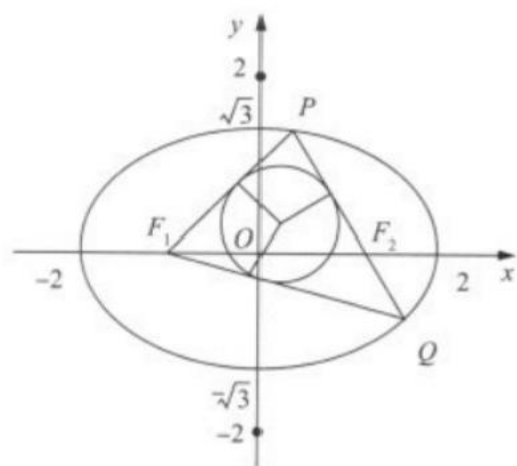
, 点 F 到直线 PQ 的距离为 d . 由弦长公式和点到直线距离公式,

求最大值.

解法二:

, 由弦长公式和基本不等式求最大值.

【详解】 解法一如图所示, $\triangle PKQ$ 的: $S_{\triangle PF_1Q} = \frac{1}{2} (|PF_1| + |QF_1| + |PQ|) \cdot r = 4r$, :



$$S_{\triangle PF_1Q} = \frac{1}{2} \cdot |F_1F_2| \cdot |PQ| = 3 \quad r = \frac{3}{4}$$

当直线 PQ 的斜率不存在时，易得 $|PQ|=3$ ，此时

， $\therefore$

当直线 PQ 的斜率为 k 时，直线 PQ 的方程为 $y=k(x-1)$ 。将 $y=k(x-1)$ 代入 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 并

$$\text{整理得：} (4k^2+3)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0 \quad x_1x_2 = \frac{4k^2-12}{4k^2+3}$$

设 $P(x_1, y_1)$ 、 $Q(x_2, y_2)$ ，则

$$\begin{aligned} |PQ| &= \sqrt{1+K^2} \cdot \sqrt{(x_1-x_2)^2} = \sqrt{1+K^2} \cdot \sqrt{\frac{2|K|}{\sqrt{K^2+1}}} \\ &= \sqrt{1+K^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{8k^2}{4k^2+3}\right)^2 - \frac{12 \cdot 4k^2 \sqrt{k^2+1}}{4k^2+3}} = \frac{12 \left(\frac{k^2 S_{\triangle PF_1Q}}{4k^2+12} \right)^2}{\left(\frac{k^2 (k^2+1)}{(4k^2+3)^2} \right)^2} = \frac{k^2 (k^2+1)}{[3(k^2+1)+k^2]^2}, \end{aligned}$$

$$\because \text{点 F 到直线 PQ 的距离, } \left(\frac{S_{\triangle PF_1Q}}{12} \right)^2 = \frac{uv}{(3u+v)^2} = \frac{1}{9 \times \frac{u}{v} + \frac{v}{u} + 6}, \text{ 且 } \frac{u}{v} = \frac{k^2+1}{k^2} > 1,$$

$$\text{设 } t = \frac{u}{v} (t > 1) \quad f(t) = 9t + \frac{1}{t} + 6 \quad f'(t) = 9 - \frac{1}{t^2}$$

$$\therefore 9 \cdot \frac{u}{v} + \frac{v}{u} + 6 > f(1) = 16, \text{ 则 } \left(\frac{S_{\triangle PF_1Q}}{12} \right)^2 < \frac{1}{16}$$

设 $u=k^2+1, v=k^2$ ，则

), 设 , 则 , 当 $t > 1$ 时, $f(t) > 0$,

$$. = S_{mo} < 3, \therefore r < \frac{3}{4}.$$

综上，当直线 PQ 垂直于 x 轴时， $\triangle PFQ$ 的内切圆半径 r 取得最大值 $\frac{3}{4}$ ，

$\therefore \triangle PFQ$ 的内切圆面积的最大值为 $\frac{9}{16} \pi$ 。

解法二显然直线 PQ 的斜率不为 0，故可设其方程为 $x=my+1$ ，将 $x=my+1$ 代入 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，

并整理得 $(3m^2+4)y^2 + 6my - 9 = 0$ ，

设 $P(k, y_1), Q(s, y_2)$ ，则 $y_1 + y_2 = -\frac{6m}{3m^2+4}$ ， $y_1 y_2 = -\frac{9}{3m^2+4}$ 。

$$\therefore S_{\triangle PF_1Q} = \frac{1}{2} |F_1F_2| |y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \frac{12\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4} = \frac{12}{3\sqrt{m^2+1} + \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}},$$

令 $t = \sqrt{m^2 + 1} \geq 1$.

设 $f(t) = 3 - \frac{1}{t^2}$, 则当 $t > 1$ 时, $f'(t) = \frac{2}{t^3} > 0$, $\therefore f(t) > f(1) = 2$.

答案第3页, 共24页

以上内容仅为本文档的试下载部分, 为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文, 请访问:

<https://d.book118.com/488026055007006073>