专题 05 一元二次不等式与其他常见不等式解法

【考点预测】

1、一元二次不等式

一元二次不等式$ax^2+bx+c>0(a\neq 0)$，其中$\Delta=b^2-4ac$，x_1,x_2是方程$ax^2+bx+c>0(a\neq 0)$的两个根，且$x_1<x_2$

（1）当$a>0$时，二次函数图象开口向上.

（2）①若$\Delta>0$，解集为$\left\{x\mid x>x_2\text{或}x<x_1\right\}$.

②若$\Delta=0$，解集为$\left\{x\mid x\in R\text{且}x\neq -\dfrac{b}{2a}\right\}$.

③若$\Delta<0$，解集为R.

(2) 当$a<0$时，二次函数图象开口向下.

①若$\Delta>0$，解集为$\left\{x\mid x_1<x<x_2\right\}$

②若$\Delta\leq 0$，解集为$\varnothing$

2、分式不等式

（1）$\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0$

（2）$\dfrac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)<0$

（3）$\dfrac{f(x)}{g(x)}\geq 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\geq 0\\g(x)\neq 0\end{cases}$

（4）$\dfrac{f(x)}{g(x)}\leq 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\leq 0\\g(x)\neq 0\end{cases}$

3、绝对值不等式

（1）$\left|f(x)\right|>\left|g(x)\right|\Leftrightarrow[f(x)]^2>[g(x)]^2$

（2）$\left|f(x)\right|>g(x)(g(x)>0)\Leftrightarrow f(x)>g(x)\text{或}f(x)<-g(x)$；

$\left|f(x)\right|<g(x)(g(x)>0)\Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$；

（3）含有两个或两个以上绝对值符号的不等式，可用零点分段法和图象法求解

【方法技巧与总结】

1.已知关于x的不等式$ax^2+bx+c>0$的解集为$(m，n)$（其中$mn>0$），解关于x的不等式$cx^2+bx+a>0$.

由$ax^2+bx+c>0$的解集为$(m，n)$，得:$a(\frac{1}{x})^2+b\frac{1}{x}+c>0$的解集为$(\frac{1}{n}，\frac{1}{m})$，即关于$x$的不等式$cx^2+bx+a>0$的解集为$(\frac{1}{n}，\frac{1}{m})$.

已知关于x的不等式$ax^2+bx+c>0$的解集为$(m，n)$，解关于x的不等式$cx^2+bx+a\le 0$.

由$ax^2+bx+c>0$的解集为$(m，n)$，得:$a(\frac{1}{x})^2+b\frac{1}{x}+c\le 0$的解集为$(-\infty，\frac{1}{n}]\cup[\frac{1}{m}，+\infty)$即关于$x$的不等式$cx^2+bx+a\le 0$的解集为$(-\infty，\frac{1}{n}]\cup[\frac{1}{m}，+\infty)$.

2.已知关于x的不等式$ax^2+bx+c>0$的解集为$(m，n)$（其中$n>m>0$），解关于x的不等式$cx^2-bx+a>0$.

由$ax^2+bx+c>0$的解集为$(m，n)$，得:$a(\frac{1}{x})^2-b\frac{1}{x}+c>0$的解集为$(-\frac{1}{m}，-\frac{1}{n})$即关于$x$的不等式$cx^2-bx+a>0$的解集为$(-\frac{1}{m}，-\frac{1}{n})$.

3.已知关于x的不等式$ax^2+bx+c>0$的解集为$(m，n)$，解关于x的不等式$cx^2-bx+a\le 0$.

由$ax^2+bx+c>0$的解集为$(m，n)$，得:$a(\frac{1}{x})^2-b\frac{1}{x}+c\le 0$的解集为$(-\infty，-\frac{1}{m}]\cup[-\frac{1}{n}，+\infty)$即关于$x$的不等式$cx^2-bx+a\le 0$的解集为$(-\infty，-\frac{1}{m}]\cup[-\frac{1}{n}，+\infty)$，以此类推.

4.已知关于x的一元二次不等式$ax^2+bx+c>0$的解集为R，则一定满足$\begin{cases}a>0\\\Delta<0\end{cases}$；

5.已知关于x的一元二次不等式$ax^2+bx+c>0$的解集为ϕ，则一定满足$\begin{cases}a<0\\\Delta\le 0\end{cases}$；

6.已知关于x的一元二次不等式$ax^2+bx+c<0$的解集为R，则一定满足$\begin{cases}a<0\\\Delta<0\end{cases}$；

7.已知关于x的一元二次不等式$ax^2+bx+c<0$的解集为ϕ，则一定满足$\begin{cases}a>0\\\Delta\le 0\end{cases}$.

【题型归纳目录】

题型一：不含参数一元二次不等式的解法

题型二：含参数一元二次不等式的解法

题型三：一元二次不等式与韦达定理及判别式

题型四：其他不等式解法

题型五：二次函数根的分布问题

【典例例题】

题型一：不含参数一元二次不等式的解法

例 1．（2023·新疆乌鲁木齐·二模（理））不等式$(x+2)(x-1)>0$的解集为（　　）

A．$\{x|\ x<-2\}$　　B．$\{x|\ x>1\}$　　C．$\{x|-2<x<1\}$　　D．$\{x|\ x<-2$或$x>1\}$

例 2．（2023·全国·高三专题练习（文））已知函数$f\left(x\right)=a^{x-2}-5$（$a>0$且$a\neq 1$）的图象过定点$\left(m,n\right)$，则不等式$x^2+mx+n+1<0$的解集为（　　）

A．$\left(1,3\right)$　　B．$\left(-3,-1\right)$　　C．$\left(-\infty,-3\right)\cup\left(1,+\infty\right)$　D．$\left(-3,1\right)$

例 3．（2023·全国·高三专题练习）已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases} ln\left(x+1\right), x\geq 0 \\ -2x^2, x<0 \end{cases}$，则不等式$f\left(x+2\right)<f\left(x^2+2x\right)$的解集是（　　）

A．（﹣2，1）　　B．（0，1）　　C．（﹣∞，﹣2）∪（1，+∞）　D．（1，+∞）

例 4．（2023·全国·高三专题练习）关于x的不等式$mx^2-\left(m+2\right)x+m+1>0$的解集为$R$，则实数$m$的范围是（　　）

A．$m<-\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B．$m>\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C．$m>0$　　D．$m>\frac{2\sqrt{3}}{3}$或$m<-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

例 5．（2023·全国·高三专题练习）若函数$f\left(x\right)=3^{|x|}+x^2$，则不等式$f\left(x+1\right)\geq f\left(2x-4\right)$的解集为（　　）

A．$\left[3,+\infty\right)$　　B．$\left(-\infty,2\right]$　　C．$\left[2,3\right]$　　D．$\left[1,5\right]$

【方法技巧与总结】

解一元二次不等式不等式的思路是：先求出其相应方程根，将根标在x轴上，结合图象，写出其解集

题型二：含参数一元二次不等式的解法

例 6．（2023·浙江·高三专题练习）不等式$ax^2-(a+2)x+2\geq 0(a<0)$的解集为（　　）

A．$\left[\frac{2}{a},1\right]$　　B．$\left[1,\frac{1}{a}\right]$

C．$\left(-\infty,\frac{2}{a}\right]\cup[1,+\infty)$　　D．$(-\infty,1]\cup\left[\frac{2}{a},+\infty\right)$

例 7．（2023·全国·高三专题练习）设$a<-1$，则关于x的不等式$a(x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right)<0$的解集为（　　）

A．$\left\{x\,|\,x<a\text{或}x>\frac{1}{a}\right\}$　　B．$\{x|x>a\}$

C．$\left\{x\,|\,x\rangle a\text{或}x<\frac{1}{a}\right\}$　　D．$\left\{x\,|\,x<\frac{1}{a}\right\}$

例 8．（2023·全国·高三专题练习）已知定义在**R**上的函数$f\left(x\right)$满足$f\left(x-y\right)=f\left(x\right)-f\left(y\right)$，且当$x<0$时，

$f(x)>0$，则关于x的不等式$f\left(mx^{2}\right)+f(2m)>f\left(m^{2}x\right)+f(2x)$（其中$0<m<\sqrt{2}$）的解集为（　　）

A．$\left\{x \middle| m<x<\frac{2}{m}\right\}$　　　　B．$\{x \mid x<m$或$x>\frac{2}{m}\}$

C．$\left\{x \middle| \frac{2}{m}<x<m\right\}$　　　　D．$\{x \mid x>m$或$x<\frac{2}{m}\}$

例9．（2023·全国·高三专题练习）在关于x的不等式$x^{2}-(a+1)x+a<0$的解集中至多包含2个整数，则a的取值范围是

A．$(-3,5)$　　B．$(-2,4)$　　C．$[-3,5]$　　D．$[-2,4]$

例10．（2023·浙江·高三专题练习）设$a\in\mathrm{R}$，关于x的二次不等式$ax^{2}-2x-2a>0$的解集为A，集合$B=\left\{x \middle| 1<x<2\right\}$，满足$A\cap B\neq\varnothing$，求实数$a$的取值范围.

例11．（2023·全国·高三专题练习）已知关于x的不等式$(kx-k^{2}-4)(x-4)>0$，其中$k\in\mathrm{R}$.

(1)当k变化时，试求不等式的解集A；

(2)对于不等式的解集A，若满足$A\cap\mathrm{Z}=B$(其中Z为整数集)．试探究集合B能否为有限集？若能，求出使得集合B中元素个数最少的k的所有取值，并用列举法表示集合B；若不能，请说明理由．

例12．（2023·全国·高三专题练习）已知关于x的不等式$\frac{1}{2}x^{2}-mx-\ln x-m<0$的解集为$(a,b)$，其中$a>0$，若该不等式在$(a,b)$中有且只有一个整数解，求实数$m$的取值范围

【方法技巧与总结】

1．数形结合处理.

2．含参时注意分类讨论.

题型三：一元二次不等式与韦达定理及判别式

例 13．（2023·湖南岳阳·二模）已知关于x的不等式$ax^2+2bx+4<0$的解集为$\left(m,\frac{4}{m}\right)$，其中$m<0$，则$\frac{b}{4a}+\frac{4}{b}$的最小值为（　　）

A．-2　　B．1　　C．2　　D．8

例 14．（2023·江苏南京·模拟预测）已知关于x的不等式$x^2-4ax+3a^2<0(a<0)$的解集为$\left(x_1，x_2\right)$，则$x_1+x_2+\frac{a}{x_1x_2}$的最大值是（　　）

A．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B．$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　D．$-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

（多选题）例 15．（2023·全国·高三专题练习）已知关于x的不等式$ax^2+bx+c>0$的解集为$(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$，则（　　）

A．$a>0$

B．不等式$bx+c>0$的解集是$\{x\mid x<-6\}$

C．$a+b+c>0$

D．不等式$cx^2-bx+a<0$的解集为$(-\infty,-\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$

例 16．（2023·全国·高三专题练习）若不等式$ax^2+5x+1\le 0$的解集为$\left\{x\middle|-\frac{1}{2}\le x\le -\frac{1}{3}\right\}$，则不等式$\frac{3x-a}{x-3}<0$的解集为__________.

例 17．（2023·全国·高三专题练习）已知不等式$ax^2-bx-1\ge 0$的解集是$\left\{x\mid -\frac{1}{2}\le x\le -\frac{1}{3}\right\}$，则不等式$x^2-bx-a<0$ 的解集是________.

【方法技巧与总结】

1．一定要牢记二次函数的基本性质．

2．含参的注意利用根与系数的关系找关系进行代换．

题型四：其他不等式解法

例 18．（2023·上海市青浦高级中学高三阶段练习）不等式是$\frac{1}{x}>2$的解集为______.

例 19．（2023·全国·高三专题练习）不等式$\frac{1}{x+1}>1$的解集为__________.

例 20．（2023·全国·高三专题练习）写出一个解集为$\left(0,2\right)$的分式不等式__________.

例 21．（2023·上海·高三专题练习）关于x的不等式$\frac{(x^2-3x-4)^3}{(x+1)(x^2-3x+3)\sqrt{5-x}}\ge 0$的解集为_________.

例 22．（2023·四川德阳·三模（文））对于问题:“已知关于x的不等式$ax^2+bx+c>0$的解集为$\left(-1,2\right)$,解关于x的不等式$ax^2-bx+c>0$”,给出如下一种解法:

解析:由$ax^2+bx+c>0$的解集$\left(-1,2\right)$,得

$a\left(-x\right)^2+b\left(-x\right)+c>0$的解集为$\left(-2,1\right)$,即

关于x的不等式$ax^2-bx+c>0$的解集为$\left(-2,1\right)$.

参考上述解法,若关于x的不等式$\dfrac{k}{x+a}+\dfrac{x+b}{x+c}<0$的解集为$\left(-1,-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},1\right)$,

关于x的不等式$\dfrac{kx}{ax+1}+\dfrac{bx+1}{cx+1}<0$的解集为____.

【方法技巧与总结】

1．分式不等式化为二次或高次不等式处理.

2．根式不等式绝对值不等式平方处理.

题型五：二次函数根的分布问题

例 23．（2023·浙江·高三专题练习）若关于x的方程$ax^2-2ax+1=0$有两个不同的正根，则实数a的取值范围是（　　）

A．$\left(0,1\right)$　　B．$\left(0,+\infty\right)$　　C．$(1,+\infty)$　　D．$\left(-\infty,0\right)$

例 24．（2023·全国·高三专题练习）已知函数$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+ax^2+x+1$在$(-\infty,0)$，$(3,+\infty)$上为增函数，在$\left(1,2\right)$上为减函数，则实数$a$的取值范围为（　　）

A．$(-\infty,-1]$　　B．$\left[-\dfrac{5}{3},-\dfrac{5}{4}\right]$　　C．$\left(-\dfrac{5}{3},-1\right]$　　D．$\left(-\dfrac{5}{3},-\dfrac{5}{4}\right)$

例 25．（2023·全国·高三专题练习）若函数$f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\cos 2x+3a\left(\sin x+\cos x\right)+\left(2a-1\right)x$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递减，则实数$a$的取值范围为

A．$\left[-1,\dfrac{1}{5}\right]$　　B．$\left[-\dfrac{1}{5},1\right]$

C．$\left(-\infty,-\dfrac{1}{5}\right]\cup\left[1,+\infty\right)$　　D．$(-\infty,-1]\cup\left[\dfrac{1}{5},+\infty\right)$

例 26．（2023·全国·高三专题练习）已知曲线$f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-x^2+ax-1$上存在两条斜率为 3 的不同切线，且切点的横坐标都大于零，则实数a可能的取值（　　）

A．$\frac{19}{6}$　　B．3　　C．$\frac{10}{3}$　　D．$\frac{9}{2}$

例 27．（2023·全国·高三专题练习）若一元二次方程$mx^2-(m+1)x+3=0$的两个实根都大于-1，则m的取值范围____

例 28．（2023·全国·高三专题练习）设$f(x)=3ax^2+2bx+c$，若$a+b+c=0, f(0)>0, f(1)>0$，求证：

(Ⅰ) $a>0$且$-2<\frac{b}{a}<-1$；

(Ⅱ)方程$f(x)=0$在$(0,1)$内有两个实根.

【方法技巧与总结】

解决一元二次方程的根的分布时，常常需考虑：判别式，对称轴，特殊点的函数值的正负，所对应的二次函数图象的开口方向.

【过关测试】

一、单选题

1．（2023·河南·南阳中学高三阶段练习（文））已知集合 $A=\left\{x \middle| x^2-2x-8\le 0\right\}$，$B=\left\{x \middle| \frac{x-2}{x+3}\le 0\right\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A．$\left\{x \middle| -2\le x\le 2\right\}$　　B．$\left\{x \middle| -4\le x\le 2, x\ne -3\right\}$

C．$\left\{x \middle| 3\le x\le 4\right\}$　　D．$\left\{x \middle| -3< x\le 4\right\}$

2．（2023·河北·模拟预测）“$a<11$”是“$\exists x\in\mathbf{R}, x^2-2x+a<0$”的（　　）

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

3．（2023·陕西·模拟预测（理））已知集合 $A=\left\{x \mid x^2-3x-4=0\right\}$，$B=\left\{x \mid a<x<a^2\right\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,-1]$　B．$[4,+\infty)$　C．$(-\infty,-1)\cup(2,4)$　D．$[-1,2]\cup[4,+\infty)$

4．（2023·重庆南开中学模拟预测）已知函数 $f(x)=\ln x-\ln(2-x)-\cos\frac{\pi}{2}x$，则关于 t 的不等式 $f(t)+f\left(t^2\right)<0$ 的解集为（　　）

A．$(-2,1)$　B．$\left(-1,\sqrt{2}\right)$　C．$(0,1)$　D．$\left(0,\sqrt{2}\right)$

5．（2023·山西·二模（理））已知集合 $A=\left\{x\in\mathbf{Z} \middle| x^2<3\right\}$，$B=\left\{x \middle| a<x<a+\frac{3}{2}\right\}$，若 $A\cap B$ 有 2 个元素，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$\left(-\frac{3}{2},-1\right)$　B．$\left(-\frac{3}{2},0\right)$　C．$\left(-\frac{3}{2},0\right)\cup(1,+\infty)$　D．$\left(-\frac{3}{2},-1\right)\cup\left(-\frac{1}{2},0\right)$

6．（2023·重庆·高三阶段练习）若关于 x 的不等式 $\sin x|\sin x-k|\le 2$ 对任意 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 恒成立，则实数 k 的取值范围为（　　）

A．$[-1,3]$　B．$\left[-\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right]$　C．$[-1,2\sqrt{2}]$　D．$[1,2\sqrt{2}]$

7．（2023·江苏无锡·模拟预测）已知实数 a，b 满足如下两个条件：（1）关于 x 的方程 $3x^2-2x-ab=0$ 有两个异号的实根（2）$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$，若对于上述的一切实数 a，b，不等式 $a+2b>m^2+2m$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是（　　）

A．$(-4,2)$　　B．$(-2,4)$

C．$(-\infty,-4]\cup[2,+\infty)$　　D．$(-\infty,-2]\cup[4,+\infty)$

8．（2023·全国·高三专题练习）已知 $a\in[-1，1]$，不等式 $x^2+(a-4)x+4-2a>0$ 恒成立，则 x 的取值范围为(
)

A．$(-\infty，2)\cup(3，+\infty)$　　B．$(-\infty，1)\cup(2，+\infty)$

C．$(-\infty，1)\cup(3，+\infty)$　　D．$(1,3)$

二、多选题

9．（2023·全国·高三专题练习）若不等式$\sin^2 x - a\sin x + 2 \ge 0$对任意的$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$恒成立，则实数$a$可能是

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

10．（2023·江苏·高三专题练习）已知不等式$ax^2+bx+c>0$的解集为$\left\{x \middle| m<x<n\right\}$，其中$m>0$，则以下选项正确的有（　　）

A．$a<0$　　B．$c>0$

C．$cx^2+bx+a>0$的解集为$\left\{x \middle| \frac{1}{n}<x<\frac{1}{m}\right\}$　　D．$cx^2+bx+a>0$的解集为$\left\{x \middle| x<\frac{1}{n}或x>\frac{1}{m}\right\}$

11．（2023·全国·高三专题练习）已知函数$f\left(x\right)=2x^2-mx-m^2$，则下列命题正确的有（　　）

A．当$m\ne0$时，$f\left(x\right)<0$的解集为$\left\{x \middle| -\frac{m}{2}<x<m\right\}$

B．当$m=1$时，$\forall x_1,x_2\in\left[1,+\infty\right)$时，$\left(x_1-x_2\right)\left[f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right]>0$

C．$\forall x_1,x_2\in\left(-\infty,\frac{1}{4}m\right]$且$x_1\ne x_2$时，$\frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

D．当$m<0$时，若$0<x_1<x_2$，则$x_2f\left(x_1\right)>x_1f\left(x_2\right)$

12．（2023·重庆巴蜀中学高三阶段练习）已知两个变量x，y的关系式$f(x,y)=x(1-y)$，则以下说法正确的是（　　）

A．$f(1,3)=f(3,1)=0$

B．对任意实数a，都有$f(a,a)\le\frac{1}{4}$成立

C．若对任意实数x，不等式$f(x-a,x)\le-a+4$恒成立，则实数a的取值范围是$[-5,3]$

D．若对任意正实数a，不等式$f(x-a,x)\le-a+4$恒成立，则实数x的取值范围是$(-\infty,0)$

三、填空题

13．（2023·全国·高三专题练习）不等式$ax^2+\frac{1}{a}x+c>0$的解集为$\{x\,|-2<x<1\}$，则函数$y=\sqrt{ax^2+cx}$的单调递增区间是_______

14．（2023·浙江·高三专题练习）若不等式$(3x-b)^2<16$的解集中的整数有且仅有1，2，3，则实数b的取值范围是___________.

15．（2023·全国·高三专题练习）若关于x的不等式$-x^2+\left(a+2\right)x-2a>0$恰有1个正整数解，则$a$的取值范围是___________.

16．（2023·全国·高三专题练习）设a，b，$c\in R$，对任意满足$|x|\leqslant 1$的实数x，都有$\left|ax^2+bx+c\right|\leqslant 1$，则

$|a|+|b|+|c|$的最大可能值为__.

四、解答题

17．（2023·北京·高三学业考试）已知函数 $f(x)=x^2+mx+1$（m 是常数）的图象过点 $(1,2)$.

(1)求 $f(x)$ 的解析式；

(2)求不等式 $f(x)<2x+1$ 的解集.

18．（2023·江西·高三期末（文））已知 $f(x)=|x+2|+|x-1|$.

(1)解不等式 $f(x)\le x+8$；

(2)若关于 x 的不等式 $f(x)\ge m^2-2m$ 在 R 上恒成立，求实数 m 的取值范围.

19．（2023·全国·高三专题练习）设 $f(x)=3ax^2+2bx+c(a\neq 0)$，若 $a+b+c=0$， $f(0)f(1)>0$，求证：

(1)方程 $f(x)=0$ 有实数根；

(2) $-2<\dfrac{b}{a}<-1$；

(3)设 x_1， x_2 是方程 $f(x)=0$ 的两个实数根，则 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\le|x_1-x_2|<\dfrac{3}{2}$.

20．（2023·浙江·高三专题练习）若不等式 $(1-a)x^2-4x+6>0$ 的解集是 $\{x|-3<x<1\}$.

(1)解不等式 $2x^2+(2-a)x-a>0$；

(2) b 为何值时， $ax^2+bx+3\ge 0$ 的解集为 R.

21．（2023·全国·高三专题练习）解关于 x 的不等式： $ax^2+(1-a)x-1<0(a<0)$.

22．（2023·全国·高三专题练习）已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$.

（1）若 $f(-1)=0$，试判断函数 $f(x)$ 零点个数；

（2）是否存在 $a,b,c\in\mathbf{R}$，使 $f(x)$ 同时满足以下条件：

①对任意 $x\in R, f(x-4)=f(2-x)$，且 $f(x)\ge 0$；

②对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $0\le f(x)-x\le\dfrac{1}{2}(x-1)^2$.

若存在，求出 a,b,c 的值，若不存在，请说明理由.

专题05 一元二次不等式与其他常见不等式解法

【考点预测】

1、一元二次不等式

一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(a\neq 0)$，其中 $\Delta=b^2-4ac$， x_1,x_2 是方程 $ax^2+bx+c>0(a\neq 0)$ 的两个根，且 $x_1<x_2$

（1）当 $a>0$ 时，二次函数图象开口向上.

（2）①若 $\Delta>0$，解集为 $\left\{x\,|\,x>x_2\text{或}x<x_1\right\}$.

②若 $\Delta=0$，解集为 $\left\{x\,|\,x\in R\text{且}x\neq -\dfrac{b}{2a}\right\}$.

③若 $\Delta<0$，解集为 R.

(2) 当 $a<0$ 时，二次函数图象开口向下.

①若 $\Delta>0$，解集为 $\left\{x\,|\,x_1<x<x_2\right\}$

②若 $\Delta\leq 0$，解集为 $\varnothing$

2、分式不等式

（1）$\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0$

（2）$\dfrac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)<0$

（3）$\dfrac{f(x)}{g(x)}\geq 0\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\cdot g(x)\geq 0 \\ g(x)\neq 0 \end{cases}$

（4）$\dfrac{f(x)}{g(x)}\leq 0\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\cdot g(x)\leq 0 \\ g(x)\neq 0 \end{cases}$

3、绝对值不等式

（1）$\left|f(x)\right|>\left|g(x)\right|\Leftrightarrow [f(x)]^2>[g(x)]^2$

（2）$\left|f(x)\right|>g(x)(g(x)>0)\Leftrightarrow f(x)>g(x)\text{或}f(x)<-g(x)$；

$\left|f(x)\right|<g(x)(g(x)>0)\Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$；

（3）含有两个或两个以上绝对值符号的不等式，可用零点分段法和图象法求解

【方法技巧与总结】

1.已知关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $(m，n)$（其中 $mn>0$），解关于 x 的不等式 $cx^2+bx+a>0$.

由$ax^2+bx+c>0$的解集为$(m，n)$，得:$a(\frac{1}{x})^2+b\frac{1}{x}+c>0$的解集为$(\frac{1}{n}，\frac{1}{m})$，即关于$x$的不等式$cx^2+bx+a>0$的解集为$(\frac{1}{n}，\frac{1}{m})$.

已知关于x的不等式$ax^2+bx+c>0$的解集为$(m，n)$，解关于x的不等式$cx^2+bx+a\le 0$.

由$ax^2+bx+c>0$的解集为$(m，n)$，得:$a(\frac{1}{x})^2+b\frac{1}{x}+c\le 0$的解集为$(-\infty，\frac{1}{n}]\cup[\frac{1}{m}，+\infty)$即关于$x$的不等式$cx^2+bx+a\le 0$的解集为$(-\infty，\frac{1}{n}]\cup[\frac{1}{m}，+\infty)$.

2.已知关于x的不等式$ax^2+bx+c>0$的解集为$(m，n)$（其中$n>m>0$），解关于x的不等式$cx^2-bx+a>0$.

由$ax^2+bx+c>0$的解集为$(m，n)$，得:$a(\frac{1}{x})^2-b\frac{1}{x}+c>0$的解集为$(-\frac{1}{m}，-\frac{1}{n})$即关于$x$的不等式$cx^2-bx+a>0$的解集为$(-\frac{1}{m}，-\frac{1}{n})$.

3.已知关于x的不等式$ax^2+bx+c>0$的解集为$(m，n)$，解关于x的不等式$cx^2-bx+a\le 0$.

由$ax^2+bx+c>0$的解集为$(m，n)$，得:$a(\frac{1}{x})^2-b\frac{1}{x}+c\le 0$的解集为$(-\infty，-\frac{1}{m}]\cup[-\frac{1}{n}，+\infty)$即关于$x$的不等式$cx^2-bx+a\le 0$的解集为$(-\infty，-\frac{1}{m}]\cup[-\frac{1}{n}，+\infty)$，以此类推.

4.已知关于x的一元二次不等式$ax^2+bx+c>0$的解集为R，则一定满足$\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$；

5.已知关于x的一元二次不等式$ax^2+bx+c>0$的解集为ϕ，则一定满足$\begin{cases}a<0\\ \Delta\le 0\end{cases}$；

6.已知关于x的一元二次不等式$ax^2+bx+c<0$的解集为R，则一定满足$\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}$；

7.已知关于x的一元二次不等式$ax^2+bx+c<0$的解集为ϕ，则一定满足$\begin{cases}a>0\\ \Delta\le 0\end{cases}$.

【题型归纳目录】

题型一：不含参数一元二次不等式的解法

题型二：含参数一元二次不等式的解法

题型三：一元二次不等式与韦达定理及判别式

题型四：其他不等式解法

题型五：二次函数根的分布问题

【典例例题】

题型一：不含参数一元二次不等式的解法

例 1．（2023·新疆乌鲁木齐·二模（理））不等式$(x+2)(x-1)>0$的解集为（　　）

A．$\{x|\ x<-2\}$　　B．$\{x|\ x>1\}$　　C．$\{x|-2<x<1\}$　　D．$\{x|\ x<-2$ 或 $x>1\}$

答案：D

【解析】

分析：

结合一元二次不等式的解法求得正确答案即可.

【详解】

由$(x+2)(x-1)>0$解得$x<-2$，或$x>1$，

所以不等式$(x+2)(x-1)>0$的解集为$\{x|\ x<-2$ 或 $x>1\}$，

故选：D.

例 2．（2023·全国·高三专题练习（文））已知函数$f\left(x\right)=a^{x-2}-5$（$a>0$且$a\neq1$）的图象过定点$\left(m,n\right)$，则不等式$x^2+mx+n+1<0$的解集为（　　）

A．$\left(1,3\right)$　　B．$\left(-3,-1\right)$　　C．$\left(-\infty,-3\right)\cup\left(1,+\infty\right)$　D．$\left(-3,1\right)$

答案：D

【解析】

分析：

根据指数型函数的定点求解m,n，代入后再求解一元二次不等式.

【详解】

当$x=2$时，$f\left(2\right)=a^{2-2}-5=a^0-5=1-5=-4$，故$m=2,n=-4$，所以不等式为$x^2+2x-3<0$，解得$-3<x<1$，所以不等式的解集为$\left(-3,1\right)$.

故选：D

例 3．（2023·全国·高三专题练习）已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases}ln\left(x+1\right),x\geq0\\-2x^2,x<0\end{cases}$，则不等式$f\left(x+2\right)<f\left(x^2+2x\right)$的解集是（　　）

A．（﹣2，1）　　B．（0，1）　　C．（﹣∞，﹣2）∪（1，+∞）　D．（1，+∞）

答案：C

【解析】

分析：

根据$f(x)$解析式，可得$f(x)$的单调性，根据条件，可得$x+2<x^2+2x$

，根据一元二次不等式的解法，即可得答案.

【详解】

函数 $f(x)=\begin{cases} ln(x+1), x\geq 0 \\ -2x^2, x<0 \end{cases}$，可得 $x\geq 0$，$f(x)$递增；

当 $x<0$ 时，$f(x)$递增；且 $x=0$ 时函数连续，

所以$f(x)$在 R 上递增，

不等式$f(x+2)<f(x^2+2x)$，

可化为 $x+2<x^2+2x$，即 $x^2+x-2>0$，解得 $x>1$ 或 $x<-2$，

则原不等式的解集为（－∞，－2）∪（1，+∞）.

故选：C

例 4.（2023·全国·高三专题练习）关于 x 的不等式 $mx^2-(m+2)x+m+1>0$ 的解集为 R，则实数 m 的范围是（　　）

A．$m<-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

B．$m>\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C．$m>0$

D．$m>\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $m<-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

答案：B

【解析】

分析：

根据该不等式是否为二次不等式，分情况讨论.

【详解】

当 $m=0$ 时，该不等式为 $-2x+1>0$，解集为 $x<\frac{1}{2}$，不成立；

当 $m\neq 0$ 时，由不等式的解集为 R，得 $\begin{cases} m>0 \\ \Delta=(m+2)^2-4m(m+1)<0 \end{cases}$，

解得 $m>\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

故选：B.

例 5.（2023·全国·高三专题练习）若函数 $f(x)=3^{|x|}+x^2$，则不等式 $f(x+1)\geq f(2x-4)$ 的解集为（　　）

A．$[3,+\infty)$　　　B．$(-\infty,2]$　　　C．$[2,3]$　　　D．$[1,5]$

答案：D

【解析】

分析：

根据奇偶性定义可知$f(x)$为偶函数，并根据指数函数和二次函数单调性确定$f(x)$的单调性，从而将所求不等式转化为$|x+1|\geq|2x-4|$，解不等式可求得结果.

【详解】

$\because f(x)$定义域为R，$f(-x)=3^{|-x|}+(-x)^2=3^{|x|}+x^2=f(x)$，

$\therefore f(x)$为定义在R上的偶函数，图象关于y轴对称；

当$x\geq0$时，$f(x)=3^x+x^2$，又$y=3^x$，$y=x^2$在$[0,+\infty)$上均为增函数，

$\therefore f(x)$在$[0,+\infty)$上为增函数，则$f(x)$在$(-\infty,0]$上为减函数；

由$f(x+1)\geq f(2x-4)$可得：$|x+1|\geq|2x-4|$，即$(x+1)^2\geq(2x-4)^2$，

解得：$1\leqslant x\leqslant5$，即不等式$f(x+1)\geq f(2x-4)$的解集为$[1,5]$.

故选：D.

【方法技巧与总结】

解一元二次不等式不等式的思路是: 先求出其相应方程根，将根标在x轴上，结合图象，写出其解集

题型二：含参数一元二次不等式的解法

例 6．（2023·浙江·高三专题练习）不等式$ax^2-(a+2)x+2\geq0(a<0)$的解集为（　　）

A．$\left[\frac{2}{a},1\right]$　　B．$\left[1,\frac{1}{a}\right]$

C．$\left(-\infty,\frac{2}{a}\right]\cup[1,+\infty)$　　D．$(-\infty,1]\cup\left[\frac{2}{a},+\infty\right)$

答案：A

【解析】

分析：

根据一元二次不等式的解法即可求解.

【详解】

解：原不等式可以转化为：$(x-1)(ax-2)\geqslant0$，

当$a<0$时，可知$(x-\frac{2}{a})(x-1)\leq0$，对应的方程的两根为1，$\frac{2}{a}$，

根据一元二次不等式的解集的特点，可知不等式的解集为：$[\frac{2}{a},1]$.

故选：A.

例 7．（2023·全国·高三专题练习）设$a<-1$，则关于x的不等式$a(x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right)<0$

的解集为（　　）

A．$\left\{x \mid x<a \text{ 或 } x>\frac{1}{a}\right\}$　　　　B．$\{x|x>a\}$

C．$\left\{x \middle| x\right\rangle a \text{ 或 } x<\left.\frac{1}{a}\right\}$　　　　D．$\left\{x \mid x<\frac{1}{a}\right\}$

答案：A

【解析】

分析：

当$a<-1$时，根据开口方向及根的大小关系确定不等式的解集.

【详解】

因为$a<-1$，所以$a(x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right)<0$等价于$(x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right)>0$，

又因为当$a<-1$时，$\frac{1}{a}>a$，所以不等式$(x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right)>0$的解集为：$\left\{x \mid x<a \text{ 或 } x>\frac{1}{a}\right\}$.

故选：A.

【点睛】

本题考查含参一元二次不等式的解法，较简单，解答时，注意根的大小关系比较.

例 8．（2023·全国·高三专题练习）已知定义在 **R** 上的函数$f(x)$满足$f(x-y)=f(x)-f(y)$，且当$x<0$时，$f(x)>0$，则关于x的不等式$f\left(mx^2\right)+f(2m)>f\left(m^2x\right)+f(2x)$（其中$0<m<\sqrt{2}$）的解集为（　　）

A．$\left\{x \middle| m<x<\frac{2}{m}\right\}$　　　　B．$\{x \mid x<m \text{ 或 } x>\frac{2}{m}\}$

C．$\left\{x \middle| \frac{2}{m}<x<m\right\}$　　　　D．$\{x \mid x>m \text{ 或 } x<\frac{2}{m}\}$

答案：A

【解析】

分析：

先判断函数$f(x)$单调递减，再利用已知条件和函数的单调性得$(mx-2)(x-m)<0$，解不等式即得解.

【详解】

任取$x_1<x_2$，由已知得$f\left(x_1-x_2\right)>0$，即$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)>0$，所以函数$f(x)$单调递减.

由$f\left(mx^2\right)+f(2m)>f\left(m^2x\right)+f(2x)$可得$f\left(mx^2\right)-f(2x)>f\left(m^2x\right)-f(2m)$，

即$f\left(mx^2-2x\right)>f\left(m^2x-2m\right)$，

所以 $mx^2-2x<m^2x-2m$，

即 $mx^2-\left(m^2+2\right)x+2m<0$，

即 $\left(mx-2\right)\left(x-m\right)<0$，

又因为 $0<m<\sqrt{2}$，

所以 $\dfrac{2}{m}>m$，

此时原不等式解集为 $\left\{x\middle|m<x<\dfrac{2}{m}\right\}$.

故选：A

【点睛】

方法点睛：解抽象函数不等式一般先要判断函数的单调性，再利用单调性化抽象函数不等式为具体的函数不等式解答.

例 9.（2023·全国·高三专题练习）在关于 x 的不等式 $x^2-(a+1)x+a<0$ 的解集中至多包含 2 个整数，则 a 的取值范围是

A．$(-3,5)$　　B．$(-2,4)$　　C．$[-3,5]$　　D．$[-2,4]$

答案：D

【解析】

【详解】

因为关于 x 的不等式 $x^2-(a+1)x+a<0$ 可化为 $(x-1)(x-a)<0$，

当 $a>1$ 时，不等式的解集为 $1<x<a$，

当 $a<1$ 时，不等式的解集为 $a<x<1$，

要使得解集中至多包含 2 个整数，则 $a\le 4$ 且 $a\ge -2$，

所以实数 a 的取值范围是 $a\in[-2,4]$，故选 D.

点睛：本题主要考查了不等式解集中整数解的存在性问题，其中解答中涉及到一元二次不等式的求解，元素与集合的关系等知识点的综合应用，试题比较基础，属于基础题，同时着重考查了分类讨论思想的应用，解答中正确求解不等式的解集是解答的关键.

例 10.（2023·浙江·高三专题练习）设 $a\in \mathrm{R}$，关于 x 的二次不等式 $ax^2-2x-2a>0$ 的解集为 A，集合 $B=\left\{x\middle|1<x<2\right\}$，满足 $A\cap B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

答案：$\left(-\infty,-2\right)\cup\left(2,+\infty\right)$

【解析】

分析：

由题意 $a\neq 0$，求出方程 $ax^2-2x-2a=0$ 的两根，讨论 a 的正负，确定二次不等式的解集 A 的形式，然后结合数轴列出不等式求解即可得答案.

【详解】

解：由题意 $a\neq 0$，令 $ax^2-2x-2a=0$，解得两根为 $x_1=\frac{1}{a}-\sqrt{2+\frac{1}{a^2}},x_2=\frac{1}{a}+\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}$，由此可知 $x_1<0,x_2>0$，

当 $a>0$ 时，解集 $A=\{x\mid x<x_1\}\cup\{x\mid x>x_2\}$，因为 $x_1<0,x_2>1$，所以 $A\cap B\neq\varnothing$ 的充要条件是 $x_2<2$，即 $\frac{1}{a}+\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}<2$，解得 $a>2$；

当 $a<0$ 时，解集 $A=\{x\mid x_1<x<x_2\}$，因为 $x_1<0,x_2<2$，所以 $A\cap B\neq\varnothing$ 的充要条件是 $x_2>1$，即 $\frac{1}{a}+\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}>1$，解得 $a<-2$；

综上，实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

例 11．（2023·全国·高三专题练习）已知关于 x 的不等式 $(kx-k^2-4)(x-4)>0$，其中 $k\in\mathrm{R}$.

(1)当 k 变化时，试求不等式的解集 A；

(2)对于不等式的解集 A，若满足 $A\cap\mathrm{Z}=B$(其中 Z 为整数集)．试探究集合 B 能否为有限集？若能，求出使得集合 B 中元素个数最少的 k 的所有取值，并用列举法表示集合 B；若不能，请说明理由．

答案：(1)答案见解析

(2)能；$k=-2$，$B=\{-3，-2，-1，0，1，2，3\}$

【解析】

分析：

（1）对 k 进行分类讨论，结合一元二次不等式的解法求得不等式的解集 A .

（2）结合（1）的结论进行分类讨论，结合基本不等式求得和正确答案.

(1)

当 $k=0$ 时，$A=\{x|x<4\}$；当 $k>0$ 且 $k\neq 2$ 时，$A=\{x|x<4$ 或 $x>\frac{4}{k}+k\}$；

当 $k=2$ 时，$A=\{x|x\neq 4\}$；当 $k<0$ 时，$A=\{x|k+\frac{4}{k}<x<4\}$.

(2)

由（1）知：当 $k\geq 0$ 时，集合 B 中的元素的个数有无限个；当 $k<0$ 时，集合 B 中的元素的个数有限，此时集合 B 为有限集.

因为 $k+\frac{4}{k}=-[(-k)+\frac{4}{(-k)}]\leq -4$，当且仅当 $k=-2$ 时取等号，

所以当 $k=-2$ 时，集合 B 中的元素个数最少，

此时 $A=\{x|-4<x<4\}$，故集合 $B=\{-3，-2，-1，0，1，2，3\}$.

例 12．（2023·全国·高三专题练习）已知关于 x 的不等式 $\frac{1}{2}x^2-mx-\ln x-m<0$ 的解集为 (a,b)，其中 $a>0$，若该不等式在 (a,b) 中有且只有一个整数解，求实数 m 的取值范围

答案：$(\frac{1}{4},\frac{2-\ln 2}{3}]$

【解析】

分析：

将不等式转化为 $m>\frac{x^2-2\ln x}{2(x+1)}$，构造函数 $f(x)=\frac{x^2-2\ln x}{2(x+1)}$，利用导数判断单调性，结合题意即可求解.

【详解】

关于 x 的不等式 $\frac{1}{2}x^2-mx-\ln x-m<0$ 化为：$m>\frac{x^2-2\ln x}{2(x+1)}$，

令 $f(x)=\frac{x^2-2\ln x}{2(x+1)}$，$x>0$，

则 $f'(x)=\frac{x^3+2x^2-2x-2+2x\ln x}{2x(x+1)^2}$.

令 $u(x)=x^3+2x^2-2x-2+2x\ln x$，$u'(x)=3x^2+4x+2\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

因此存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $u'(x_0)=3x_0^2+4x_0+2\ln x_0=0$，$2\ln x_0=-3x_0^2-4x_0$，

$u(x_0)=x_0^3+2x_0^2-2x_0-2+2x_0\ln x_0=x_0^3+2x_0^2-2x_0-2+x_0(-3x_0^2-4x_0)=-2x_0^3-2x_0^2-2x_0-2=-2(x_0+1)(x_0^2+1)<0$
，

u（1）$=-1<0$，u（2）$=10+4\ln 2>0$.

因此存在 $x_1\in(1,2)$，使得 $u(x_1)=0$，

因此函数 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 内单调递减，在 $(x_1,+\infty)$ 单调递增.

f（1）$=\frac{1}{4}$，f（2）$=\frac{2-\ln 2}{3}$.

Q 关于 x 的不等式 $\frac{1}{2}x^2-mx-\ln x-m<0$ 的解集为 (a,b)，其中 $a>0$，

该不等式在 (a,b) 中有且只有一个整数解，

$\therefore$ 实数 m 的取值范围是 $(\frac{1}{4},\frac{2-\ln 2}{3}]$.

【方法技巧与总结】

1．数形结合处理.

2．含参时注意分类讨论.

题型三：一元二次不等式与韦达定理及判别式

例 13．（2023·湖南岳阳·二模）已知关于 x 的不等式 $ax^2+2bx+4<0$ 的解集为 $\left(m,\frac{4}{m}\right)$，其中

$m<0$，则 $\dfrac{b}{4a}+\dfrac{4}{b}$ 的最小值为（　　）

A．-2　　　　B．1　　　　C．2　　　　D．8

答案：C

【解析】

分析：

由一元二次不等式的解与方程根的关系求出系数 $a=1$，确定 $b\geq 2$，然后结合基本不等式得最小值．

【详解】

$ax^2+2bx+4<0$ 的解集为 $\left(m,\dfrac{4}{m}\right)$，则 $ax^2+2bx+4=0$ 的两根为 m，$\dfrac{4}{m}$，

$\therefore m\cdot\dfrac{4}{m}=\dfrac{4}{a}$，$\therefore a=1$，$m+\dfrac{4}{m}=-2b$，则 $2b=-m+\dfrac{4}{-m}\geq 4$，即 $b\geq 2$，

$\dfrac{b}{4a}+\dfrac{4}{b}=\dfrac{b}{4}+\dfrac{4}{b}\geq 2$，当且仅当 $b=4$ 时取"="，

故选：C.

例 14．（2023·江苏南京·模拟预测）已知关于 x 的不等式 $x^2-4ax+3a^2<0(a<0)$ 的解集为 $(x_1,\ x_2)$，则 $x_1+x_2+\dfrac{a}{x_1x_2}$ 的最大值是（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　　　B．$-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　　　C．$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$　　　　D．$-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

答案：D

【解析】

分析：

一元二次不等式解集转化为一元二次方程的解，根据韦达定理求出 $x_1+x_2=4a$，$x_1x_2=3a^2$，再用基本不等式求出最值

【详解】

$x^2-4ax+3a^2<0(a<0)$ 的解集为 $(x_1,\ x_2)$，则 x_1，x_2 是方程 $x^2-4ax+3a^2=0$ 的两个根，故

$x_1+x_2=4a$，$x_1x_2=3a^2$，故 $x_1+x_2+\dfrac{a}{x_1x_2}=4a+\dfrac{1}{3a}$

因为 $a<0$，所以有基本不等式得：$4a+\dfrac{1}{3a}=-\left[-4a+\left(-\dfrac{1}{3a}\right)\right]\leq -2\sqrt{-4a\cdot\left(-\dfrac{1}{3a}\right)}=-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，当且仅当 $-4a=-\dfrac{1}{3a}$ 即 $a=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 时，等号成立，所以 $x_1+x_2+\dfrac{a}{x_1x_2}$ 的最大值为 $-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

故选：D

（多选题）**例 15**．（2023·全国·高三专题练习）已知关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为

$(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$，则（　　）

A．$a>0$

B．不等式$bx+c>0$的解集是$\{x\,|\,x<-6\}$

C．$a+b+c>0$

D．不等式$cx^2-bx+a<0$的解集为$(-\infty,-\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$

答案：ABD

【解析】

分析：

根据不等式$ax^2+bx+c>0$的解集判断出$a>0$，结合根与系数关系、一元二次不等式的解法判断BCD选项的正确性.

【详解】

关于x的不等式$ax^2+bx+c>0$的解集为$\left(-\infty,-2\right)\cup\left(3,+\infty\right)$,$\therefore a>0$,A选项正确；

且-2和3是关于x的方程$ax^2+bx+c=0$的两根，由韦达定理得$\begin{cases}-2+3=-\dfrac{b}{a}\\ -2\times3=\dfrac{c}{a}\end{cases}$，

则$b=-a,c=-6a$，则$a+b+c=-6a<0$，C选项错误；

不等式$bx+c>0$即为$-ax-6a>0$，解得$x<-6$,B选项正确；

不等式$cx^2-bx+a<0$即为$-6ax^2+ax+a<0$，即$6x^2-x-1>0$，解得$x<-\frac{1}{3}$或$x>\frac{1}{2}$,D选项正确.

故选：ABD.

例16．（2023·全国·高三专题练习）若不等式$ax^2+5x+1\le0$的解集为$\left\{x\middle|-\frac{1}{2}\le x\le-\frac{1}{3}\right\}$，则不等式$\dfrac{3x-a}{x-3}<0$的解集为___________.

答案：$\left\{x|2<x<3\right\}$

【解析】

分析：

由不等式$ax^2+5x+1\le0$的解集为$\left\{x\middle|-\frac{1}{2}\le x\le-\frac{1}{3}\right\}$可得参数$a$的值,则不等式$\dfrac{3x-a}{x-3}<0$也具体化了，按分式不等式解之即可.

【详解】