

宁夏海原县第一中学 2023-2024 学年高三最后一模数学试题

考生须知：

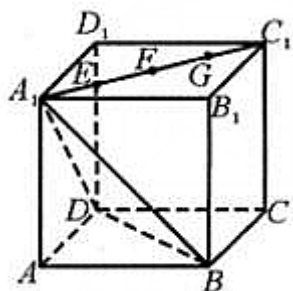
1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点 $(5, t)$ 到焦点的距离为 6， P 、 Q 分别为抛物线与圆 $(x-6)^2 + y^2 = 1$ 上的动点，则 $|PQ|$ 的最小值为 ()

- A. $\sqrt{21} - 1$ B. $2 - \frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $2\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{5} - 1$

2. 如图，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 E 、 F 、 G 分别是线段 A_1C_1 上的点，且 $A_1E = EF = FG = GC_1$. 则下列直线与平面 A_1BD 平行的是 ()



- A. CE B. CF C. CG D. CC_1

3. 设 i 是虚数单位，复数 $\frac{1+i}{i} =$ ()

- A. $-1+i$ B. $-1-i$ C. $1+i$ D. $1-i$

4. 抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的准线与双曲线 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的两条渐近线所围成的三角形面积为 $2\sqrt{2}$ ，则 p 的值为 ()

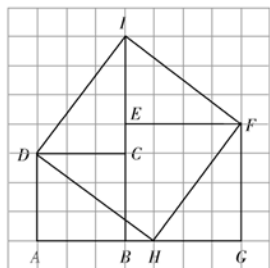
- A. 8 B. 6 C. 4 D. 2

5. 已知变量 x ， y 满足不等式组 $\begin{cases} x+y \leq 2 \\ x-y \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$ ，则 $2x-y$ 的最小值为 ()

- A. -4 B. -2 C. 0 D. 4

6.

刘徽是我国魏晋时期伟大的数学家，他在《九章算术》中对勾股定理的证明如图所示.“勾自乘为朱方，股自乘为青方，令出入相补，各从其类，因就其余不移动也.合成弦方之幂，开方除之，即弦也”.已知图中网格纸上小正方形的边长为1，其中“正方形 $ABCD$ 为朱方，正方形 $BEFG$ 为青方”，则在五边形 $AGFID$ 内随机取一个点，此点取自朱方的概率为（ ）

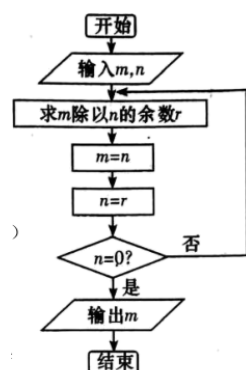


- A. $\frac{16}{37}$ B. $\frac{9}{49}$ C. $\frac{9}{37}$ D. $\frac{3}{11}$

7. 关于函数 $f(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 的单调性，下列叙述正确的是（ ）

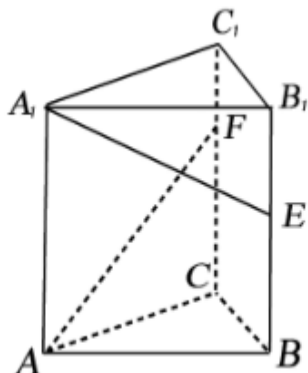
- A. 单调递增 B. 单调递减 C. 先递减后递增 D. 先递增后递减

8. 执行下面的程序框图，如果输入 $m = 1995$ ， $n = 228$ ，则计算机输出的数是（ ）



- A. 58 B. 57 C. 56 D. 55

9. 如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，底面为正三角形，侧棱垂直底面， $AB = 4$ ， $AA_1 = 8$.若 E ， F 分别是棱 BB_1 ， CC_1 上的点，且 $BE = B_1E$ ， $C_1F = \frac{1}{4}CC_1$ ，则异面直线 A_1E 与 AF 所成角的余弦值为（ ）



A. $\frac{\sqrt{2}}{10}$

B. $\frac{\sqrt{26}}{13}$

C. $\frac{\sqrt{13}}{13}$

D. $\frac{\sqrt{13}}{10}$

10. 在声学中, 声强级 L (单位: dB) 由公式 $L = 10 \lg \left(\frac{I}{10^{-12}} \right)$ 给出, 其中 I 为声强 (单位: W/m^2). $L_1 = 60\text{dB}$,

$L_2 = 75\text{dB}$, 那么 $\frac{I_1}{I_2} = (\quad)$

- A. $10^{\frac{4}{5}}$ B. $10^{-\frac{4}{5}}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $10^{-\frac{3}{2}}$

11. 将函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到 $g(x)$ 的图象, 则 $g(x)$ 满足 ()

A. 图象关于点 $\left(\frac{\pi}{12}, 0 \right)$ 对称, 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{4} \right)$ 上为增函数

B. 函数最大值为 2, 图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0 \right)$ 对称

C. 图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称, 在 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3} \right]$ 上的最小值为 1

D. 最小正周期为 π , $g(x) = 1$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4} \right]$ 有两个根

12. 设 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 下列命题中正确的是 ()

A. 若 $\alpha \perp \beta$, $m \subset \alpha$, $n \subset \beta$, 则 $m \perp n$

B. 若 $\alpha // \beta$, $m \subset \alpha$, $n \subset \beta$, 则 $m // n$

C. 若 $m \perp n$, $m \subset \alpha$, $n \subset \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$

D. 若 $m \perp \alpha$, $m // n$, $n // \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 $\triangle ABC$ 得三边长成公比为 $\sqrt{2}$ 的等比数列, 则其最大角的余弦值为_____.

14. 从 2、3、5、7、11、13 这六个质数中任取两个数, 这两个数的和仍是质数的概率是_____ (结果用最简分数表示)

15. 已知正实数 x, y 满足 $xy = 1$, 则 $\left(\frac{x}{y} + y \right) \left(\frac{y}{x} + x \right)$ 的最小值为_____.

16. 已知 $f(x) = x|x|$, 则满足 $f(2x-1) + f(x) \geq 0$ 的 x 的取值范围为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边, 若 $\triangle ABC$ 同时满足下列四个条件中的三个: ①

$$\frac{b-a}{c} = \frac{2\sqrt{6}a+3c}{3(a+b)}; \textcircled{2} \cos 2A + 2\cos^2 \frac{A}{2} = 1; \textcircled{3} a = \sqrt{6}; \textcircled{4} b = 2\sqrt{2}.$$

(1) 满足有解三角形的序号组合有哪些?

(2) 在(1)所有组合中任选一组, 并求对应 $\triangle ABC$ 的面积.

(若所选条件出现多种可能, 则按计算的第一种可能计分)

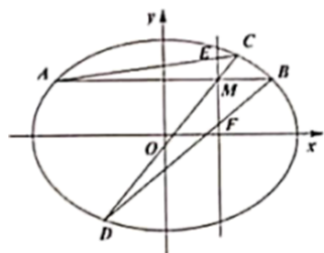
18. (12分) 已知直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}),$$
 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,

曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\cos\theta$.

(1) 求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 设点 $P(\frac{1}{2}, 0)$, 直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 求 $|PA| + |PB|$ 的值.

19. (12分) 如图, 过点 $M(2, 2)$ 且平行与 x 轴的直线交椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = m (m > 0)$ 于 A, B 两点, 且 $\vec{AM} = 3\vec{MB}$.



(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 过点 M 且斜率为正的直线交椭圆于段 C, D , 直线 AC, BD 分别交直线 $x = 2$ 于点 E, F , 求证: $\frac{1}{|ME|} - \frac{1}{|MF|}$

是定值.

20. (12分) 已知函数 $f(x) = \ln x - ax + a$, 其中 $a > 0$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的零点个数;

(2) 求证: $e^x + \sin x > x \ln x + 1$.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + mx + \ln x$.

(1) 若函数 $f(x)$ 不存在单调递减区间, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若函数 $y = f(x)$ 的两个极值点为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, $m \leq -\frac{3\sqrt{2}}{2}$, 求 $f(x_1) - f(x_2)$ 的最小值.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = (x+1)(e^x - 1)$.

(I) 求 $f(x)$ 在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程;

(II) 已知 $f(x) \geq ax$ 在 R 上恒成立, 求 a 的值.

(III) 若方程 $f(x) = b$ 有两个实数根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 证明: $x_2 - x_1 \leq b + 1 + \frac{eb}{e-1}$.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

利用抛物线的定义, 求得 p 的值, 由利用两点间距离公式求得 $|PM|$, 根据二次函数的性质, 求得 $|PM|_{\min}$, 由 $|PQ|$ 取得最小值为 $|PM|_{\min} - 1$, 求得结果.

【详解】

由抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 焦点在 x 轴上, 准线方程 $x = -\frac{p}{2}$,

则点 $(5, t)$ 到焦点的距离为 $d = 5 + \frac{p}{2} = 6$, 则 $p = 2$,

所以抛物线方程: $y^2 = 4x$,

设 $P(x, y)$, 圆 $M: (x-6)^2 + y^2 = 1$, 圆心为 $(6, 1)$, 半径为 1,

则 $|PM| = \sqrt{(x-6)^2 + y^2} = \sqrt{(x-6)^2 + 4x} = \sqrt{(x-4)^2 + 20}$,

当 $x = 4$ 时, $|PQ|$ 取得最小值, 最小值为 $\sqrt{20} - 1 = 2\sqrt{5} - 1$,

故选 D.

【点睛】

该题考查的是有关距离的最小值问题, 涉及到的知识点有抛物线的定义, 点到圆上的点的距离的最小值为其到圆心的距离减半径, 二次函数的最小值, 属于中档题目.

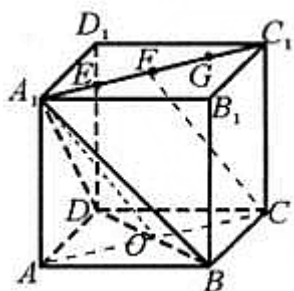
2、B

【解析】

连接 AC ，使 AC 交 BD 于点 O ，连接 A_1O 、 CF ，可证四边形 A_1OCF 为平行四边形，可得 $A_1O \parallel CF$ ，利用线面平行的判定定理即可得解。

【详解】

如图，连接 AC ，使 AC 交 BD 于点 O ，连接 A_1O 、 CF ，则 O 为 AC 的中点，



在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AA_1 \parallel CC_1$ 且 $AA_1 = CC_1$ ，则四边形 AA_1C_1C 为平行四边形，

$\therefore A_1C_1 \parallel AC$ 且 $A_1C_1 = AC$ ，

$Q O$ 、 F 分别为 AC 、 A_1C_1 的中点， $\therefore A_1F \parallel OC$ 且 $A_1F = OC$ ，

所以，四边形 A_1OCF 为平行四边形，则 $CF \parallel A_1O$ ，

$Q CF \not\subset$ 平面 A_1BD ， $A_1O \subset$ 平面 A_1BD ，因此， $CF \parallel$ 平面 A_1BD 。

故选：B.

【点睛】

本题主要考查了线面平行的判定，考查了推理论证能力和空间想象能力，属于中档题。

3、D

【解析】

利用复数的除法运算，化简复数 $\frac{1+i}{i} = 1-i$ ，即可求解，得到答案。

【详解】

由题意，复数 $\frac{1+i}{i} = \frac{(1+i) \cdot (-i)}{i \times (-i)} = 1-i$ ，故选 D.

【点睛】

本题主要考查了复数的除法运算，其中解答中熟记复数的除法运算法则是解答的关键，着重考查了运算与求解能力，属于基础题。

4、A

【解析】

求得抛物线的准线方程和双曲线的渐近线方程，解得两交点，由三角形的面积公式，计算即可得到所求值．

【详解】

抛物线 $x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的准线为 $y = -\frac{p}{2}$ ，双曲线 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的两条渐近线为 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$ ，可得两交点为

$(-\frac{p}{4}, -\frac{\sqrt{2}p}{8}), (-\frac{p}{4}, \frac{\sqrt{2}p}{8})$ ，即有三角形的面积为 $\frac{1}{2} \times \frac{p}{4} \times \frac{\sqrt{2}p}{4} = 2\sqrt{2}$ ，解得 $p = 8$ ，故选 A．

【点睛】

本题考查三角形的面积的求法，注意运用抛物线的准线方程和双曲线的渐近线方程，考查运算能力，属于基础题．

5、B

【解析】

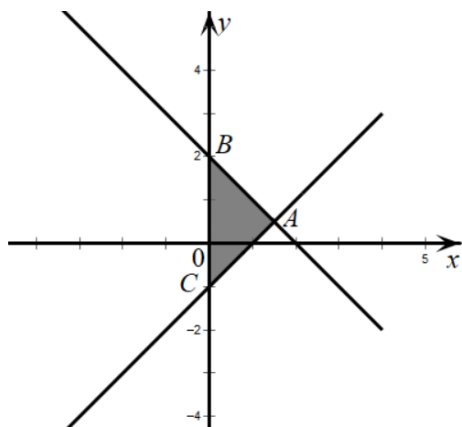
先根据约束条件画出可行域，再利用几何意义求最值．

【详解】

解：由变量 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} x+y \leq 2 \\ x-y \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$ ，画出相应图形如下：

可知点 $A(1,1), B(0,2)$ ，

$2x - y$ 在 B 处有最小值，最小值为 -2 ．



故选：B．

【点睛】

本题主要考查简单的线性规划，运用了数形结合的方法，属于基础题．

6、C

【解析】

首先明确这是一个几何概型面积类型，然后求得总事件的面积和所研究事件的面积，代入概率公式求解．

【详解】

因为正方形 $ABCD$ 为朱方，其面积为 9，

五边形 $AGFID$ 的面积为 $S_{ABCD} + S_{BGFE} + S_{\triangle DCI} + S_{\triangle DEF} = 37$ ，

所以此点取自朱方的概率为 $\frac{9}{37}$ 。

故选：C

【点睛】

本题主要考查了几何概型的概率求法，还考查了数形结合思想和运算求解的能力，属于基础题。

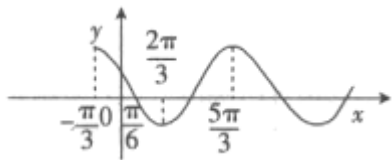
7、C

【解析】

先用诱导公式得 $f(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，再根据函数图像平移的方法求解即可。

【详解】

函数 $f(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象可由 $y = \cos x$ 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到，如图所示， $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上先递减后递增。



故选：C

【点睛】

本题考查三角函数的平移与单调性的求解，属于基础题。

8、B

【解析】

先明确该程序框图的功能是计算两个数的最大公约数，再利用辗转相除法计算即可。

【详解】

本程序框图的功能是计算 m ， n 中的最大公约数，所以 $1995 = 228 \times 8 + 171$ ，

$228 = 171 \times 1 + 57$ ， $171 = 3 \times 57 + 0$ ，故当输入 $m = 1995$ ， $n = 228$ ，则计算机输出的数是 57。

故选：B.

【点睛】

本题考查程序框图的功能，做此类题一定要注意明确程序框图的功能是什么，本题是一道基础题。

9、B

【解析】

建立空间直角坐标系，利用向量法计算出异面直线 A_1E 与 AF 所成角的余弦值.

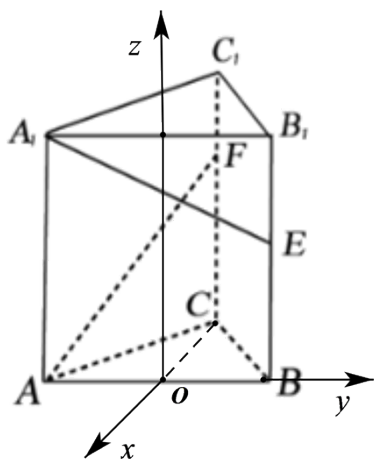
【详解】

依题意三棱柱底面是正三角形且侧棱垂直于底面.设 AB 的中点为 O ，建立空间直角坐标系如下图所示.所以

$A_1(0, -2, 8), E(0, 2, 4), A(0, -2, 0), F(-2\sqrt{3}, 0, 6)$ ，所以 $\vec{A_1E} = (0, 4, -4), \vec{AF} = (-2\sqrt{3}, 2, 6)$.所以异面直线 A_1E 与

AF 所成角的余弦值为 $\left| \frac{\vec{A_1E} \cdot \vec{AF}}{|\vec{A_1E}| \cdot |\vec{AF}|} \right| = \left| \frac{8 - 24}{4\sqrt{2} \times 2\sqrt{13}} \right| = \frac{\sqrt{26}}{13}$.

故选：B



【点睛】

本小题主要考查异面直线所成的角的求法，属于中档题.

10、D

【解析】

由 $L = 101g\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$ 得 $\lg I = \frac{L}{10} - 12$ ，分别算出 I_1 和 I_2 的值，从而得到 $\frac{I_1}{I_2}$ 的值.

【详解】

$$\because L = 101g\left(\frac{I}{10^{-12}}\right),$$

$$\therefore L = 10(\lg I - \lg 10^{-12}) = 10(\lg I + 12),$$

$$\therefore \lg I = \frac{L}{10} - 12,$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/488033075045006076>