专题 1.3　乘法公式【九大题型】

【北师大版】

题型先知

举一反三

【知识点 1 乘法公式】

平方差公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$。两个数的和与这两个数的差的积，等于这两个数的平方差。这个公式叫做平方差公式。

完全平方公式：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$。两个数的和(或差)的平方，等于它们的平方和，加上(或减去)它们积的 2 倍。这两个公式叫做完全平方公式。

【题型 1　乘法公式的基本运算】

【例 1】（2022 春•青川县期末）下列各式中计算正确的是（　　）

A．$(a+2b)(a-2b)=a^2-2b^2$

B．$(-a+2b)(a-2b)=a^2-4b^2$

C．$(-a-2b)(a-2b)=-a^2+4b^2$

D．$(-a-2b)(a+2b)=a^2-4b^2$

【分析】根据平方差公式对各选项分析判断后利用排除法求解．

【解答】解：A、应为 $(a+2b)(a-2b)=a^2-(2b)^2$，故本选项错误；

B、应为 $(-a+2b)(a-2b)=-a^2+4ab-4b^2$，故本选项错误；

C、$(-a-2b)(a-2b)=-a^2+4b^2$，正确；

D、应为 $(-a-2b)(a+2b)=-a^2-4ab-4b^2$，故本选项错误．

故选：C.

【变式1-1】（2022春•六盘水期中）下列各式中能用平方差公式计算的是（　　）

A．$(-x+2y)(x-2y)$　　B．$(3x-5y)(-3x-5y)$

C．$(1-5m)(5m-1)$　　D．$(a+b)(b+a)$

【分析】根据平方差公式的特征：（1）两个两项式相乘，（2）有一项相同，另一项互为相反数，对各选项分析判断后利用排除法求解．

【解答】解：A、不存在相同的项，不能运用平方差公式进行计算；

B、$-5y$是相同的项，互为相反项是$3x$与$-3x$，符合平方差公式的要求；

C、不存在相同的项，不能运用平方差公式进行计算；

D、不存在互为相反数的项，不能运用平方差公式进行计算；

故选：B.

【变式1-2】（2022春•巴中期末）下列运算正确的是（　　）

A．$(x+y)(y-x)=x^2-y^2$　　B．$(-x+y)^2=-x^2+2xy+y^2$

C．$(-x-y)^2=-x^2-2xy-y^2$　　D．$(x+y)(-y+x)=x^2-y^2$

【分析】根据完全平方公式和平方差公式逐个判断即可．

【解答】解：A、结果是y^2-x^2，故本选项不符合题意；

B、结果是$x^2-2xy+y^2$，故本选项不符合题意；

C、结果是$x^2+2xy+y^2$，故本选项不符合题意；

D、结果是x^2-y^2，故本选项符合题意．

【变式1-3】（2022秋•天心区校级期中）下列各式中，能用完全平方公式计算的是（　　）

A．$(a-b)(-b-a)$　　B．$(-n^2-m^2)(m^2+n^2)$

C．$(-\frac{1}{2}p+q)(q+\frac{1}{2}p)$　　D．$(2x-3y)(2x+3y)$

【分析】A、原式利用平方差公式化简得到结果，不合题意；

B、原式第一个因式提取-1变形后利用完全平方公式计算得到结果，符合题意；

C、原式利用平方差公式化简得到结果，不合题意；

D、原式利用平方差公式化简得到结果，不合题意．

【解答】解：A、原式$=b^2-a^2$，本选项不合题意；

B、原式$=-(m^2+n^2)^2$，本选项符合题意；

C、原式$=q^2-\frac{1}{4}p^2$，本选项不合题意；

D、原式$=4x^2-9y^2$，本选项不合题意，

故选：B．

【题型 2　利用完全平方式确定系数】

【例 2】（2022 秋•望城区期末）若二项式 x^2+4 加上一个单项式后成为一个完全平方式，则这样的单项式共有（　　）

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．5 个

【分析】本题考查运用完全平方式进行因式分解的能力，式子 x^2 和 4 分别是 x 和 2 的平方，可当作首尾两项，根据完全平方公式可得中间一项为加上或减去 x 和 2 的乘积的 2 倍，即$\pm4x$，同时还应看到 x^2+4 加上-4 或$-x^2$ 或$\frac{x^4}{16}$后也可分别构成完全平方式，所以可加的单项式共有 5 个．

【解答】解：可添加$\pm4x$，-4，$-x^2$ 或$\frac{x^4}{16}$等 5 个．

故选：D．

【变式 2-1】（2022•南通模拟）如果多项式 x^2+2x+k 是完全平方式，则常数 k 的值为（　　）

A．1　　B．-1　　C．4　　D．-4

【分析】根据完全平方公式的乘积二倍项和已知平方项先确定出另一个数是 1，平方即可．

【解答】解：$\because 2x=2\times1\cdot x$，

$\therefore k=1^2=1$，

故选 A．

【变式 2-2】（2022 秋•青县期末）若 $9x^2-(K-1)x+1$ 是关于 x 的完全平方式，则常数 K 的值为（　　）

A．0　　B．-5 或 7　　C．7　　D．9

【分析】根据完全平方式的定义解决此题．

【解答】解：$9x^2-(K-1)x+1=(3x)^2-(K-1)x+1^2$．

$\because 9x^2-(K-1)x+1$ 是关于 x 的完全平方式，

$\therefore 9x^2-(K-1)x+1=(3x)^2\pm2\cdot3x\cdot1+1^2=(3x)^2\pm6x+1^2$．

$\therefore -(K-1)=\pm6$．

当$-(K-1)=6$ 时，$K=-5$．

当$-(K-1)=-6$ 时，$K=7$．

综上：$K=-5$ 或 7．

故选：B．

【变式2-3】（2022秋•崇川区校级月考）$(x+a)(x+b)+(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)$是完全平方式，则$a$，$b$，$c$的关系可以写成（　　）

A．$a<b<c$　　B．$(a-b)^2+(b-c)^2=0$

C．$c<a<b$　　D．$a=b\neq c$

【分析】先把原式展开，合并，由于它是完全平方式，故有$3x^2+2(a+b+c)x+(ab+bc+ac)=[\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}(a+b+c)]^2$，化简有$ab+bc+ac=a^2+b^2+c^2$，那么就有$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$，三个非负数的和等于0，则每一个非负数等于0，故可求$a=b=c$．故选答案B．

【解答】解：原式$=3x^2+2(a+b+c)x+(ab+bc+ac)$，

∵$(x+a)(x+b)+(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)$是完全平方式，

∴$3x^2+2(a+b+c)x+(ab+bc+ac)=[\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}(a+b+c)]^2$，

∴$ab+bc+ac=\frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)$，

∴$ab+bc+ac=a^2+b^2+c^2$，

∴$2(ab+bc+ac)=2(a^2+b^2+c^2)$，

即$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$，

∴$a-b=0$，$b-c=0$，$c-a=0$，

∴$a=b=c$．

故选：B．

【题型3　乘法公式的运算】

【例3】（2022春•龙胜县期中）计算：$(1-\frac{1}{5^2})\times(1-\frac{1}{6^2})\times(1-\frac{1}{7^2})\times\cdots\times(1-\frac{1}{99^2})\times(1-\frac{1}{100^2})$的结果是（　　）

A．$\frac{101}{200}$　　B．$\frac{101}{125}$　　C．$\frac{101}{100}$　　D．$\frac{1}{100}$

【分析】根据$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$展开，中间的数全部约分，只剩下第一个数和最后一个数相乘，从而得出答案．

【解答】解：原式$=(1-\frac{1}{5})\times(1+\frac{1}{5})\times(1-\frac{1}{6})\times(1+\frac{1}{6})\times(1-\frac{1}{7})\times(1+\frac{1}{7})\times\cdots\times(1-\frac{1}{99})\times(1+\frac{1}{99})\times(1-\frac{1}{100})\times(1+\frac{1}{100})$

$=\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{6}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{7}\times\cdots\times\frac{98}{99}\times\frac{100}{99}\times\frac{99}{100}\times\frac{101}{100}$

$=\frac{4}{5}\times\frac{101}{100}$

$=\frac{101}{125}$.

故选：B.

【变式 3-1】（2022 秋•碾子山区期末）先化简，再求值：$(2x-y)(y+2x)-(2y+x)(2y-x)$，其中 $x=1$，$y=2$.

【分析】利用平方差公式展开并合并同类项，然后把 x、y 的值代入进行计算即可得解.

【解答】解：$(2x-y)(y+2x)-(2y+x)(2y-x)$，

$=4x^2-y^2-(4y^2-x^2)$，

$=4x^2-y^2-4y^2+x^2$，

$=5x^2-5y^2$，

当 $x=1$，$y=2$ 时，原式$=5\times1^2-5\times2^2=5-20=-15$.

【变式 3-2】（2022 春•乳山市期末）用乘法公式进行计算：

（1）$2019^2-2018\times2020$；

（2）$11^2+13\times66+39^2$.

【分析】平方差公式：两个数的和与这两个数的差相乘，等于这两个数的平方差；完全平方公式：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

【解答】解：（1）$2019^2-2018\times2020$

$=2019^2-(2022-1)\times(2022+1)$

$=2019^2-(2022^2-1)$

$=1$；

（2）$11^2+13\times66+39^2$

$=11^2+13\times2\times3\times11+39^2$

$=11^2+2\times11\times39+39^2$

$=(11+39)^2$

$=50^2$

$=2500$.

【变式 3-3】（2022 春•顺德区校级月考）计算：$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{64}+1)$

【分析】原式变形后，利用平方差公式计算即可得到结果．

【解答】解：原式＝（2﹣1）（2+1）（2^2+1）（2^4+1）…（2^{64}+1）

＝（2^2﹣1）（2^2+1）（2^4+1）…（2^{64}+1）

＝（2^4﹣1）（2^4+1）…（2^{64}+1）

＝…

＝（2^{64}﹣1）（2^{64}+1）

＝2^{128}﹣1．

【题型4　利用乘法公式求值】

【例4】（2022秋•九龙坡区校级期中）若a^2-b^2＝16，（$a+b$）^{2}＝8，则ab的值为（　　）

A．$-\frac{3}{2}$　　B．$\frac{3}{2}$　　C．﹣6　　D．6

【分析】根据a^2-b^2＝16得到（$a+b$）^{2}（$a-b$）^{2}＝256，再由（$a+b$）^{2}＝8，求出（$a-b$）^{2}＝32，

最后根据$ab=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}$求出答案．

【解答】解：∵a^2-b^2＝16，

∴（$a+b$）（$a-b$）＝16，

∴（$a+b$）^{2}（$a-b$）^{2}＝256，

∵（$a+b$）^{2}＝8，

∴（$a-b$）^{2}＝32，

∴$ab=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}=\frac{8-32}{4}=-6$，

故选：C．

【变式4-1】（2022春•姜堰区校级月考）已知$4m+n$＝90，$2m-3n$＝10，求（$m+2n$）^{2}﹣（$3m-n$）^{2}的值．

【分析】原式利用平方差公式分解，变形后将已知等式代入计算即可求出值．

【解答】解：∵$4m+n$＝90，$2m-3n$＝10，

∴（$m+2n$）^{2}﹣（$3m-n$）^{2}

＝[（$m+2n$）+（$3m-n$）][（$m+2n$）﹣（$3m-n$）]

＝（$4m+n$）（$3n-2m$）

＝﹣900．

【变式4-2】（2022春•双峰县期中）若x、y满足$x^2+y^2=\frac{5}{4}$，$xy=-\frac{1}{2}$，求下列各式的值．

（1）$(x+y)^2$

（2）x^4+y^4．

【分析】（1）原式利用完全平方公式化简，将各自的值代入计算即可求出值；

（2）原式利用完全平方公式变形，将各自的值代入计算即可求出值．

【解答】解：（1）$\because x^2+y^2=\frac{5}{4}$，$xy=-\frac{1}{2}$，

$\therefore$原式$=x^2+y^2+2xy=\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}$；

（2）$\because x^2+y^2=\frac{5}{4}$，$xy=-\frac{1}{2}$，

$\therefore$原式$=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=\frac{25}{16}-\frac{1}{2}=\frac{17}{16}$．

【变式 4-3】（2022 春•包河区期中）已知$(2022-m)(2022-m)=2021$，那么$(2022-m)^2+(2022-m)^2$的值为（　　）

A．4046　　B．2023　　C．4042　　D．4043

【分析】利用完全平方公式变形即可．

【解答】解：$\because (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$，

$\therefore a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$．

$\therefore (2022-m)^2+(2022-m)^2$

$=[(2022-m)-(2022-m)]^2+2\times(2022-m)(2022-m)$

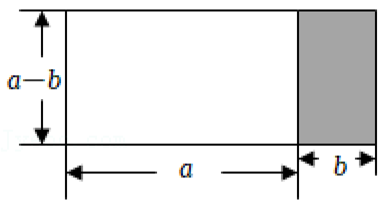
$=4+2\times2021$

$=4046$．

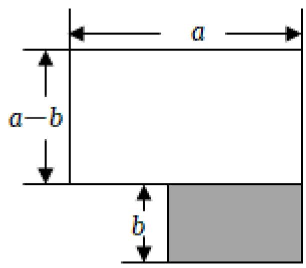
故选：A．

【题型 5　利用面积法验证乘法公式】

【例 5】（2022 春•新泰市期末）将图甲中阴影部分的小长方形变换到图乙位置，你能根据两个图形的面积关系得到的数学公式是（　　）



甲



乙

A．（$a-b$）（$a+b$）$=a^2-b^2$　　　　B．（$a+b$）$^2=a^2+2ab+b^2$

C．（$a-b$）$^2=a^2-2ab+b^2$　　　　D．（$2a-b$）$^2=4a^2-4ab+b^2$

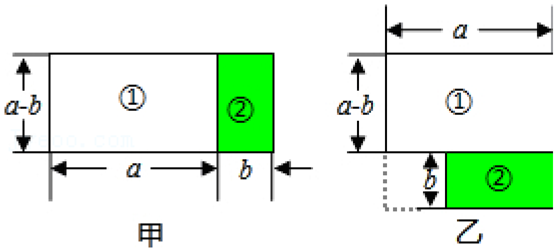
【分析】利用两个图形面积之间的关系进行解答即可．

【解答】解：如图，图甲中①、②的总面积为（$a+b$）（$a-b$），

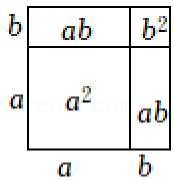
图乙中①、②的总面积可以看作两个正方形的面积差，即 a^2-b^2，

因此有（$a+b$）（$a-b$）$=a^2-b^2$，

故选：A．



【变式 5-1】（2022 春•乐平市期末）如图所示，两次用不同的方法计算这个图的面积，可验证整式乘法公式是（　　）



A．（$a+b$）（$a-b$）$=a^2-b^2$

B．（$a+b$）（$a+2b$）$=a^2+3ab+2b^2$

C．（$a+b$）$^2=a^2+2ab+b^2$

D．（$a-b$）$^2=a^2-2ab+b^2$

【分析】用代数式表示各个部分以及总面积即可得出答案．

【解答】解：大正方形的边长为 $a+b$，因此面积为（$a+b$）^{2}，四个部分的面积分别为 a^2、ab、ab、b^2，

由面积之间的关系得，（$a+b$）$^2=a^2+2ab+b^2$，

故选：C．

【变式 5-2】（2022 春•锦州期末）如图 1，在边长为 a 的大正方形中，剪去一个边长为 3 的小正方形，将余下的部分按图中的虚线剪开后，拼成如图 2 所示的长方形，根据两个图形阴影部分面积相等的关系，可验证的等式为（　　）

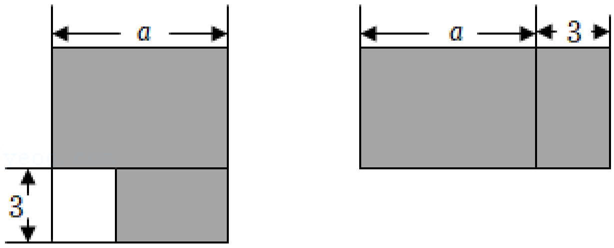


图 1　　　　　图 2

A．（$a-3$）^{2}＝a^2-6a+9　　　　B．（$a+3$）^{2}＝a^2+6a+9

C．a（$a+3$）＝a^2+3a　　　　D．（$a+3$）（$a-3$）＝a^2-9

【分析】用代数式分别表示图 1、图 2 中阴影部分的面积即可．

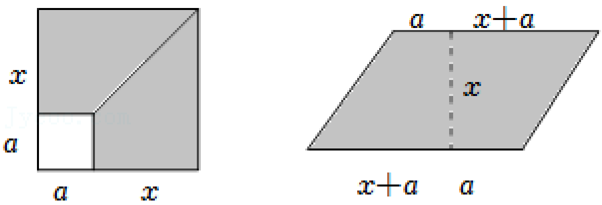
【解答】解：图 1 中，阴影部分的面积可以看作是两个正方形的面积差，即 a^2-3^2＝a^2-9，

图 2 是长为 $a+3$，宽为 $a-3$ 的长方形，因此面积为（$a+3$）（$a-3$），

所以有（$a+3$）（$a-3$）＝a^2-9，

故选：D．

【变式 5-3】（2022•郫都区模拟）如图，在边长为（$x+a$）的正方形中，剪去一个边长为 a 的小正方形，将余下部分对称剪开，拼成一个平行四边形，由左右两个阴影部分面积，可以得到一个恒等式是（　　）



A．（$x+a$）$^2-a^2$＝x（$x+2a$）　　　　B．x^2+2ax＝x（$x+2a$）

C．（$x+a$）$^2-x^2$＝a（$a+2x$）　　　　D．x^2-a^2＝（$x+a$）（$x-a$）

【分析】根据阴影部分面积相等得到恒等式即可．

【解答】解：第一幅图阴影部分面积＝（$x+a$）$^2-a^2$，

第二幅图阴影部分面积＝（$x+a+a$）x＝x（$x+2a$），

∴（$x+a$）$^2-a^2$＝x（$x+2a$），

故选：A．

【题型 6　乘法公式的应用】

【例 6】（2022 春•榆次区期中）如图 1，从边长为（$a+5$）cm 的大正方形纸片中剪去一个边长为（$a+2$）cm 的小正方形，剩余部分（如图 2）沿虚线剪开，按图 3 方式拼接成一个长方形（无缝隙不重合）则该长方形的面积为（　　）

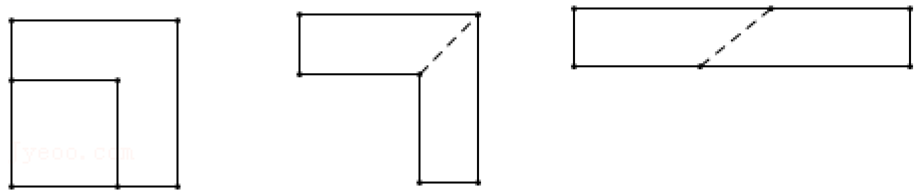


图1　　　　图2　　　　图3

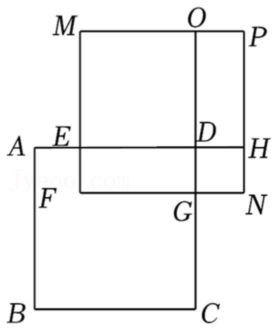
A．$9cm^2$　　B．（$6a-9$）cm^2　　C．（$6a+9$）cm^2　　D．（$6a+21$）cm^2

【分析】由图形可知长方形的长为两正方形的和，宽为两长方形的差，据此可得答案．

【解答】解：根据题意，长方形的面积为[（$a+5$）+（$a+2$）][（$a+5$）－（$a+2$）]＝3（$2a+7$）＝（$6a+21$）cm，

故选：D．

【变式6-1】（2022秋•西峰区期末）如图，正方形$ABCD$和正方形和$MFNP$重叠，其重叠部分是一个长方形，分别延长AD、CD，交NP和MP于H、Q两点，构成的四边形$NGDH$和$MEDQ$都是正方形，四边形$PQDH$是长方形．若正方形$ABCD$的边长为x，AE＝10，CG＝20，长方形$EFGD$的面积为200．求正方形$MFNP$的面积（结果必须是一个具体数值）．



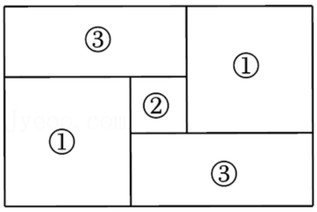
【分析】设DE＝a，DG＝b，则a＝x－10，b＝x－20，$a-b$＝10，又由ab＝200，所以正方形$MFNP$的面积为（$a+b$）^{2}＝（$a-b$）^2+4ab＝900．

【解答】解：）设DE＝a，DG＝b，则a＝x－10，b＝x－20，$a-b$＝10，

又由ab＝200，

∴正方形$MFNP$的面积为：（$a+b$）^{2}＝（$a-b$）^2+4ab＝$10^2+4\times200$＝900．

【变式6-2】（2022春•湖州期末）如图，把一块面积为100的大长方形木板被分割成2个大小一样的大正方形①，1个小正方形②和2个大小一样的长方形③后，如图摆放，且每个小长方形③的面积为16，则标号为②的正方形的面积是（　　）



A．16　　B．14　　C．12　　D．10

【分析】设标号为①的正方形的边长为 x，标号为②的正方形的边长为 y，根据图形及已知条件可将③长方形的长和宽表示出来，再根据每个小长方形的面积均为 16 及大长方形的面积为 100，得出 x^2 与 y^2 的数量关系，然后解得 y^2 即可．

【解答】解：设标号为①的正方形的边长为 x，标号为②的正方形的边长为 y，则标号为③的长方形长为（$x+y$），宽为（$x-y$），

∵每个小长方形③的面积均为 16，

∴（$x+y$）（$x-y$）＝16，

∴x^2-y^2＝16，

∴x^2＝$16+y^2$

∵大长方形的长等于标号为③的小长方形的长与标号为①的正方形的边长的和，宽等于标号为③的小长方形的宽与标号为①的正方形的边长的和，

∴大长方形的长为：[（$x+y$）$+x$]＝$2x+y$，宽为：[（$x-y$）$+x$]＝$2x-y$，

∵大长方形的面积为 100，

∴（$2x+y$）（$2x-y$）＝100，

∴$4x^2-y^2$＝100，

∴4（$16+y^2$）$-y^2$＝100，

∴y^2＝12，

即标号为②的正方形的面积为 y^2＝12．

故选：C．

【变式 6-3】（2022 秋•香坊区校级期中）如图，我校一块边长为 $2x$ 米的正方形空地是八年级 1－4 班的卫生区，学校把它分成大小不同的四块，采用抽签的方式安排卫生区，下图是四个班级所抽到的卫生区情况，其中 1 班的卫生区是一块边长为（$x-2y$）米的正方形，其中 $0<2y<x$．

（1）分别用 x、y 的式子表示八年 3 班和八年 4 班的卫生区的面积；

（2）求 2 班的卫生区的面积比 1 班的卫生区的面积多多少平方米？