专题 09 数列的通项公式、数列求和及综合应用

【目录】

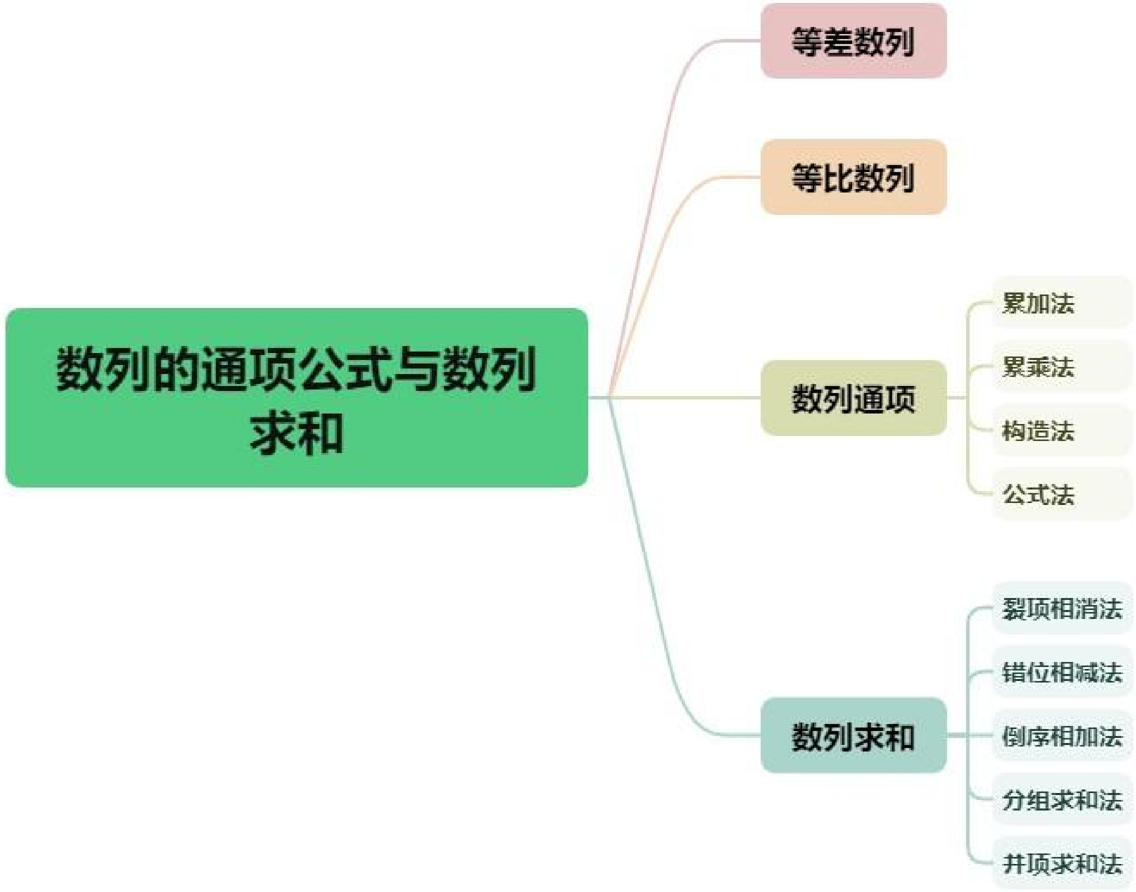
考情分析

数列是高考重点考查的内容之一，命题形式多种多样，大小均有．其中，小题重点考查等差数列、等比数列基础知识以及数列的**递推关系，和其它知识综合**考查的趋势明显（特别是与函数、导数的结合问题），浙江卷**小题难度加大趋势明显**；解答题的难度中等或稍难，随着文理同卷的实施，数列与不等式综合热门

难题（压轴题），有所降温，难度趋减，将稳定在中等偏难程度．往往在解决数列基本问题后考查数列求和，**在求和后往往与不等式、函数、最值等问题综合**．在考查等差数列、等比数列的求和基础上，进一步考查“裂项相消法”、“错位相减法”等，与不等式结合，“放缩”思想及方法尤为重要．数列与数学归纳法的结合问题，也应适度关注．

<table>
<tr><th>考点要求</th><th>考题统计</th><th>考情分析</th></tr>
<tr><td>等差、等比数列</td><td>2023 年甲卷第 5、13 题，10 分
2022 年乙卷第 13 题，5 分
2021 年 II 卷第 17 题，10 分
2023 年 II 卷第 8 题，5 分</td><td rowspan="3">**【命题预测】**
2024 年高考将重点考查：①由递推公式求通项公式与已知前 n 项和或前 n 项和与第 n 项的关系式求通项为重点，特别是数列前 n 项和 S_n 与 a_n 关系的应用，难度为中档题，题型为选择填空小题或解答题第 1 小题，同时要注意对数列单调性与周期性问题的复习与训练.②数列求和部分仍将重点裂项相消法和错位相减法及与不等式恒成立等相关的数列综合问题，求和问题多为解答题第二问，难度为中档，数列综合问题为小题压轴题，为难题.</td></tr>
<tr><td>数列通项</td><td>2023 年乙卷第 18 题，12 分
2023 年 II 卷第 18 题，12 分
2022 年 I 卷第 17 题，10 分
2022 年上海卷第 21 题，18 分</td></tr>
<tr><td>数列求和</td><td>2023 年甲卷第 17 题，12 分
2022 年甲卷第 18 题，12 分
2021 年 I 卷第 16 题，5 分
2021 年乙卷第 19 题，12 分
2021 年 I 卷第 17 题，10 分</td></tr>
</table>

知识建构



方法技巧

1、利用定义判断数列的类型：注意定义要求的任意性，例如若数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}-a_n=d$（常数）（$n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}^*$）不能判断数列$\{a_n\}$为等差数列，需要补充证明$a_2-a_1=d$；

2、数列$\{a_n\}$满足$a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，则$\{a_n\}$是等差数列；

3、数列$\{b_n\}$满足$b_{n+1}=qb_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，$q$为非零常数，且$b_1\neq 0$，则$\{b_n\}$为等比数列；

4、在处理含S_n，a_n的式子时，一般情况下利用公式$a_n=\begin{cases}S_1, & n=1\\ S_n-S_{n-1}, & n\geqslant 2,且n\in\mathbf{N}^*\end{cases}$，消去$S_n$，进而求出$\{a_n\}$的通项公式；但是有些题目虽然要求$\{a_n\}$的通项公式，但是并不便于运用$S_n$，这时可以考虑先消去$a_n$，

得到关于 S_n 的递推公式，求出 S_n 后再求解 a_n.

5、遇到形如 $a_{n+1}-a_n=f(n)$ 的递推关系式，可利用累加法求 $\{a_n\}$ 的通项公式，遇到形如 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$ 的递推关系式，可利用累乘法求 $\{a_n\}$ 的通项公式，注意在使用上述方法求通项公式时，要对第一项是否满足进行检验.

6、遇到下列递推关系式，我们通过构造新数列，将它们转化为熟悉的等差数列、等比数列，从而求解该数列的通项公式：

（1）形如 $a_{n+1}=pa_n+q$ （$p\neq 1$， $q\neq 0$），可变形为 $a_{n+1}+\dfrac{q}{p-1}=p\left(a_n+\dfrac{q}{p-1}\right)$，则 $\left\{a_n+\dfrac{q}{p-1}\right\}$ 是以 $a_1+\dfrac{q}{p-1}$ 为首项，以 p 为公比的等比数列，由此可以求出 a_n；

（2）形如 $a_{n+1}=pa_n+q^{n+1}$（$p\neq 1$，$q\neq 0$），此类问题可两边同时除以 q^{n+1}，得 $\dfrac{a_{n+1}}{q^{n+1}}=\dfrac{p}{q}\cdot\dfrac{a_n}{q^n}+1$，设 $b_n=\dfrac{a_n}{q^n}$，从而变成 $b_{n+1}=\dfrac{p}{q}b_n+1$，从而将问题转化为第（1）个问题；

（3）形如 $qa_n-pa_{n+1}=a_na_{n+1}$，可以考虑两边同时除以 a_na_{n+1}，转化为 $\dfrac{q}{a_{n+1}}-\dfrac{p}{a_n}=1$ 的形式，设 $b_n=\dfrac{1}{a_n}$，则有 $qb_{n+1}-pb_n=1$，从而将问题转化为第（1）个问题.

7、公式法是数列求和的最基本的方法，也是数列求和的基础. 其他一些数列的求和可以转化为等差或等比数列的求和. 利用等比数列求和公式，当公比是用字母表示时，应对其是否为 1 进行讨论.

8、用裂项相消法求和时，要对通项进行变换，如：$\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+k}}=\dfrac{1}{k}\left(\sqrt{n+k}-\sqrt{n}\right)$，$\dfrac{1}{n(n+k)}=\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+k}\right)$，裂项后产生可以连续相互抵消的项. 抵消后并不一定只剩下第一项和最后一项，也有可能前面剩两项，后面也剩两项，但是前后所剩项数一定相同.

常见的裂项公式：

（1）$\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$；

（2）$\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$；

（3）$\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$；

（4）$\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$；

（5）$n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)}{3}$.

9、用错位相减法求和时的注意点：

（1）要善于通过通项公式特征识别题目类型，特别是等比数列公比为负数的情形；

（2）在写出“S_n”与“qS_n”的表达式时应特别注意将两式“错项对齐”以便下一步准确写出“S_n-qS_n”的表达式；

（3）在应用错位相减法求和时，若等比数列的公比为参数，应分公比等于1和不等于1两种情况求解.

10、分组转化法求和的常见类型：

（1）若 $a_n=b_n\pm c_n$，且 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 为等差或等比数列，可采用分组求和法求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和；

（2）通项公式为 $a_n=\begin{cases}b_n, n\text{奇数}\\ c_n, n\text{偶数}\end{cases}$，其中数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 是等比数列或等差数列，可采用分组求和法求和；

（3）要善于识别一些变形和推广的分组求和问题.

11、在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $m+n=s+t=2k$（m，n，s，t，$k\in\mathbf{N}^*$），则 $a_m+a_n=a_s+a_t=2a_k$.

在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $m+n=s+t=2k$（m，n，s，t，$k\in\mathbf{N}^*$），则 $a_ma_n=a_sa_t=a_k^2$.

12、前 n 项和与积的性质

（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，前 n 项和为 S_n.

①S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，…也成等差数列，公差为 n^2d.

②$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 也是等差数列，且 $\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{d}{2}n+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)$，公差为 $\dfrac{d}{2}$.

③若项数为偶数 $2k$，则 $S_{偶}-S_{奇}=kd$，$\dfrac{S_{偶}}{S_{奇}}=\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$.

若项数为奇数 $2k+1$，则 $S_{奇}-S_{偶}=a_{k+1}$，$\dfrac{S_{奇}}{S_{偶}}=\dfrac{k+1}{k}$.

（2）设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，前 n 项和为 S_n.

①当 $q\neq-1$ 时，S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，…也成等比数列，公比为 q^n.

②相邻 n 项积 T_n，$\dfrac{T_{2n}}{T_n}$，$\dfrac{T_{3n}}{T_{2n}}$，…也成等比数列，公比为 $\left(q^n\right)^n=q^{n^2}$.

③若项数为偶数 $2k$，则 $S_{奇}-S_{偶}=\dfrac{a_1\left(1-q^{2k}\right)}{1+q}$，$\dfrac{S_{奇}}{S_{偶}}=\dfrac{1}{q}$；项数为奇数时，没有较好性质.

13、衍生数列

（1）设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均是等差数列，且等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，λ，μ 为常数.

①$\{a_n\}$ 的等距子数列 $\{a_m,a_{m+k},a_{m+2k},\cdots\}$ $\left(k,m\in\mathbf{N}^*\right)$ 也是等差数列，公差为 kd.

②数列 $\{\lambda a_n+\mu\}$，$\{\lambda a_n\pm\mu b_n\}$ 也是等差数列，而 $\{\lambda^{a_n}\}$ 是等比数列.

（2）设数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$均是等比数列，且等比数列$\{a_n\}$的公比为q，λ为常数.

①$\{a_n\}$的等距子数列$\{a_m,a_{m+k},a_{m+2k},\cdots\}$也是等比数列，公比为$q^k$.

②数列$\{\lambda a_n\}(\lambda\neq 0)$，$\left\{\dfrac{\lambda}{a_n}\right\}(\lambda\neq 0)$，$\{|a_n|\}$，$\{a_nb_n\}$，$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$，$\{a_n^m\}$

也是等比数列，而$\{\log_a a_n\}$$(a>0,a\neq 1,a_n>0)$是等差数列.

14、判断数列单调性的方法

（1）比较法（作差或作商）；（2）函数化（要注意扩展定义域）.

15、求数列最值的方法（以最大值项为例，最小值项同理）

方法1：利用数列的单调性；

方法2：设最大值项为a_n，解方程组$\begin{cases}a_n\geqslant a_{n-1}\\a_n\geqslant a_{n+1}\end{cases}$，再与首项比较大小.

真题研析

1.（2023•甲卷）记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和．若$a_2+a_6=10$，$a_4a_8=45$，则$S_5=($　　$)$

A．25　　B．22　　C．20　　D．15

2.（2023•新高考Ⅱ）记S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和，若$S_4=-5$，$S_6=21S_2$，则$S_8=($　　$)$

A．120　　B．85　　C．-85　　D．-120

3.（2023•甲卷）已知正项等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，S_n为$\{a_n\}$前n项和，$S_5=5S_3-4$，则$S_4=($　　$)$

A．7　　B．9　　C．15　　D．30

4.（2022•乙卷）记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和．若$2S_3=3S_2+6$，则公差$d=$____.

5．（2023•甲卷）记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．若 $8S_6=7S_3$，则 $\{a_n\}$ 的公比为 ____．

6．（2021•新高考Ⅰ）某校学生在研究民间剪纸艺术时，发现剪纸时经常会沿纸的某条对称轴把纸对折．规格为 $20dm\times12dm$ 的长方形纸，对折 1 次共可以得到 $10dm\times12dm$，$20dm\times6dm$ 两种规格的图形，它们的面积之和 $S_1=240dm^2$，对折 2 次共可以得到 $5dm\times12dm$，$10dm\times6dm$，$20dm\times3dm$ 三种规格的图形，它们的面积之和 $S_2=180dm^2$，以此类推．则对折 4 次共可以得到不同规格图形的种数为____；如果对折 n 次，那么 $\sum\limits_{k=1}^{n}S_k=$____ dm^2．

7．（2021•新高考Ⅱ）记 S_n 是公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_3=S_5$，$a_2a_4=S_4$．

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n；

（Ⅱ）求使 $S_n>a_n$ 成立的 n 的最小值．

8．（2023•乙卷）记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_2=11$，$S_{10}=40$．

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和 T_n．

9．（2022•上海）数列 $\{a_n\}$ 对任意 $n\in N^*$ 且 $n\ \ 2$，均存在正整数 $i\in[1，n-1]$，满足 $a_{n+1}=2a_n-a_i$，$a_1=1$，

$a_2=3$.

（1）求 a_4 可能值；

（2）命题 p：若 a_1，a_2，$\cdots$，a_8 成等差数列，则 $a_9<30$，证明 p 为真，同时写出 p 逆命题 q，并判断命题 q 是真是假，说明理由；

（3）若 $a_{2m}=3^m$，$(m\in N^*)$ 成立，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

10.（2023•甲卷）已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=1$，设 S_n 为 $\{a_n\}$ 前 n 项和，$2S_n=na_n$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\{\frac{a_n+1}{2^n}\}$ 的前 n 项和 T_n.

11.（2021•新高考Ⅰ）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1,n为奇数,\\a_n+2,n为偶数.\end{cases}$

（1）记 $b_n=a_{2n}$，写出 b_1，b_2，并求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）求 $\{a_n\}$ 的前 20 项和.

核心考点

考点一：等差、等比数列的基本量问题

规律总结

利用等差数列中的基本量（首项，公差，项数），等比数列的基本量（首项，公比，项数）翻译条件，将问题转换成含基本量的方程或不等式问题求解.

题型特训

例 1．（2023·全国·模拟预测）记数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，若等差数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$的首项为 5，第 4 项为 8，则$a_{10}=$（　）

A．14　　B．23　　C．32　　D．140

例 2．（2023·全国·模拟预测）已知各项均为正数的数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为$S_n, S_n+S_{n+1}=a_{n+1}^2$，若$S_{21}=253$，则$a_1=$（　）

A．3　　B．6　　C．9　　D．12

例 3．（2023·河北廊坊·高三河北省文安县第一中学校联考期中）已知等比数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为$S_n, a_1+a_3+a_5=1, a_2+a_4+a_6=2$，则$S_{12}-S_6=$（　）

A．18　　B．54　　C．128　　D．192

例 4．（2023·宁夏银川·高三银川唐徕回民中学校考期中）已知等比数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1+a_2+a_4=2$，公比$q=2$，则$a_6+a_7+a_9=$（　）

A．32　　B．64　　C．128　　D．256

例 5．（2023·全国·模拟预测）已知正项等比数列$\left\{a_n\right\}$满足$2a_2a_5=a_3^2$，若$\log_{\frac{1}{2}}a_1+\log_{\frac{1}{2}}a_2+\cdots+\log_{\frac{1}{2}}a_{10}=55$，则$a_1=$（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{3}{2}$　　C．2　　D．$\frac{5}{2}$

例 6．（2023·河北张家口·高三河北省尚义县第一中学校联考阶段练习）等差数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$中的前n项和分别为$S_n,T_n,\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{4n}{9n+3}$，则$\dfrac{a_{10}}{b_{10}}=$（　）

A．$\dfrac{40}{93}$　　B．$\dfrac{38}{87}$　　C．$\dfrac{17}{42}$　　D．$\dfrac{32}{81}$

考点二：证明等差等比数列

规律总结

判断或证明数列是等差、等比数列常见的方法如下．

（1）定义法：对于$n\ \ 2$的任意正整数：

①若a_n-a_{n-1}为一常数，则$\{a_n\}$为等差数列；

②若$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$为常数，则$\{a_n\}$为等比数列．

（2）通项公式法：

①若$a_n=kn+c$，则$\{a_n\}$为等差数列；

（2）若$a_n=c\cdot q^n$，则$\{a_n\}$为等比数列．

（3）中项公式法：

①若$2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}\left(n\ \ 2,n\in\mathbf{N}^*\right)$，则$\{a_n\}$为等差数列；

②若$a_n^2=a_{n-1}\cdot a_{n+1}\left(n\ \ 2,n\in\mathbf{N}^*\right),a_n\neq 0,n\in\mathbf{N}^*$，则$\{a_n\}$为等比数列．

（4）前n项和法：若$\{a_n\}$的前n项和S_n满足：

①$S_n=An^2+Bn$，则$\{a_n\}$为等差数列．

②$S_n=A-Aq^n$，则$\{a_n\}$为等比数列．

题型特训

例 7．（2023·河北承德·统考模拟预测）已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=3$，$a_{n+1}=\begin{cases}3a_n+3, n\text{为奇数},\\ \frac{1}{3}a_n+2, n\text{为偶数}.\end{cases}$

(1)证明：数列$\left\{a_{2n-1}\right\}$为等差数列；

(2)若将数列$\left\{a_n\right\}$中满足$a_i=a_j$的项a_i，$a_j(i\neq j)$称为数列$\left\{a_n\right\}$中的相同项，将数列$\left\{a_n\right\}$的前 40 项中所有的相同项都剔除，求数列$\left\{a_n\right\}$的前 40 项中余下项的和.

例 8．（2023·辽宁鞍山·高二鞍山一中校考期中）已知数列$\left\{a_n\right\}\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$的前 n 项和为S_n，若$S_{n+1}+S_n=3n^2+6n+3$，$a_1=2$.

(1)记$b_n=a_n+a_{n+1}$判断$\left\{b_n\right\}$是否为等差数列，若是，给出证明；若不是，请说明理由.

例 9．（2023·安徽·高三校联考阶段练习）已知数列$\left\{a_n\right\}$满足：$a_1=\frac{1}{2}$，$a_2=1$，$\left(n+1\right)\left(n+2\right)a_n-4n\left(n+2\right)a_{n+1}+4n\left(n+1\right)a_{n+2}=0$，$n\in\mathrm{N}^*$.

(1)证明：数列$\left\{\frac{2^n a_n}{n}\right\}$为等差数列，并写出数列$\left\{a_n\right\}$的通项；

例 10．（2023·辽宁朝阳·高三建平县实验中学校联考阶段练习）在数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=1$，$\frac{n+1}{a_{n+1}}+\frac{n}{a_n}=0$.

(1)求证：$\left\{\left(-1\right)^{n-1}a_n\right\}$为等差数列；

例 11．（2023·辽宁大连·高三大连市金州高级中学校考期中）设S_n是数列$\left\{a_n\right\}$的前 n 项和，已知$a_1=1$，

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n+n, n\text{为奇数},\\ a_n-2n, n\text{为偶数}.\end{cases}$$

(1)证明：$\{a_{2n}-2\}$是等比数列，并求$\{a_{2n}\}$的通项公式；

(2)证明：当$n\ge 2$时，$a_{2n}\ge S_{2n}$.

例 12.（2023·全国·模拟预测）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=3$，$a_2=6$，且

$nS_{n+1}+(2n+2)S_{n-1}=(3n+2)S_n-2n-4\ (n\ge 2)$，$b_n=\dfrac{a_n-2}{n}$.

(1)求证：数列$\{b_n\}$是等比数列.

(2)判断是否存在正整数p，q，r（$p<q<r$）使得a_p，a_q，a_r成等差数列．若存在，求出p，q，r的一组值；若不存在，请说明理由．

考点三：等差等比数列的交汇问题

规律总结

在解决等差、等比数列综合问题时，要充分利用基本公式、性质以及它们之间的转化关系，在求解过程中要树立“目标意识”，“需要什么，就求什么”，并适时地采用“巧用性质，整体考虑”的方法．可以达到减少运算量的目的．

题型特训

例 13.（2023·黑龙江哈尔滨·高三哈师大附中校考期中）若$\{a_n\}$是公差不为 0 的等差数列，a_2，a_4，a_8成等比数列，$a_1=1$，S_n为$\{a_n\}$的前n（$n\in\mathrm{N}^*$）项和，则$\dfrac{1}{3S_1}+\dfrac{1}{4S_2}+\cdots+\dfrac{1}{12S_{10}}$的值为______.

例 14.（2023·四川攀枝花·统考模拟预测）已知正项等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$\dfrac{1}{9},a_1+1,S_9$成等比

数列，则$\dfrac{S_5}{a_1}$的最小值为______.

例 15．（2023·江苏南通·高三统考期中）已知等差数列$\{a_n\}$前 3 项和$S_3=12$，a_1-1，a_2-1，a_3+3成等比数列，则数列$\{a_n\}$的公差$d=$______________.

例 16．（2023·江苏南通·高三统考期中）设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_5=5$，$\{b_n\}$是等比数列，满足$a_nb_n=(n+1)2^n$，则$S_n=$_______.

例 17．（2023·重庆沙坪坝·高三重庆南开中学校考阶段练习）已知数列$\{a_n\}$是公差不为 0 的等差数列，数列$\{a_{k_n}\}$为等比数列，数列$\{k_n\}$的前三项分别为 1，2，6，则数列$\{k_n\}$的通项公式为______.

例 18．（2023·北京·高三统考开学考试）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_n+S_n=kn+b$，其中k，b不同时为 0．给出下列四个结论：

①当$k=0$时，$\{a_n\}$为等比数列；

②当$k\neq 0$时，$\{a_n\}$一定不是等差数列；

③当$k=b$时，$\{a_n\}$为常数列；

④当$k>b$时，$\{a_n\}$是单调递增数列.

其中所有正确结论的序号是________.