专项 21　切线的判定与性质的综合应用

【解题思路】

- 圆的切线的性质--三角形内切圆
- 圆的切线的判定
  - 应用: d=r
  - 判定定理
- 圆的切线性质与判定综合应用

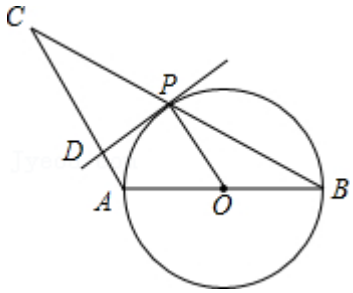
【典例分析】

【类型一： 有公共点：连半径，证垂直】

【典例 1】（2021 秋•吉林期末）已知：如图，△ABC 中，$AB=AC$，以 AB 为直径的⊙O 交 BC 于点 P，$PD\perp AC$ 于点 D.

（1）求证：PD 是⊙O 的切线；

（2）若$\angle CAB=120°$，$AB=6$，求 BC 的值.



【解答】（1）证明：∵$AB=AC$，

∴$\angle B=\angle C$，

∵$OP=OB$，

∴$\angle B=\angle OPB$，

∴$\angle OPB=\angle C$，

∴$OP\parallel AC$，

∵$PD\perp AC$，

∴$OP\perp PD$，

∴PD 是⊙O 的切线；

（2）解：连接 AP，如图，

∵AB 为直径，

∴$\angle APB=90°$，

∴$BP=CP$，

∵$\angle CAB=120°$，

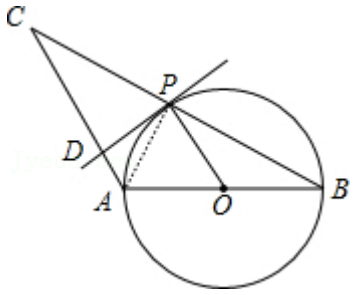
∴$\angle BAP=60°$，

在 Rt△BAP 中，$AB=6$，$\angle B=30°$，

∴$AP=\frac{1}{2}AB=3$，

∴$BP=\sqrt{3}AP=3\sqrt{3}$，

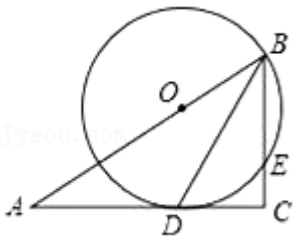
∴$BC=2BP=6\sqrt{3}$.



【变式 1-1】（2021 秋•西城区校级期中）如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，BD 是角平分线，点 O 在 AB 上，以点 O 为圆心，OB 为半径的圆经过点 D，交 BC 于点 E.

（1）求证：AC 是⊙O 的切线；

（2）若 $OB=10$，$CD=8$，求 CE 的长.



【解答】（1）证明：连接 OD，如图，

∵BD 为$\angle ABC$ 平分线，

∴$\angle 1=\angle 2$，

∵$OB=OD$，

∴$\angle 1=\angle 3$，

∴$\angle 2=\angle 3$，

∴$OD\parallel BC$，

∵∠C=90°，

∴∠ODA=90°，

∴AC 是⊙O 的切线；

（2）解：过 O 作 OG⊥BC，连接 OE，

则四边形 $ODCG$ 为矩形，

∴GC=OD=OB=10，OG=CD=8，

在 Rt△OBG 中，利用勾股定理得：BG=6，

∵OG⊥BE，OB=OE，

∴BE=2BG=12．

解得：BE=12，

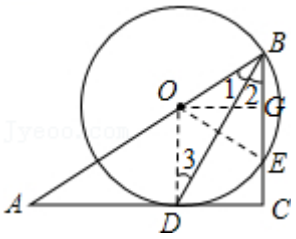
∵AC 是⊙O 的切线，

∴CD^2=CE•CB，

即 8^2=CE（CE+12），

解得：CE=4 或 CE=﹣16（舍去），

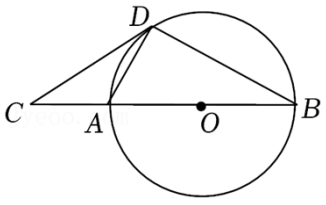
即 CE 的长为 4．



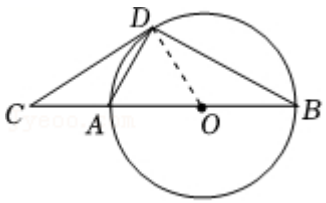
【变式 1-2】（2021 秋•温岭市期末）如图，D 为⊙O 上一点，点 C 在直径 BA 的延长线上，且∠CDA=∠CBD．

（1）求证：CD 是⊙O 的切线；

（2）若 AC=8，CD=12，求半径的长度．



【解答】（1）证明：连接 OD，



∵AB 是⊙O 的直径，

∴∠ADB=90°，

∴∠DAB+∠DBA=90°，

∵∠CDA=∠CBD，

∴∠DAB+∠CDA=90°，

∵OD=OA，

∴∠DAB=∠ADO，

∴∠CDA+∠ADO=90°，

∴∠CDO=90°，

∵OD 是⊙O 的半径，

∴CD 是⊙O 的切线；

（2）解：在 Rt△CDO 中，$CD^2+OD^2=OC^2$，

∴$12^2+r^2=(8+r)^2$，

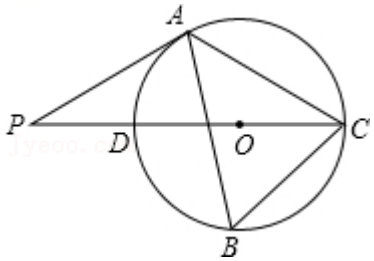
∴r=5，

∴半径的长度为 5.

【典例 2】（2020•中宁县一模）如图，△ABC 内接于⊙O，∠B=60°，CD 是⊙O 的直径，点 P 是 CD 延长线上一点，且 AP=AC.

（1）求证：PA 是⊙O 的切线；

（2）若 PD=1，求⊙O 的直径.



【解答】（1）证明：连接 OA，

∵∠B=60°，

∴∠AOC=2∠B=120°，

又∵$OA=OC$，

∴$\angle OAC=\angle OCA=30°$，

又∵$AP=AC$，

∴$\angle P=\angle ACP=30°$，

∴$\angle OAP=\angle AOC-\angle P=90°$，

∴$OA\perp PA$，

∴PA 是⊙O 的切线．

（2）设该圆的半径为 x．

在 Rt△OAP 中，∵$\angle P=30°$，

∴$PO=2OA=OD+PD$，又∵$OA=OD$，

∴$1+x=2x$，

解得：$x=1$

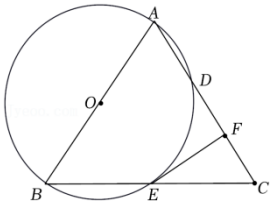
∴$OA=PD=1$，

所以⊙O 的直径为 2

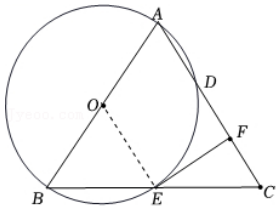
【变式 2-1】（2021 秋•甘井子区期末）如图，△ABC 中，$AB=AC$，以 AB 为直径的⊙O 与 AC，BC 分别交于点 D 和点 E，过点 E 作 $EF\perp AC$，垂足为 F．

（1）求证：EF 是⊙O 的切线；

（2）若 $CD=4$，$EF=3$，求⊙O 半径．



【解答】（1）证明：连接 OE，



∵$EF\perp AC$，

∴$\angle EFD=\angle EFC=90°$，

∵$AB=AC$，

∴$\angle B=\angle C$，

∵$OB=OE$，

∴$\angle B=\angle OEB$，

∴$\angle OEB=\angle C$，

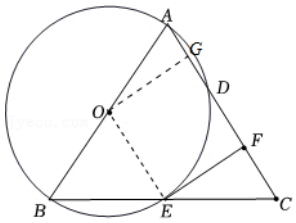
∴$OE/\!/AC$，

∴$\angle OEF=\angle EFC=90°$，

∵OE 是⊙O 的半径，

∴EF 是⊙O 的切线；

（2）解：过点 O 作 $OG\perp AD$，垂足为 G，



∴$\angle OGF=90°$，

∵$\angle OEF=\angle EFG=90°$，

∴四边形 $OEFG$ 是矩形，

∴$OG=EF=3$，

设⊙O 的半径为 x，

∴$AB=AC=2x$，

∵$CD=4$，

∴$AD=AC-CD=2x-4$，

∵$OG\perp AD$，

∴$AG=\frac{1}{2}AD=x-2$，

在 Rt△OAG 中，$AG^2+OG^2=OA^2$，

∴$(x-2)^2+9=x^2$，

∴$x=\frac{13}{4}$，

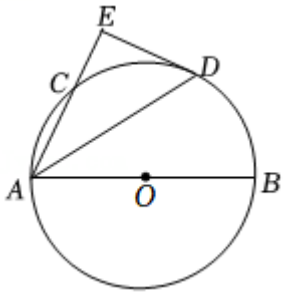
∴⊙O 的半径为$\frac{13}{4}$.

【变式 2-2】（2021 秋•天津期末）如图，已知 AB 是⊙O 的直径，AC 是弦，$\angle BAC$ 的角平分线交⊙O 于点 D，$DE\perp AC$

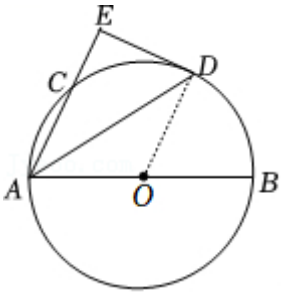
于 E.

（1）求证：DE 是⊙O 的切线；

（2）若 $AB=10$，$AC=6$，求 ED 的长．



【解答】（1）证明：连接 OD，



∵$DE\perp AE$，

∴$\angle AED=90°$，

∵AD 平分$\angle BAE$，

∴$\angle CAD=\angle DAB$，

∵$OA=OD$，

∴$\angle ADO=\angle DAB$，

∴$\angle CAD=\angle ADO$，

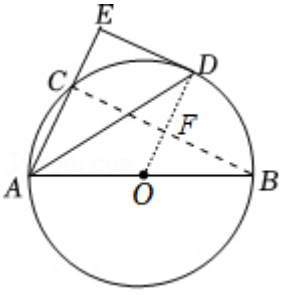
∴$AC\parallel DO$，

∴$\angle EDO=180°-\angle E=90°$，

∵OD 是⊙O 的半径，

∴DE 是⊙O 的切线；

（2）解：连接 BC，



∵AB 是⊙O 的直径，

∴∠ACB＝90°，

∴∠ECB＝180° - ∠ACB＝90°，

∵∠E＝∠EDO＝90°，

∴四边形 $ECFD$ 是矩形，

∴DE＝CF，∠CFD＝90°，

∵AB＝10，AC＝6，

∴$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{10^2-6^2}$＝8，

∵$OD\perp BC$，

∴$CF=\frac{1}{2}BC$＝4，

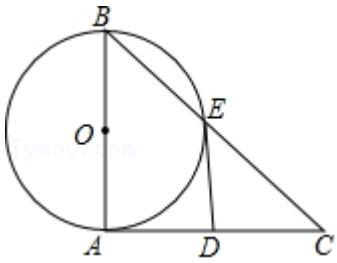
∴DE＝CF＝4，

∴ED 的长为 4

【典例 3】（2022•东明县一模）已知，在 Rt△ABC 中，∠BAC＝90°，以 AB 为直径的⊙O 与 BC 相交于点 E，在 AC 上取一点 D，使得 DE＝AD，

（1）求证：DE 是⊙O 的切线．

（2）当 BC＝10，AD＝4 时，求⊙O 的半径．



【解答】（1）证明：连接 OE、OD，

在△AOD 和△EOD 中，

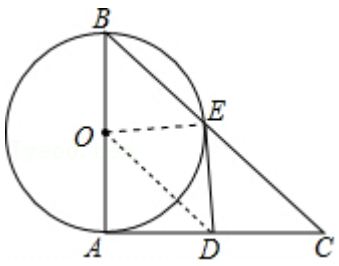
$$\begin{cases}OA=OE\\DA=DE,\\OD=OD\end{cases}$$

∴△AOD≌△EOD（SSS），

∴∠OED＝∠BAC＝90°，

∴DE 是⊙O 的切线；

（2）解：∵△AOD≌△EOD，



∴∠*AOD*＝∠*EOD*，

∵*OB*＝*OE*，

∴∠*B*＝∠*OEB*，

∵∠*AOE*＝∠*B*+∠*OEB*，

∴∠*BEO*＝∠*EOD*，

∴*OD*∥*BC*，又 *AO*＝*BO*，

∴$OD=\frac{1}{2}BC=5$，

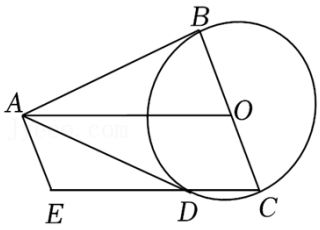
由勾股定理得，$AO=\sqrt{OD^2-AD^2}=3$，

则⊙*O* 的半径为 3．

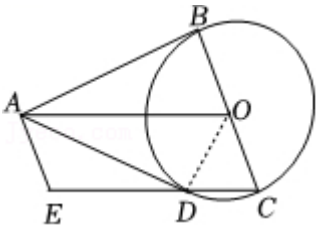
【变式 3-1】（2021 秋•金湖县期末）如图，四边形 *OAEC* 是平行四边形，以 *O* 为圆心，*OC* 为半径的圆交 *CE* 于 *D*，延长 *CO* 交⊙*O* 于 *B*，连接 *AD*、*AB*，*AB* 是⊙*O* 的切线．

（1）求证：*AD* 是⊙*O* 的切线．

（2）若⊙*O* 的半径为 4，*AB*＝8，求平行四边形 *OAEC* 的面积．



【解答】（1）证明：连接 *OD*，



∵*AB* 与⊙*O* 相切于点 *B*，

∴∠*OBA*＝90°，

∵四边形 *OAEC* 是平行四边形，

∴*AO*∥*EC*，

∴∠*AOD*＝∠*ODC*，∠*AOB*＝∠*OCD*，

∵*OD*＝*OC*，

∴∠*ODC*＝∠*OCD*，

∴∠AOB＝∠AOD，

又∵OA＝OA，OD＝OB，

∴△AOB≌△AOD（SAS），

∴∠OBA＝∠ODA，

∴∠ODA＝90°，

∵OD 是⊙O 的半径，

∴AD 为⊙O 的切线；

（2）解：∵OB＝4，AB＝8，

∴$S_{\triangle ABO}$＝$\frac{1}{2}$$AB$•$OB$＝$\frac{1}{2}$×4×8＝16，

∵△AOB≌△AOD，

∴$S_{\triangle AOD}$＝16，

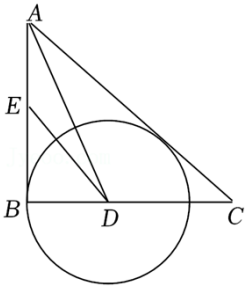
∴平行四边形 $OAEC$ 的面积＝2$S_{\triangle AOD}$＝32．

【类型一： 没有公共点：作垂直，证半径】

【典例 4】（2020•八步区一模）如图，在 Rt△ABC 中，∠BAC 的角平分线交 BC 于点 D，E 为 AB 上一点，DE＝DC，以 D 为圆心，DB 的长为半径作⊙D，AB＝5，BE＝3．

（1）求证：AC 是⊙D 的切线；

（2）求线段 AC 的长．



【解答】（1）证明：过点 D 作 DF⊥AC 于 F；

∵AB 为⊙D 的切线，

∴∠B＝90°，

∴AB⊥BC，

∵AD 平分∠BAC，DF⊥AC，

∴BD＝DF，

∴AC 与⊙D 相切；

（2）解：在△BDE 和△DCF 中；

$\begin{cases} BD=DF \\ DE=DC \end{cases}$，

∴Rt△*BDE*≌Rt△*DCF*（*HL*），

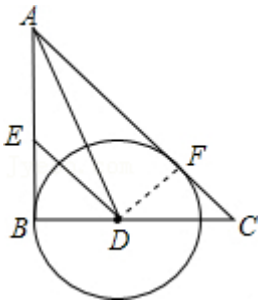
∴*EB*＝*FC*.

∵*AB*＝*AF*，

∴*AB*+*EB*＝*AF*+*FC*，

即 *AB*+*EB*＝*AC*，

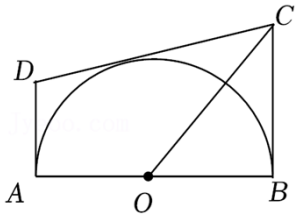
∴*AC*＝5+3＝8.



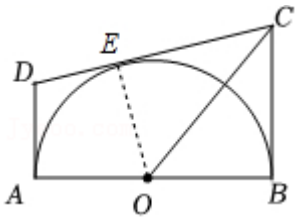
【变式 4-1】（2021 秋•莆田期末）如图，半圆 *O* 的直径是 *AB*，*AD*、*BC* 是两条切线，切点分别为 *A*、*B*，*CO* 平分∠*BCD*.

（1）求证：*CD* 是半圆 *O* 的切线.

（2）若 *AD*＝20，*CD*＝50，求 *BC* 和 *AB* 的长.



【解答】（1）证明：过点 *O* 作 *OE*⊥*CD*，垂足为点 *E*，



∵*BC* 是半圆 *O* 的切线，*B* 为切点，

∴*OB*⊥*BC*，

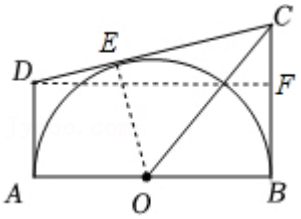
∵*CO* 平分∠*BCD*，

∴*OE*＝*OB*，

∵OB 是半圆 O 的半径，

∴CD 是半圆 O 的切线；

（2）解：过点 D 作 $DF\perp BC$，垂足为点 F，



∴$\angle DFB=90°$，

∵AD 是半圆 O 的切线，切点为 A，

∴$\angle DAO=90°$，

∵$OB\perp BC$，

∴$\angle OBC=90°$，

∴四边形 $ADFB$ 是矩形，

∴$AD=BF=20$，$DF=AB$，

∵AD，CD，BC 是半圆 O 的切线，切点分别为 A、E、B，

∴$DE=AD=20$，$EC=BC$，

∵$CD=50$，

∴$EC=CD-DE=50-20=30$，

∴$BC=30$，

∴$CF=BC-BF=10$，

在 Rt△CDF 中，由勾股定理得：

$DF=\sqrt{DC^2-CF^2}=\sqrt{50^2-10^2}=20\sqrt{6}$，

∴$AB=DF=20\sqrt{6}$，

∴BC 的长为 30，AB 的长为 $20\sqrt{6}$.

【跟踪训练】

1.（2021秋•龙沙区期末）如图，以点O为圆心，AB长为直径作圆，在⊙O上取一点C，延长AB至点D，连接DC，$\angle DCB=\angle DAC$，过点A作$AE\perp AD$交DC的延长线于点E.

（1）求证：CD是⊙O的切线；

（2）若$CD=4$，$DB=2$，求AE的长.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/488047064065006121