第三章　小结与练习

n维向量

向量组

向量的线性相关性

线性组合

线性表示

线性相关

线性无关

向量组的秩

线性相关性判定定理

重点

一、n维向量

1、定义

n个数$a_1,a_2,\cdots,a_n$构成的有序数组

$$\alpha=\left(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n\right)$$

称为一种n维向量，其中a_i称为第i个分量（坐标）.

n维向量写成一行称为行向量，记作α^T,β^T.

n维向量写成一列称为列向量，记作α,β.

2、几种特殊向量

实向量，复向量，零向量，单位向量，向量同型，向量相等.

3、矩阵与向量的关系

注意什么是向量的个数、什么是向量的维数，两者必须分清.

4、向量的运算

向量的运算与采用矩阵的运算规律.

5、向量组

若干个同维数的列向量（或同维数的行向量）所构成的集合叫做**向量组**.

6、向量空间

设 V为 n 维非空向量组，且满足

①对加法封闭　　$if\ \ \alpha \in V, \beta \in V \Rightarrow \alpha + \beta \in V;$

②对数乘封闭　　$if\ \ \alpha \in V, \lambda \in R \Rightarrow \lambda\alpha \in V.$

那么就称集合 V为**向量空间**.

二、向量的线性有关性

1、基本概念

定义Ⅰ　给定向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$，对于任何一组数$k_1, k_2,\cdots,k_r$，称向量$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r$为向量组的一种**线性组合**（Linear Combination）.

$k_1, k_2,\cdots,k_r$ 为组合的**组合系数**（Combination Coefficient）.

定义Ⅱ　设向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$及向量$\beta$有关系

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r$$

则β称为向量组的一种**线性组合**，或称β可由向量组A**线性表达**（Linear Expression）.

$k_1, k_2,\cdots,k_r$ 称为β**在该线性组合下的组合系数**.

定义Ⅲ　设两向量组 $A: \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$， $B: \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$.

若向量组 A 中每一种向量皆可由向量组 B 线性表达，则称向量组 A 能够由向量组 B 线性表达.

即存在矩阵　$K_{s\times r}, \ni A_r = B_s K_{s\times r}$.

若两个向量组能够相互线性表达，则称这两向量组等价.

向量组之间的等价关系具有反身性、对称性、传递性.

定义Ⅳ　设 n 维向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ ，假如存在不全为零的数 k_1， $k_2,\cdots,k_r$ ，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$，则称向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性有关（Linear Dependent）.

反之，若当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$，才有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$，则称向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关（Linear Independent）.

三、向量组的秩

1、极大线性无关组

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是一种向量组，它的某一种部分组

$A_0:\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$ 若满足：

① $A_0:\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$线性无关；

② $\forall\alpha(1\le j\le s),\ni\alpha,\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$ 线性有关.

则称 $A_0:\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$ 为A的一种极大线性无关组.

2、向量组的秩

向量组的极大无关组所含向量个数称为向量组的秩.

记作：$R(A)$ 或 $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$

3、向量组的秩与矩阵的秩的关系

定义　矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

A的列向量组的秩称为列秩，记为：$c(A)$.

A的行向量组的秩称为行秩，记为：$r(A)$.

定理　$R(A_{m\times n})=c(\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_n)=r(\alpha_1^T \quad \cdots \quad \alpha_m^T)$

结论　$in \quad A_{m\times n}$

①$\exists \; D_r \neq 0$，则D_r所在行（列）向量组线性无关.

②$\forall \; D_r = 0$，则A的任 r 行（列）向量组线性有关.

③$\exists \; D_r \neq 0$，且具有D_r的$\forall \; D_{r+1}=0$，则$R(A)=r$.

! 定理 已知n维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$, $A=(\alpha_1\ \ \alpha_2\cdots\ \alpha_s)$ ，若对 A 施行初等行变换把 A 化为 $B=(\beta_1\ \ \beta_2\cdots\ \beta_s)$ ，则向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_p}$ 与 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_p}$ $(1\le i_1<i_2<\cdots<i_p\le s)$ 有相同的线性关系.

概念辨析 相同的线性关系是指:

① $R(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_p})=R(\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_p})$

② α_i 可以由 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_p}$ 线性表达，相应的 β_i 可以由 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_p}$ 线性表达，且体现式的系数相应相同.

③ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 极大无关组相相应.

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为n维向量组，下面命题等价

① $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

② 满足$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$的数当且仅当全为零.

③ $\forall\, k_1^{\,2}+k_2^{\,2}+\cdots+k_r^{\,2}\neq 0$ 都有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r\neq 0.$

④ $\forall\,\alpha_i(1\le i\le r)$ 都不可由其他向量线性表达.

⑤ $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=r.$

⑥ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的极大线性无关组是其本身.

⑦ 设$A=(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_r)$, 则矩阵 A的秩为 r .

⑧ 向量方程 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r=0$ 只有零解.

⑨ 设$A=(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_r)$, 则方程 $Ax = 0$ 只有零解.

⑩ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 不线性有关.

设 $\alpha_1,\alpha_2,\mathrm{L}\ ,\alpha_r$ 为 n 维向量组，下面命题等价

① $\alpha_1,\alpha_2,\mathrm{L}\ ,\alpha_r$ 线性有关.

② 满足 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\mathrm{L}\ +k_r\alpha_r=0$ 的数至少有组不为零.

③ $\exists\, k_1{}^2+k_2{}^2+\mathrm{L}\ +k_r{}^2\neq 0$ 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\mathrm{L}\ +k_r\alpha_r=0.$

④ $\exists\, \alpha_i(1\leq i\leq r)$ 可由其他向量线性表达.

⑤ $R(\alpha_1,\alpha_2,\mathrm{L}\ ,\alpha_r)<r.$

⑥ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\mathrm{L}\ ,\alpha_r$ 的极大线性无关组是真子集.

⑦ 设 $A=(\alpha_1\quad \alpha_2\quad \mathrm{L}\quad \alpha_r)$, 矩阵 A 的秩不大于 r .

⑧ 向量方程 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\mathrm{L}\ +x_r\alpha_r=0$ 有非零解.

⑨ 设 $A=(\alpha_1\quad \alpha_2\quad \mathrm{L}\quad \alpha_r)$, 则方程 A x ＝ 0 有非零解.

⑩ $\alpha_1,\alpha_2,\mathrm{L}\ ,\alpha_r$ 不线性无关.

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 为 n 维向量组，下面命题等价

① β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表达.

② 向量方程 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r=\beta$ 有解.

③ $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta)$.

④ 非奇次线性方程 $A\,x=\beta$ 有解.

⑤ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的极大线性无关组也是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 的极大线性无关组.

向量组 A 可由 B 线性表达，则

① 存在矩阵 $K_{s\times r}$, $\ni A_r=B_sK_{s\times r}$.

② 若 r ＞ s ，则 A 线性有关.

③ A 线性无关，则 r ≤ s .

④ $R(A)\leq R(B)$.

⑤ 等价向量组必有同秩. （反之则不然）

定理 假如向量组$A=\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性有关，则 β 可由 A 唯一线性表达.

定理 设向量组 A: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ $B:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1}$ 若 A 线性有关, 则向量组 B 也线性有关；反之，若向量组 B 线性无关，则向量组 A 也线性无关.

定理 设向量组 A: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, B: $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$. 其中

$$\alpha_i=\begin{pmatrix}a_{1i} & a_{2i} & \cdots & a_{mi}\end{pmatrix}^T (i=1,2,\cdots,n)$$

$$\beta_i=\begin{pmatrix}a_{1i} & a_{2i} & \cdots & a_{mi} & a_{m+1,i}\end{pmatrix}^T (i=1,2,\cdots,n)$$

若 A 线性无关，则向量组 B 也线性无关；反之，若向量组 B 线性有关，则向量组 A 也线性有关.

典　型　例　题

- 一、向量组线性关系的鉴定
- 二、求向量组的秩
- 三、向量组的有关性论证
- 四、基础解系的证法
- 五、解向量的证法

一、向量组线性关系的鉴定

研究此类问题一般有两个措施

措施1　从定义出发

令$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\ k_m\alpha_m=0,$

$$k_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{12}\\\vdots\\a_{1n}\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}a_{21}\\a_{22}\\\vdots\\a_{2n}\end{pmatrix}+\cdots+k_m\begin{pmatrix}a_{m1}\\a_{m2}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

整顿得线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \cdots + a_{m1}k_m = 0, \\
a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{m2}k_m = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{1n}k_1 + a_{2n}k_2 + \cdots + a_{mn}k_m = 0,
\end{cases}
\qquad (*)
$$

若线性方程组(*)只有唯一零解,则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关.

若线性方程组(*)有非零解,则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关.

措施２　利用矩阵的秩与向量组的秩之间关系鉴定

给出一组n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，就得到一个相应的矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，首先求出$R(A)$.

若$R(A)=m$，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关；

若$R(A)<m$，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关.

例 1　研究下列向量组的线性有关性

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\-5\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

例2 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关,证明:存在不全为零的数$t_1,t_2,\cdots,t_r$,使对任何向量$\beta$都有

$\alpha_1+t_1\beta,\alpha_2+t_2\beta,\cdots,\alpha_r+t_r\beta (r\geq 2)$线性相关

证明 因为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关,所以存在不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_r$,使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$$

考虑线性方程

$$k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_rx_r=0$$

因为$r\geq 2$,它必有非零解,设$(t_1,t_2,\cdots,t_r)$为任一非零解,则对任意向量β,都有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r$$
$$+(k_1t_1+k_2t_2+\cdots+k_rt_r)\beta=0$$

即

$$k_1(\alpha_1+t_1\beta)+k_2(\alpha_2+t_2\beta)$$
$$+\cdots+k_r(\alpha_r+t_r\beta)=0$$

由$k_1,k_2,\cdots,k_r$不全为零得知:

$$\alpha_1+t_1\beta,\alpha_2+t_2\beta,\cdots,\alpha_r+t_r\beta$$

线性相关

例3 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩是$r$，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中任意$r$个线性无关的向量均构成它的一个最大线性无关组

证明 不失一般性，设$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中的任意$r$个线性无关的向量，于是对于任意的$\alpha_k(k=1,2,\cdots,s)$，向量组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r},\alpha_k$线性相关，否则这向量组的秩大于$r$.

又向量组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性无关，所以$\alpha_k$可以由$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性表出

由定义，这就证明了$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots\alpha_{i_r}$是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的一个最大线性无关组