十年（2014－2023）年高考真题分项汇编

导数选择、填空

目录

题型一：导数的概念及其几何意义

一、选择题

1．（2021 年新高考Ⅰ卷・第 7 题）若过点 (a,b) 可以作曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的两条切线，则

（　　）

A． $\mathrm{e}^b<a$　　B． $\mathrm{e}^a<b$

C． $0<a<\mathrm{e}^b$　　D． $0<b<\mathrm{e}^a$

【答案】D

解析：在曲线 $y=e^x$ 上任取一点 $P(t,e^t)$，对函数 $y=e^x$ 求导得 $y'=\mathrm{e}^x$，

所以，曲线 $y=e^x$ 在点 P 处的切线方程为 $y-e^t=e^t(x-t)$，即 $y=e^tx+(1-t)e^t$，

由题意可知，点 (a,b) 在直线 $y=e^tx+(1-t)e^t$ 上，可得 $b=ae^t+(1-t)e^t=(a+1-t)e^t$，

令 $f(t)=(a+1-t)e^t$，则 $f'(t)=(a-t)e^t$．

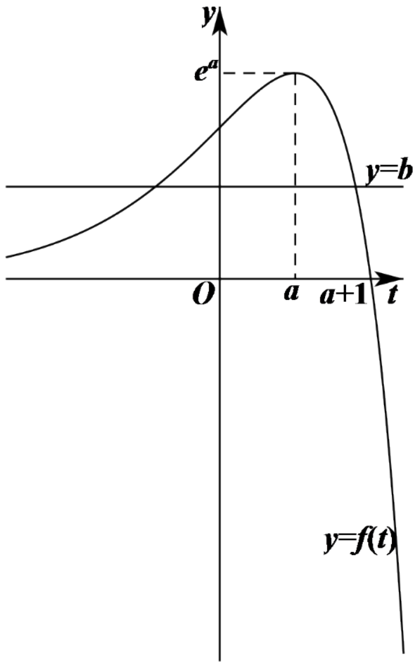
当 $t<a$ 时，$f'(t)>0$，此时函数 $f(t)$ 单调递增，

当 $t>a$ 时，$f'(t)<0$，此时函数 $f(t)$ 单调递减，

所以，$f(t)_{\max}=f(a)=e^a$，

由题意可知，直线 $y=b$ 与曲线 $y=f(t)$ 的图象有两个交点，则 $b<f(t)_{\max}=e^a$，

当 $t<a+1$ 时，$f(t)>0$，当 $t>a+1$ 时，$f(t)<0$，作出函数 $f(t)$ 的图象如下图所示：



由图可知，当 $0<b<e^a$ 时，直线 $y=b$ 与曲线 $y=f\left(t\right)$ 的图象有两个交点, 故选 D.

2．(2020 年高考课标Ⅰ卷理科·第 0 题) 函数 $f(x)=x^4-2x^3$ 的图像在点 $(1,\ f(1))$ 处的切线方程为

(　　)

A． $y=-2x-1$　　　　B． $y=-2x+1$　　C． $y=2x-3$　　　　D． $y=2x+1$

【答案】B

【解析】Q $f\left(x\right)=x^4-2x^3$， $\therefore f'\left(x\right)=4x^3-6x^2$， $\therefore f\left(1\right)=-1$， $f'\left(1\right)=-2$，

因此，所求切线的方程为 $y+1=-2\left(x-1\right)$，即 $y=-2x+1$．

故选：B.

【点睛】本题考查利用导数求解函数图象的切线方程，考查计算能力，属于基础题

3．(2020 年高考课标III卷理科·第 0 题) 若直线 *l* 与曲线 $y=\sqrt{x}$ 和 $x^2+y^2=\dfrac{1}{5}$ 都相切，则 *l* 的方程为

(　　)

A． $y=2x+1$　　B． $y=2x+\dfrac{1}{2}$　　　C． $y=\dfrac{1}{2}x+1$　　　D． $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

【答案】D

解析：设直线 l 在曲线 $y=\sqrt{x}$ 上的切点为 $\left(x_0,\sqrt{x_0}\right)$，则 $x_0>0$，

函数 $y=\sqrt{x}$ 的导数为 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，则直线 l 的斜率 $k=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$，

设直线l的方程为$y-\sqrt{x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}\left(x-x_0\right)$，即$x-2\sqrt{x_0}y+x_0=0$，

由于直线l与圆$x^2+y^2=\frac{1}{5}$相切，则$\frac{x_0}{\sqrt{1+4x_0}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$，

两边平方并整理得$5x_0^2-4x_0-1=0$，解得$x_0=1$，$x_0=-\frac{1}{5}$（舍），

则直线l的方程为$x-2y+1=0$，即$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

故选：D.

【点睛】本题主要考查了导数的几何意义的应用以及直线与圆的位置的应用，属于中档题.

4．(2019·全国III·理·第6题)已知曲线$y=ae^x+x\ln x$在点$\left(1,ae\right)$处的切线方程为$y=2x+b$，则 （　　）

A．$a=e,b=-1$　　B．$a=e,b=1$　　C．$a=e^{-1},b=1$　　D．$a=e^{-1},b=-1$

【答案】D

【解析】由$y'=ae^x+\ln x+1$，根据导数的几何意义易得$y'|_{x=1}=ae+1=2$，解得$a=e^{-1}$，从而得到切点坐标为$(1,1)$，将其代入切线方程$y=2x+b$，得$2+b=1$，解得$b=-1$，故选D.

【点评】准确求导是进一步计算的基础，本题易因为导数的运算法则掌握不熟，二导致计算错误．求导要“慢”，计算要准，是解答此类问题的基本要求．另外对于导数的几何意义要注意给定的点是否为切点，若为切点，牢记三条：①切点处的导数即为切线的斜率；②切点在切线上；③切点在曲线上。

5．(2018年高考数学课标卷Ⅰ(理)·第5题)设函数$f(x)=x^3+\left(a-1\right)x^2+ax$，若$f(x)$为奇函数，则曲线$y=f(x)$在点$\left(0,0\right)$处的切线方程为　（　　）

A．$y=-2x$　　B．$y=-x$　　C．$y=2x$　　D．$y=x$

【答案】D

解析：函数$f(x)=x^3+\left(a-1\right)x^2+ax$，若$f(x)$为奇函数，可得$a=1$，所以函数$f(x)=x^3+x$，可得$f'(x)=3x^2+1$，曲线$y=f(x)$在点$\left(0,0\right)$处的切线的斜率为：1，则曲线$y=f(x)$在点$\left(0,0\right)$处的切线方程为：$y=x$，故选D.

6．(2014高考数学课标2理科·第8题)设曲线y=ax−ln(x+1)在点(0,0)处的切线方程为y=2x，则a=

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

【答案】D

解析：因为$y'=a-\frac{1}{x+1}$，所以切线的斜率为$a-1=2$，解得$a=3$，选D

7．(2014高考数学大纲理科·第7题)曲线$y=xe^{x-1}$在点(1,1)处切线的斜率等于 （　　）

A．2e　　B．e　　C．2　　D．1

【答案】C

解析：因为$y=xe^{x-1}$，所以$y'=e^{x-1}+xe^{x-1}=e^{x-1}(x+1)$，根据导数的几何意义可知曲线$y=xe^{x-1}$在

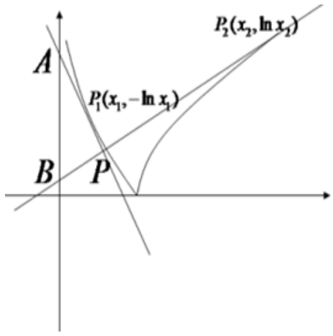
点 $(1,1)$ 处切线的斜率 $k=y'|_{x=1}=e^{1-1}(1+1)=2$，故选 C.

8．(2016 高考数学四川理科·第 9 题) 设分别是函数 $f(x)=\begin{cases}-\ln x,(0<x<1\\ \ln x,(x>1)\end{cases}$ 图像上的点 P_1,P_2 处的切线，l_1 与 l_2 互相垂直并相交于点 P，且 l_1,l_2 分别与 y 轴相交于点 A,B，则 ΔPAB 的面积的取值范围为（　　）

A．$(0,1)$　　B．$(0,2)$　　C．$(0,+\infty)$　　D．$(1,+\infty)$

【答案】A

【解析】由题设知：不妨设 P_1,P_2 点的坐标分别为：$P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$，其中 $0<x_1<1<x_2$，



则由于 l_1,l_2 分别是点 P_1,P_2 处的切线，直线 l_1,l_2 的斜率分别为 k_1,k_2 而 $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x},0<x<1\\ \dfrac{1}{x},x>1\end{cases}$，

得：l_1 的斜率 k_1 为 $-\dfrac{1}{x_1}$，l_2 的斜率 k_2 为 $\dfrac{1}{x_2}$；又 l_1 与 l_2 垂直，且 $0<x_1<x_2$，

由题意易知 $k_1k_2=-1\Rightarrow -\dfrac{1}{x_1}\cdot\dfrac{1}{x_2}=-1\Rightarrow x_1x_2=1$

$l_1:y+\ln x_1=-\dfrac{1}{x_1}(x-x_1)\Rightarrow A(0,1-\ln x_1)$，$l_2:y-\ln x_2=\dfrac{1}{x_2}(x-x_2)\Rightarrow B(0,\ln x_2-1)$

则 $|AB|=2-\ln x_1-\ln x_2=2-\ln x_1x_2=2$

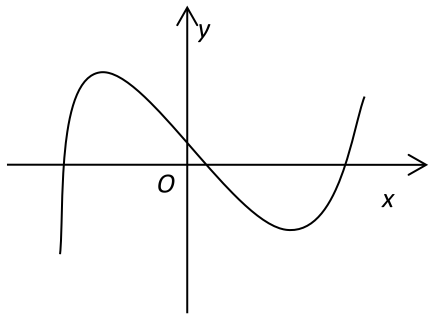
直线联立 l_1,l_2 的方程可得 $x_P=\dfrac{2}{x_1+x_2}=\dfrac{2}{x_1+\dfrac{1}{x_1}}<1$

当且仅当 $0<x<1$ 即 $x_1=1$ 时等号成立

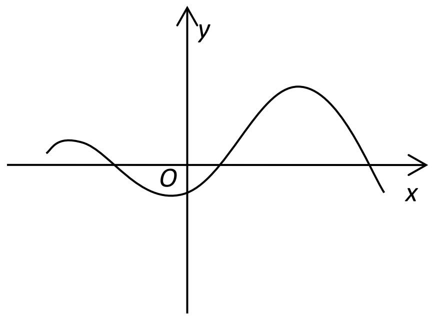
而 $0<x<1$，所以 $S_{\Delta PAB}=\dfrac{1}{2}\times|AB|\times x_P=x_P$

所以 ΔPAB 的面积的取值范围 $(0,1)$.

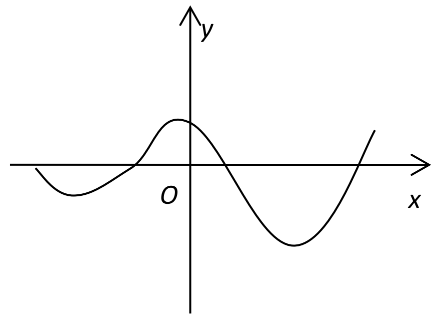
9．(2017 年高考数学浙江文理科·第 7 题) 函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示，则函数 $y=f(x)$ 的图象可能是



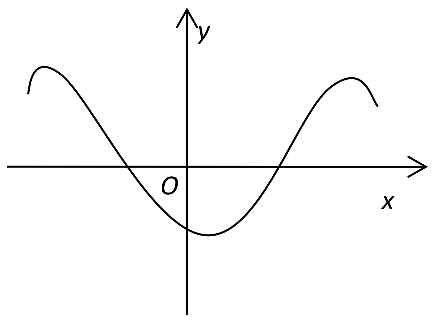
（第 7 题图）



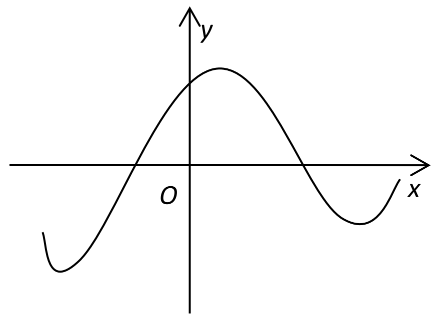
A



B



C



D

【答案】 D

【解析】(定义法)导数大于零,原函数递增,导数小于零,原函数递减,对照导函数图象和原函数图象．故选 D．

(特例法)取导函数 $f'(x)=(x+2)(x-1)(x-4)$,勾画原函数 $f(x)$ 图象．故选 D．

二、填空题

1．(2021 年高考全国甲卷理科・第 0 题)曲线 $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ 在点 $(-1,-3)$ 处的切线方程为__________.

【答案】$5x-y+2=0$

解析：由题，当 $x=-1$ 时， $y=-3$，故点在曲线上.

求导得： $y'=\dfrac{2(x+2)-(2x-1)}{(x+2)^2}=\dfrac{5}{(x+2)^2}$，所以 $y'|_{x=-1}=5$.

故切线方程为 $5x-y+2=0$.

故答案为： $5x-y+2=0$.

2．(2022 新高考全国 II 卷·第 14 题) 曲线 $y=\ln|x|$ 过坐标原点的两条切线的方程为____________，____________.

【答案】①. $y=\frac{1}{e}x$　　②. $y=-\frac{1}{e}x$

解析：因为 $y=\ln|x|$，

当 $x>0$ 时 $y=\ln x$，设切点为 $\left(x_0,\ln x_0\right)$，由 $y'=\frac{1}{x}$，所以 $y'|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$，所以切线方程为

$y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}\left(x-x_0\right)$，

又切线过坐标原点，所以 $-\ln x_0=\frac{1}{x_0}\left(-x_0\right)$，解得 $x_0=e$，所以切线方程为 $y-1=\frac{1}{e}(x-e)$，即 $y=\frac{1}{e}x$；

当 $x<0$ 时 $y=\ln(-x)$，设切点为 $\left(x_1,\ln\left(-x_1\right)\right)$，由 $y'=\frac{1}{x}$，所以 $y'|_{x=x_1}=\frac{1}{x_1}$，所以切线方程为

$y-\ln\left(-x_1\right)=\frac{1}{x_1}\left(x-x_1\right)$，

又切线过坐标原点，所以 $-\ln\left(-x_1\right)=\frac{1}{x_1}\left(-x_1\right)$，解得 $x_1=-e$，所以切线方程为 $y-1=\frac{1}{-e}(x+e)$，

即 $y=-\frac{1}{e}x$；

故答案为：$y=\frac{1}{e}x$；$y=-\frac{1}{e}x$

3．(2022 新高考全国 I 卷·第 15 题) 若曲线 $y=(x+a)e^x$ 有两条过坐标原点的切线，则 a 的取值范围是________________.

【答案】$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$

解析：∵ $y=(x+a)e^x$，∴ $y'=(x+1+a)e^x$，

设切点为 $\left(x_0,y_0\right)$，则 $y_0=\left(x_0+a\right)e^{x_0}$，切线斜率 $k=\left(x_0+1+a\right)e^{x_0}$，

切线方程为：$y-\left(x_0+a\right)e^{x_0}=\left(x_0+1+a\right)e^{x_0}\left(x-x_0\right)$，

∵切线过原点，∴ $-\left(x_0+a\right)e^{x_0}=\left(x_0+1+a\right)e^{x_0}\left(-x_0\right)$，

整理得：$x_0^2+ax_0-a=0$，

∵切线有两条，∴ $\Delta=a^2+4a>0$，解得 $a<-4$ 或 $a>0$，

∴ a 的取值范围是 $(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$，

故答案为：$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$

4．(2019・全国Ⅰ・理・第 13 题) 曲线 $y=3(x^2+x)e^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为______________.

【答案】答案：$y=3x$

解析：$f(x)=3(x^2+x)e^x$, $f'(x)=3(2x+1)e^x+3(x^2+x)e^x=3(x^2+3x+1)e^x$, $f'(0)=3$，

所以曲线 $y=3(x^2+x)e^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y=3x$.

5．(2019・江苏・第 11 题) 在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 在曲线 $y=\ln x$ 上，且该曲线在点 A 处的切线经过点 $(-\mathrm{e},-1)$（e 为自然对数的底数)，则点 A 的坐标是______.

【答案】$(e,1)$

【解析】设切点 $A(x_0,\ln x_0)$，因为 $y'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，所以切线的斜率 $k=\dfrac{1}{x_0}$，

又切线过点 $(-e,-1)$，所以 $k=\dfrac{\ln x_0+1}{x_0+e}=\dfrac{1}{x_0}$，即 $x_0\ln x_0=e$，解得 $x_0=e$，则点 A 的坐标是 $(e,1)$.

6．(2018 年高考数学课标Ⅲ卷(理)・第 14 题) 曲线 $y=(ax+1)e^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线的斜率为 -2，则 $a=$_________.

【答案】-3

解析：记 $f(x)=(ax+1)e^x$，则 $f'(x)=e^x(ax+1+a)$

依题意有 $\begin{cases}f(0)=1\\f'(0)=-2\end{cases}$，即 $\begin{cases}1\cdot e^0=1\\e^0(a+1)=-2\end{cases}$，解得 $a=-3$.

7．(2018 年高考数学课标Ⅱ卷(理)・第 13 题) 曲线 $y=2\ln(x+1)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为__________.

【答案】$2x-y=0$

解析：因为 $y'=\dfrac{2}{x+1}$，所以 $k=2$，切线方程为 $y=2x$，即 $2x-y=0$.

8．(2014 高考数学江西理科・第 14 题) 若曲线 $y=e^{-x}$ 上点 P 处的切线平行于直线 $2x+y+1=0$，则点 P 的坐标是________.

【答案】$(-\ln 2,2)$

分析：设切点 $P(a,b)$，则由 $y'=-e^{-x}$ 得：$k=-e^{-a}=-2, e^{-a}=2, a=-\ln 2, b=e^{-a}=2$，所以点 P 的坐标是 $(-\ln 2,2)$.

9．(2014 高考数学广东理科・第 10 题) 曲线 $y=e^{-5x}+2$ 在点 $(0,3)$ 处的切线方程为________________

【答案】答案：$y=-5x+3$.

解析：$y'=-5e^{-5x}, y'|_{x=0}=-5$，故切线方程为 $y=-5x+3$. 本题易错点在符合函数求导忘记乘以 -5.

10．(2014 高考数学江苏・第 11 题) 在平面直角坐标系 xOy 中，若曲线 $y=ax^2+\dfrac{b}{x}$（a，b 为常数）过点 $P(2,-5)$，且该曲线在点 P 处的切线与直线 $7x+2y+3=0$ 平行，则 $a+b$ 的值是________.

【答案】-3

解析：曲线 $y=ax^2+\frac{b}{x}$ 过点 $P(2,-5)$，则 $4a+\frac{b}{2}=-5$ ①，

又 $y'=2ax-\frac{b}{x^2}$，所以 $4a-\frac{b}{4}=-\frac{7}{2}$ ②，由①、②解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=-2.\end{cases}$ 所以 $a+b=-3$.

11．(2015 高考数学陕西理科・第 15 题) 设曲线 $y=e^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y=\frac{1}{x}(x>0)$ 上点 P 处的切线垂直，则 P 的坐标为_______.

【答案】$(1,1)$

解析：因为 $y=e^x$，所以 $y'=e^x$，所以曲线 $y=e^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线的斜率 $k_1=y'|_{x=0}=e^0=1$，设 P 的坐标为 (x_0,y_0)（$x_0>0$），则 $y_0=\frac{1}{x_0}$，因为 $y=\frac{1}{x}$，所以 $y'=-\frac{1}{x^2}$，所以曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点 P 处的切线的斜率 $k_2=y'|_{x=x_0}=-\frac{1}{x_0^2}$，因为 $k_1\cdot k_2=-1$，所以 $-\frac{1}{x_0^2}=-1$，即 $x_0^2=1$，解得 $x_0=\pm1$，因为 $x_0>0$，所以 $x_0=1$，所以 $y_0=1$，即 P 的坐标是 $(1,1)$，所以答案应填：$(1,1)$.

12．(2016 高考数学课标III卷理科・第 15 题) 已知 $f(x)$ 为偶函数, 当 $x<0$ 时, $f(x)=\ln(-x)+3x$, , 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,-3)$ 处的切线方程是______________.

【答案】$y=-2x-1$

【解析】当 $x>0$ 时，$-x<0$，则 $f(-x)=\ln x-3x$. 又因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(x)=f(-x)=\ln x-3x$，所以 $f'(x)=\frac{1}{x}-3$，则切线斜率为 $f'(1)=-2$，所以切线方程为 $y+3=-2(x-1)$，即 $y=-2x-1$.

13．(2016 高考数学课标 II 卷理科・第 16 题) 若直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=\ln x+2$ 的切线，也是曲线 $y=\ln(x+1)$ 的切线，则 $b=$ _________.

【答案】$b=1-\ln 2$

【解析】设直线 $y=kx+b$ 与曲线 $y=\ln x+2$ 的切点为 $(m,mk+b)$，与曲线 $y=\ln(x+1)$ 的切点为 $(n,\ nk+b)$ 则 $\begin{cases}mk+b=\ln m+2\\k=\frac{1}{m}\\nk+b=\ln(n+1)\\\frac{1}{n+1}=k\end{cases}$，所以 $\begin{cases}1+b=-\ln k+2\\1+b-k=-\ln k\end{cases}$

所以 $\begin{cases}1+b=-\ln k+2\\1+b-k=-\ln k\end{cases}$，所以 $\begin{cases}k=2\\b=1-\ln 2\end{cases}$，所以 $b=1-\ln 2$.

题型二：导数与函数的单调性

1．(2023 年新课标全国 II 卷・第 6 题) 已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递增，则 a

的最小值为 （　　）.

A. e^2　　B. e　　C. e^{-1}　　D. e^{-2}

【答案】C

解析：依题可知，$f'(x)=ae^x-\frac{1}{x}\geq 0$ 在 $(1,2)$ 上恒成立，显然 $a>0$，所以 $xe^x\geq\frac{1}{a}$，

设 $g(x)=xe^x, x\in(1,2)$，所以 $g'(x)=(x+1)e^x>0$，所以 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增，

$g(x)>g(1)=e$，故 $e\geq\frac{1}{a}$，即 $a\geq\frac{1}{e}=e^{-1}$，即 a 的最小值为 e^{-1}.

故选：C.

2．（2015 高考数学福建理科·第 10 题）若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=-1$，其导函数 $f'(x)$ 满足 $f'(x)>k>1$，则下列结论中一定错误的是（　　）

A. $f\left(\frac{1}{k}\right)<\frac{1}{k}$　　B. $f\left(\frac{1}{k}\right)>\frac{1}{k-1}$

C. $f\left(\frac{1}{k-1}\right)<\frac{1}{k-1}$　　D. $f\left(\frac{1}{k-1}\right)>\frac{k}{k-1}$

【答案】C

解析：由已知条件，构造函数 $g(x)=f(x)-kx$，则 $g'(x)=f'(x)-k>0$，故函数 $g(x)$ 在 R 上单调递增，且 $\frac{1}{k-1}>0$，故 $g(\frac{1}{k-1})>g(0)$，所以 $f(\frac{1}{k-1})-\frac{k}{k-1}>-1$，$f(\frac{1}{k-1})>\frac{1}{k-1}$，所以结论中一定错误的是 C，选项 D 无法判断；构造函数 $h(x)=f(x)-x$，则 $h'(x)=f'(x)-1>0$，所以函数 $h(x)$ 在 R 上单调递增，且 $\frac{1}{k}>0$，所以 $h(\frac{1}{k})>h(0)$，即 $f(\frac{1}{k})-\frac{1}{k}>-1$，$f(\frac{1}{k})>\frac{1}{k}-1$，选项 A, B 无法判断，故选 C.

3．（2014 高考数学大纲理科·第 16 题）若函数 $f(x)=\cos 2x+a\sin x$ 在区间 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$ 是减函数，则 a 的取值范围是________.

【答案】$(-\infty,2]$

解析：因为 $f'(x)=-2\sin 2x+a\cos x=-4\sin x\cos x+a\cos x=\cos x(-4\sin x+a)$，而 $x\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减，所以 $f'(x)<0$ 在 $x\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$ 恒成立，即 $\cos x(-4\sin x+a)<0$ 恒成立，因为 $\cos x>0$，所以 $-4\sin x+a<0$ 即 $a<4\sin x$ 在 $x\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$ 恒成立，从而 $a<(4\sin x)_{\min}$，因为 $y=4\sin x(\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2})$ 的值域为 $(4\sin\frac{\pi}{6},4\sin\frac{\pi}{2})$ 即 $(2,4)$，所以 $a\leq 2$.