2024届北京市第二十中学高三第一次调研测试数学试卷

注意事项:
1．答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2．答题时请按要求用笔。
3．请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
4．作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5．保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

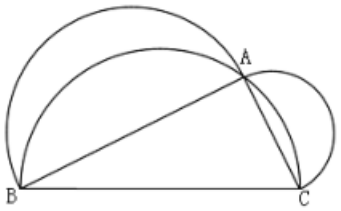
一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．设函数$f\left(x\right)=\ln\left(x-1\right)$的定义域为$D$，命题$p$：$\forall x\in D$，$f\left(x\right)\le x$的否定是（　　）

A．$\forall x\in D$，$f\left(x\right)>x$　　**B**．$\exists x_0\in D$，$f\left(x_0\right)\le x_0$

C．$\forall x\notin D$，$f\left(x\right)>x$　　**D**．$\exists x_0\in D$，$f\left(x_0\right)>x_0$

2．如图是来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形，此图由三个半圆构成，三个半圆的直径分别为直角三角形ABC的斜边BC，直角边AB,AC.已知以直角边AC,AB为直径的半圆的面积之比为$\frac{1}{4}$，记$\angle ABC=\alpha$，则$\sin 2\alpha=$（　　）



A．$\frac{9}{25}$　　**B**．$\frac{12}{25}$　　**C**．$\frac{3}{5}$　　**D**．$\frac{4}{5}$

3．已知复数$\frac{2-ai}{i}=1-bi$，其中a，$b\in R$，i是虚数单位，则$\left|a+bi\right|=$（　）

A．$-1+2i$　　**B**．1　　**C**．5　　**D**．$\sqrt{5}$

4．已知定义在R上的偶函数$f(x)$，当$x\ge 0$时，$f(x)=e^x-\frac{x^2+2x}{2}$，设$a=f(\ln\sqrt{2}),b=f(\sqrt{2}),c=f(\ln\frac{\sqrt{2}}{2})$，则（　　）

A．$b>a>c$　　**B**．$b>a=c$　　**C**．$a=c>b$　　**D**．$c>a>b$

5．已知函数$f(x)=x^2-2x$，集合$A=\{x\mid f(x)\le 0\}$，$B=\left\{x\mid f'(x)\le 0\right\}$，则$A\cap B=$（　　）

A．[-1,0]　　**B**．[-1,2]

C．[0,1]　　**D**．$(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$

6．设递增的等比数列$\{a_n\}$的前 *n* 项和为S_n，已知$S_4=\frac{40}{3}$，$3a_4-10a_3+3a_2=0$，则$a_4=$（　　）

A．9　　**B．27**　　**C．81**　　**D．**$\frac{8}{3}$

7．已知R为实数集，$A=\{x\mid x^2-1\le 0\}$，$B=\left\{x\mid \frac{1}{x}\ge 1\right\}$，则$A\cap(\complement_R B)=$（　　）

A．$\{x\mid -1<x\le 0\}$　　**B．**$\{x\mid 0<x\le 1\}$　　**C．**$\{x\mid -1\le x\le 0\}$　　**D．**$\{x\mid -1\le x\le 0\text{或}x=1\}$

8．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1, a_n-a_{n-1}=n\ (n\ge 2)$,则数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=$(　　)

A．$\frac{1}{2}n(n+1)$　　**B．**$\frac{1}{2}n(3n-1)$　　**C．**n^2-n+1　　**D．**n^2-2n+2

9．在ΔABC中，点 *D* 是线段 *BC* 上任意一点，$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则$\lambda+\mu=$（　　）

A．$-\frac{1}{2}$　　**B．-2**　　**C．**$\frac{1}{2}$　　**D．2**

10．函数$f(x)=ax-2$与$g(x)=e^x$的图象上存在关于直线$y=x$对称的点，则a的取值范围是（　　）

A．$\left(-\infty,\frac{e}{4}\right]$　　**B．**$\left(-\infty,\frac{e}{2}\right]$　　**C．**$(-\infty,e]$　　**D．**$\left(-\infty,e^2\right]$

11．已知双曲线 *C* 的两条渐近线的夹角为 60°，则双曲线 *C* 的方程不可能为（　　）

A．$\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{5}=1$　　**B．**$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{15}=1$　　**C．**$\frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{12}=1$　　**D．**$\frac{y^2}{21}-\frac{x^2}{7}=1$

12．已知$f(x)=\begin{cases}2^x-1, x\ge 0\\ -x, x<0\end{cases}$，则$f\left[f\left(\log_2\frac{1}{3}\right)\right]=$（　　）

A．2　　**B．**$\frac{2}{3}$　　**C．**$-\frac{2}{3}$　　**D．3**

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知直线$x-y+a=0$与圆心为C的圆$x^2+y^2+2x-4y-4=0$相交于A,B两点，且$AC\perp BC$，则实数a的值为_____.

14．学校艺术节对同一类的A,B,C,D四项参赛作品，只评一项一等奖，在评奖揭晓前，甲、乙、丙、丁四位同学对这四项参赛作品预测如下：甲说：“A作品获得一等奖”；乙说：“C作品获得一等奖”；丙说：“B，D两项作品未获得一等奖”；丁说：“是A或D作品获得一等奖”，若这四位同学中只有两位说的话是对的，则获得一等奖的作品是___.

15．已知$|\vec{a}|=2\sqrt{2}$，$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影为$\sqrt{6}$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为_____.

16．已知函数$f(x)=\ln\frac{x-1}{1-ax}$为奇函数，则$a=$_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（12 分）已知函数 $f(x)=a(x+1)\ln(x+1)-x^2-ax(a>0)$ 是减函数.

（1）试确定 a 的值；

（2）已知数列 $\{a_n\}$ $a_n=\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}$ $T_n=a_1a_2a_3\cdots a_n(n\in N^*)$，求证：$\ln[(n+2)T_n]<1-\dfrac{n}{2}$.

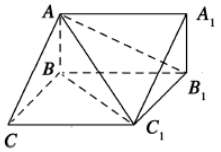
18.（12 分）设函数 $f(x)=|x+2|-|2x-2|$.

（1）解不等式 $f(x)\geq 2x-1$；

（2）记 $f(x)$ 的最大值为 M，若实数 a、b、c 满足 $a+b+c=M$，求证：

$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geq 3\sqrt{2}$.

19.（12 分）在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=2$，$BC=BB_1=4$，$AC=AB_1=2\sqrt{5}$，且 $\angle BCC_1=60°$.



（1）求证：平面 $ABC_1\perp$ 平面 BCC_1B_1；

（2）设二面角 $C-AC_1-B$ 的大小为 θ，求 $\sin\theta$ 的值.

20.（12 分） [选修 4-4：极坐标与参数方程]

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos\alpha\\ y=\sqrt{2}\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 是参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$.

（1）求曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的直角坐标方程；

（2）若射线 $\theta=\beta\left(0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 与曲线 C_1 交于 O，A 两点，与曲线 C_2 交于 O，B 两点，求 $|OA|+|OB|$ 取最大值时 $\tan\beta$ 的值

21.（12 分）已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，满足 $a_{n+1}^2=2S_n+n+4$，a_2-1，a_3，a_7，恰为等比数列 $\{b_n\}$ 的前 3 项.

（1）求数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列$\left\{\frac{nb_n}{a_n a_{n+1}}\right\}$的前$n$项和为$T_n$；若对$\forall n\in N^*$均满足$T_n>\frac{m}{2020}$，求整数$m$的最大值；

（3）是否存在数列$\{c_n\}$满足等式$\sum_{i=1}^{n}(a_i-1)c_{n+1-i}=2^{n+1}-n-2$成立，若存在，求出数列$\{c_n\}$的通项公式；若不存在，请说明理由.

22.（10分）在$\triangle ABC$中，角A、B、C所对的边分别为a、b、c，且$\cos 2C+3\cos C-1=0$.

（1）求角C的大小；

（2）若$b=3a$，$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}\sin A\sin B$，求$\sin A$及c的值.

参考答案

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

根据命题的否定的定义，全称命题的否定是特称命题求解.

【详解】

因为p：$\forall x\in D$，$f(x)\le x$是全称命题，

所以其否定是特称命题，即$\exists x_0\in D$，$f(x_0)>x_0$.

故选：D

【点睛】

本题主要考查命题的否定，还考查了理解辨析的能力，属于基础题.

2、D

【解析】

由半圆面积之比，可求出两个直角边AB,AC的长度之比，从而可知$\tan\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{2}$，结合同角三角函数的基本关系，即可求出$\sin\alpha,\cos\alpha$，由二倍角公式即可求出$\sin 2\alpha$.

【详解】

解：由题意知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，以 AB 为直径的半圆面积 $S_1 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2$，

以 AC 为直径的半圆面积 $S_2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2$，则 $\frac{S_2}{S_1} = \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{1}{4}$，即 $\tan\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$.

由 $\begin{cases} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \\ \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2} \end{cases}$ ，得 $\begin{cases} \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$ ，所以 $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\times\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{4}{5}$.

故选:D.

【点睛】

本题考查了同角三角函数的基本关系，考查了二倍角公式.本题的关键是由面积比求出角的正切值.

3、D

【解析】

试题分析：由 $\frac{2-ai}{i} = 1-bi$,得 $2-ai = i(1-bi) = b+i, \therefore a=-1, b=2$,则

$a+bi = -1+2i, \therefore |a+bi| = |-1+2i| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$，故选 D.

考点：1、复数的运算；2、复数的模.

4、B

【解析】

根据偶函数性质，可判断 a, c 关系；由 $x \geq 0$ 时， $f(x) = e^x - \frac{x^2+2x}{2}$，求得导函数，并构造函数 $g(x) = e^x - x - 1$，

由 $g'(x)$ 进而判断函数 $f(x)$ 在 $x \geq 0$ 时的单调性，即可比较大小.

【详解】

$f(x)$ 为定义在 R 上的偶函数，

所以 $c = f\left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\ln\sqrt{2}\right)$

所以 $a = c$;

当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = e^x - \frac{x^2+2x}{2}$，

则 $f'(x) = e^x - x - 1$，

令 $g(x) = e^x - x - 1$

则 $g'(x)=e^x-1$，当 $x\geq 0$ 时，$g'(x)=e^x-1\geq 0$，

则 $g(x)=e^x-x-1$ 在 $x\geq 0$ 时单调递增，

因为 $g(0)=e^0-0-1=0$，所以 $g(x)=e^x-x-1\geq 0$，

即 $f'(x)=e^x-x-1\geq 0$，

则 $f(x)=e^x-\dfrac{x^2+2x}{2}$ 在 $x\geq 0$ 时单调递增，

而 $0<\ln\sqrt{2}<\sqrt{2}$，所以

$f\left(\ln\sqrt{2}\right)<f\left(\sqrt{2}\right)$，

综上可知，$f\left(\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(\ln\sqrt{2}\right)<f\left(\sqrt{2}\right)$

即 $a=c<b$，

故选：B.

【点睛】

本题考查了偶函数的性质应用，由导函数性质判断函数单调性的应用，根据单调性比较大小，属于中档题.

5、C

【解析】

分别求解不等式得到集合 A,B,再利用集合的交集定义求解即可.

【详解】

$A=\{x\,|\,x^2-2x\leq 0\}=\{x\,|\,0\leq x\leq 2\}$，$B=\{x\,|\,2x-2\leqslant 0\}=\{x\,|\,x\leqslant 1\}$，

$\therefore A\cap B=\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 1\}$.

故选 C.

【点睛】

本题主要考查了集合的基本运算,难度容易.

6、A

【解析】

根据两个已知条件求出数列的公比和首项，即得 a_4 的值.

【详解】

设等比数列$\{a_n\}$的公比为q.

由$3a_4-10a_3+3a_2=0$，得$3q^2-10q+3=0$，解得$q=3$或$q=\frac{1}{3}$.

因为$S_4>0$.且数列$\{a_n\}$递增，所以$q=3$.

又$S_4=\frac{a_1(1-3^4)}{1-3}=\frac{40}{3}$，解得$a_1=\frac{1}{3}$，

故$a_4=\frac{1}{3}\times3^3=9$.

故选：A

【点睛】

本题主要考查等比数列的通项和求和公式，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

7、C

【解析】

求出集合A，B，$\complement_R B$，由此能求出$A\cap(\complement_R B)$.

【详解】

$\because R$为实数集，$A=\{x|x^2-1\leq0\}=\{x|-1\leq x\leq1\}$，$B=\{x|\frac{1}{x}\geq1\}=\{x|0<x\leq1\}$，

$\therefore\complement_R B=\{x|x\leq0$或$x>1\}$，

$\therefore A\cap(\complement_R B)=\{x|-1\leq x\leq0\}$.

故选：C.

【点睛】

本题考查交集、补集的求法，考查交集、补集的性质等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

8、A

【解析】

利用数列的递推关系式，通过累加法求解即可.

【详解】

数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_n-a_{n-1}=n(n\geq2,n\in N^*)$，

可得$a_1=1$

$a_2-a_1=2$

$a_3-a_2=3$

$a_4-a_3=4$

…

$a_n-a_{n-1}=n$

以上各式相加可得：

$a_n=1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$，

故选：A.

【点睛】

本题考查数列的递推关系式的应用，数列累加法以及通项公式的求法，考查计算能力.

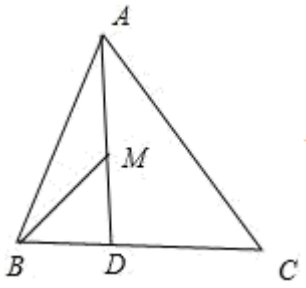
9、A

【解析】

设$\overrightarrow{BD}=k\overrightarrow{BC}$，用$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$表示出$\overrightarrow{BM}$，求出$\lambda,\mu$的值即可得出答案.

【详解】

设$\overrightarrow{BD}=k\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{AC}-k\overrightarrow{AB}$



由$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}$

$\therefore\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}\right)=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{k}{2}\overrightarrow{AB}$

$=\left(-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{k}{2}\overrightarrow{AC}$，

$\therefore\lambda=-\frac{1}{2}-\frac{k}{2},\mu=\frac{k}{2}$，

$\therefore\lambda+\mu=-\frac{1}{2}.$

故选：A

【点睛】

本题考查了向量加法、减法以及数乘运算，需掌握向量加法的三角形法则以及向量减法的几何意义，属于基础题.

10、C

【解析】

由题可知，曲线$f\left(x\right)=ax-2$与$y=\ln x$有公共点，即方程$ax-2=\ln x$有解，可得$a=\dfrac{2+\ln x}{x}$有解，令$h\left(x\right)=\dfrac{2+\ln x}{x}$，则$h'\left(x\right)=\dfrac{-1-\ln x}{x^2}$，对$x$分类讨论，得出$x=\dfrac{1}{e}$时，$h\left(x\right)$取得极大值$h\left(\dfrac{1}{e}\right)=e$，也即为最大值，进而得出结论.

【详解】

解：由题可知，曲线$f\left(x\right)=ax-2$与$y=\ln x$有公共点，即方程$ax-2=\ln x$有解，

即$a=\dfrac{2+\ln x}{x}$有解，令$h\left(x\right)=\dfrac{2+\ln x}{x}$，则$h'\left(x\right)=\dfrac{-1-\ln x}{x^2}$，

则当$0<x<\dfrac{1}{e}$时，$h'\left(x\right)>0$；当$x>\dfrac{1}{e}$时，$h'\left(x\right)<0$，

故$x=\dfrac{1}{e}$时，$h\left(x\right)$取得极大值$h\left(\dfrac{1}{e}\right)=e$，也即为最大值，

当x趋近于0时，$h\left(x\right)$趋近于$-\infty$，所以$a\le e$满足条件.

故选：C.

【点睛】

本题主要考查利用导数研究函数性质的基本方法，考查化归与转化等数学思想，考查抽象概括、运算求解等数学能力，属于难题.

11、C

【解析】

判断出已知条件中双曲线C的渐近线方程，求得四个选项中双曲线的渐近线方程，由此确定选项.

【详解】

两条渐近线的夹角转化为双曲渐近线与x轴的夹角时要分为两种情况．依题意，双曲渐近线与x轴的夹角为30°或60°，双曲线C的渐近线方程为$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$或$y=\pm\sqrt{3}x$.A选项渐近线为$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，B选项渐近线为$y=\pm\sqrt{3}x$，C选项渐近线为$y=\pm\dfrac{1}{2}x$，D选项渐近线为$y=\pm\sqrt{3}x$.所以双曲线$C$的方程不可能为$\dfrac{y^2}{3}-\dfrac{x^2}{12}=1$.

故选：C

【点睛】

本小题主要考查双曲线的渐近线方程，属于基础题.

12、A

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/495003242134011132