

四川省眉山市第一中学 2023 年高三下-第一次调研考试数学试题试卷

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. $\left(\frac{1}{x} + x + y^2\right)^8$ 的展开式中 $x^{-1}y^2$ 的系数是 ()

- A. 160 B. 240 C. 280 D. 320

2. 已知双曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F ，过原点的直线 l 与双曲线 Γ 的左、右两支分别交于 A, B

两点，延长 BF 交右支于 C 点，若 $AF \perp FB, |CF| = 3|FB|$ ，则双曲线 Γ 的离心率是 ()

- A. $\frac{\sqrt{17}}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

3. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，圆 $x^2 + y^2 = b^2$ 与双曲线在第一象限内的交点

为 M ，若 $|MF_1| = 3|MF_2|$ ，则该双曲线的离心率为

- A. 2 B. 3 C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_5 = 7, a_{10} + a_7 = 0$ ，则 $a_3 + a_4 =$ ()

- A. 20 B. 18 C. 16 D. 14

5. 关于函数 $f(x) = \sin|x| + |\cos x|$ 有下述四个结论：()

- ① $f(x)$ 是偶函数； ② $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 上是单调递增函数；
③ $f(x)$ 在 R 上的最大值为 2； ④ $f(x)$ 在区间 $[-2\pi, 2\pi]$ 上有 4 个零点.

其中所有正确结论的编号是 ()

- A. ①②④ B. ①③ C. ①④ D. ②④

6. 若 $x + yi (x, y \in \mathbf{R})$ 与 $\frac{3+i}{1-i}$ 互为共轭复数，则 $x + y =$ ()

- A. 0 B. 3 C. -1 D. 4

7. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ， $B = \{x | y = \lg(1-x)\}$ ，则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{2\}$ B. $\{-1, 0\}$ C. $\{-1\}$ D. $\{-1, 0, 1\}$

8. $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$ 的二项展开式中, x^2 的系数是 ()

- A. 70 B. -70 C. 28 D. -28

9. 设 α, β 为两个平面, 则 $\alpha \parallel \beta$ 的充要条件是

- A. α 内有无数条直线与 β 平行
B. α 内有两条相交直线与 β 平行
C. α, β 平行于同一条直线
D. α, β 垂直于同一平面

10. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 集合 $B = \{x | x - 1 \geq 0\}$, 则 $\complement_{\mathbb{R}}(A \cap B) = ()$.

- A. $(-\infty, 1) \cup [3, +\infty)$ B. $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$
C. $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ D. $(1, 3)$

11. 《周易》是我国古代典籍, 用“卦”描述了天地世间万象变化. 如图是一个八卦图, 包含乾、坤、震、巽、坎、离、艮、兑八卦 (每一卦由三个爻组成, 其中“——”表示一个阳爻, “- - -”表示一个阴爻) 若从八卦中任取两卦, 这两卦的六个爻中恰有两个阳爻的概率为 ()



- A. $\frac{3}{56}$ B. $\frac{3}{28}$ C. $\frac{3}{14}$ D. $\frac{1}{4}$

12. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, 存在两项 a_m, a_n , 使得 $\sqrt{a_m \cdot a_n} = 3a_1$, $a_6 = 2a_5 + 3a_4$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{4}{n}$ 的最小值是 ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. 2 C. $\frac{7}{3}$ D. $\frac{9}{4}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 设 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_1 = 1$, 且 $3S_1, 2S_2, S_3$ 成等差数列, 则 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

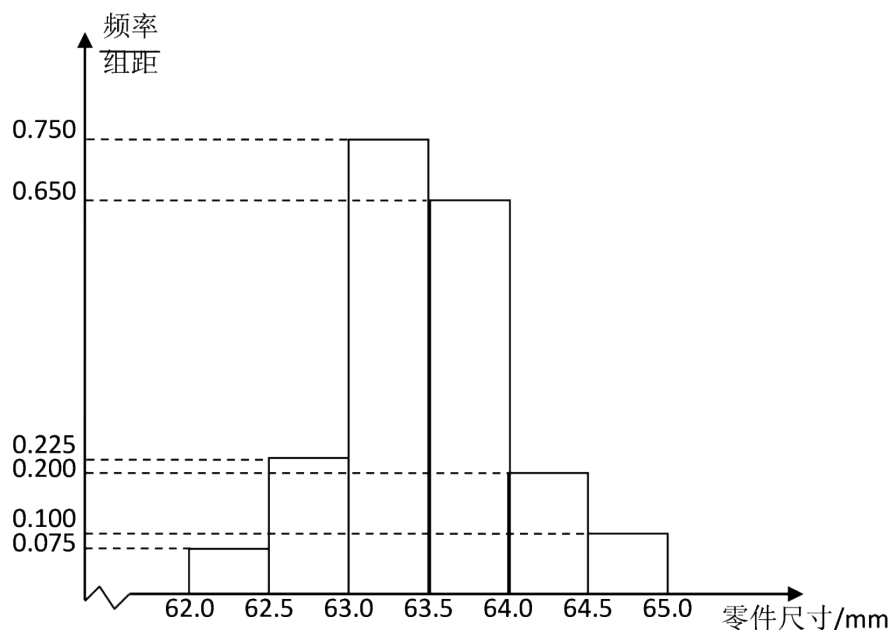
14. 已知函数 $f(x) = e^x + ax - 1$, 若 $x \geq 0, f(x) \geq 0$ 恒成立, 则 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. $(2x-1)^6$ 的展开式中 x^2 的系数为_____ (用具体数据作答).

16. 已知 $x > 0$, $y > 0$, 且 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1$, 若 $x + 2y > m^2 + 2m$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 某企业质量检验员为了检测生产线上零件的质量情况, 从生产线上随机抽取了 80 个零件进行测量, 根据所测量的零件尺寸 (单位: mm), 得到如下的频率分布直方图:



(1) 根据频率分布直方图, 求这 80 个零件尺寸的中位数 (结果精确到 0.01);

(2) 若从这 80 个零件中尺寸位于 $[62.5, 64.5)$ 之外的零件中随机抽取 4 个, 设 X 表示尺寸在 $[64.5, 65]$ 上的零件个数, 求 X 的分布列及数学期望 EX ;

(3) 已知尺寸在 $[63.0, 64.5)$ 上的零件为一等品, 否则为二等品, 将这 80 个零件尺寸的样本频率视为概率. 现对生产线上生产的零件进行成箱包装出售, 每箱 100 个. 企业在交付买家之前需要决策是否对每箱的所有零件进行检验, 已知每个零件的检验费用为 99 元. 若检验, 则将检验出的二等品更换为一等品; 若不检验, 如果有二等品进入买家手中, 企业要向买家对每个二等品支付 500 元的赔偿费用. 现对一箱零件随机抽检了 11 个, 结果有 1 个二等品, 以整箱检验费用与赔偿费用之和的期望值作为决策依据, 该企业是否对该箱余下的所有零件进行检验? 请说明理由.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = x^2 - a \ln x$, $a \in \mathbb{R}$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值, 求 a 的值;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上的最小值;

(3) 在 (1) 的条件下, 若 $h(x) = x^2 - f(x)$, 求证: 当 $1 < x < e^2$ 时, 恒有 $x < \frac{4+h(x)}{4-h(x)}$ 成立.

19. (12 分) 已知 $\{a_n\}$ 为各项均为整数的等差数列, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 a_3 为 $\frac{1}{3}a_2$ 和 a_{13} 的等比中项, $S_7 = 49$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $T_n = \frac{2}{a_1 a_2} + \frac{2}{a_2 a_3} + \frac{2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{2}{a_n a_{n+1}}$, 求最大的正整数 n , 使得 $T_n < \frac{2018}{2019}$.

20. (12 分) 已知点 $M(x_0, y_0)$ 为椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 上任意一点, 直线 $l: x_0 x + 2y_0 y = 2$ 与圆 $(x-1)^2 + y^2 = 6$ 交于 A, B 两点, 点 F 为椭圆 C 的左焦点.

(1) 求证: 直线 l 与椭圆 C 相切;

(2) 判断 $\angle AFB$ 是否为定值, 并说明理由.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{ax^2 + x + 1}{e^x} - 1$.

(1) 证明: 当 $x > 0$ 时, $e^x > x^{\frac{5}{2}}$;

(2) 若函数 $f(x)$ 只有一个零点, 求正实数 a 的值.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = \ln(x+1) + \frac{a}{x+2}$, 其中 a 为实常数.

(1) 若存在 $n > m \geq -1$, 使得 $f(x)$ 在区间 (m, n) 内单调递减, 求 a 的取值范围;

(2) 当 $a = 0$ 时, 设直线 $y = kx - 1$ 与函数 $y = f(x)$ 的图象相交于不同的两点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 证明:

$$x_1 + x_2 + 2 > \frac{2}{k}.$$

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

首先把 $\frac{1}{x} + x$ 看作为一个整体，进而利用二项展开式求得 y^2 的系数，再求 $\left(\frac{1}{x} + x\right)^7$ 的展开式中 x^{-1} 的系数，二者相乘即可求解。

【详解】

由二项展开式的通项公式可得 $\left(\frac{1}{x} + x + y^2\right)^8$ 的第 $r+1$ 项为 $T_{r+1} = C_8^r \left(\frac{1}{x} + x\right)^{8-r} y^{2r}$ ，令 $r=1$ ，则

$T_2 = C_8^1 \left(\frac{1}{x} + x\right)^7 y^2$ ，又 $\left(\frac{1}{x} + x\right)^7$ 的第 $r+1$ 项为 $T_{r+1} = C_7^r \left(\frac{1}{x}\right)^{7-r} x^r = C_7^r x^{2r-7}$ ，令 $r=3$ ，则 $C_7^3 = 35$ ，所以 $x^{-1}y^2$ 的系数是 $35 \times 8 = 280$ 。

故选：C

【点睛】

本题考查二项展开式指定项的系数，掌握二项展开式的通项是解题的关键，属于基础题。

2、D

【解析】

设双曲线的左焦点为 F' ，连接 BF' ， AF' ， CF' ，设 $BF = x$ ，则 $CF = 3x$ ， $BF' = 2a + x$ ， $CF' = 3x + 2a$ ， $Rt\triangle CBF'$ 和 $Rt\triangle FBF'$ 中，利用勾股定理计算得到答案。

【详解】

设双曲线的左焦点为 F' ，连接 BF' ， AF' ， CF' ，

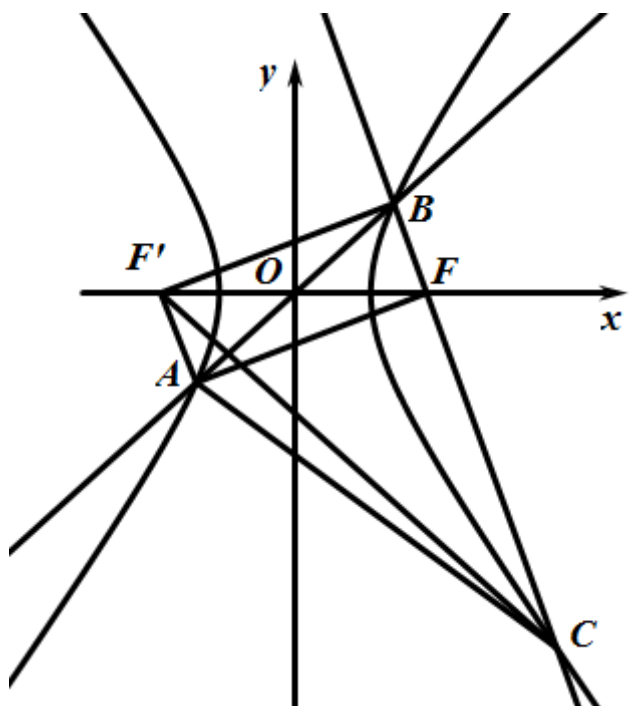
设 $BF = x$ ，则 $CF = 3x$ ， $BF' = 2a + x$ ， $CF' = 3x + 2a$ ，

$AF \perp FB$ ，根据对称性知四边形 $AFBF'$ 为矩形，

$Rt\triangle CBF'$ 中： $CF'^2 = CB^2 + BF'^2$ ，即 $(3x + 2a)^2 = (4x)^2 + (2a + x)^2$ ，解得 $x = a$ ；

$Rt\triangle FBF'$ 中： $FF'^2 = BF^2 + BF'^2$ ，即 $(2c)^2 = a^2 + (3a)^2$ ，故 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{5}{2}$ ，故 $e = \frac{\sqrt{10}}{2}$ 。

故选：D。



【点睛】

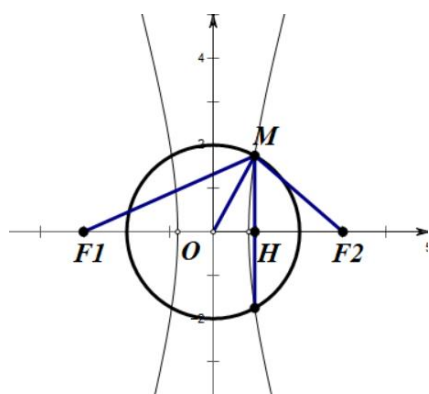
本题考查了双曲线离心率，意在考查学生的计算能力和综合应用能力.

3、D

【解析】

本题首先可以通过题意画出图像并过 M 点作 F_1F_2 垂线交 F_1F_2 于点 H ，然后通过圆与双曲线的相关性质判断出三角形 OMF_2 的形状并求出高 MH 的长度， MH 的长度即 M 点纵坐标，然后将 M 点纵坐标代入圆的方程即可得出 M 点坐标，最后将 M 点坐标代入双曲线方程即可得出结果。

【详解】



根据题意可画出以上图像，过 M 点作 F_1F_2 垂线并交 F_1F_2 于点 H ，

因为 $|MF_1| = 3|MF_2|$ ， M 在双曲线上，

所以根据双曲线性质可知， $|MF_1| - |MF_2| = 2a$ ，即 $3|MF_2| - |MF_2| = 2a$ ， $|MF_2| = a$ ，

因为圆 $x^2 + y^2 = b^2$ 的半径为 b ， OM 是圆 $x^2 + y^2 = b^2$ 的半径，所以 $OM = b$ ，

因为 $OM = b$ ， $|MF_2| = a$ ， $OF_2 = c$ ， $a^2 + b^2 = c^2$ ，

所以 $\angle OMF_2 = 90^\circ$ ，三角形 OMF_2 是直角三角形，

因为 $MH \perp OF_2$ ，所以 $OF_2' \cdot MH = OM' \cdot MF_2$ ， $MH = \frac{ab}{c}$ ，即 M 点纵坐标为 $\frac{ab}{c}$ ，

将 M 点纵坐标代入圆的方程中可得 $x^2 + \frac{a^2 b^2}{c^2} = b^2$ ，解得 $x = \frac{b^2}{c}$ ， $M\left(\frac{b^2}{c}, \frac{ab}{c}\right)$ ，

将 M 点坐标代入双曲线中可得 $\frac{b^4}{a^2 c^2} - \frac{a^2}{c^2} = 1$ ，

化简得 $b^4 - a^4 = a^2 c^2$ ， $(c^2 - a^2)^2 - a^4 = a^2 c^2$ ， $c^2 = 3a^2$ ， $e = \frac{c}{a} = \sqrt{3}$ ，故选 D。

【点睛】

本题考查了圆锥曲线的相关性质，主要考察了圆与双曲线的相关性质，考查了圆与双曲线的综合应用，考查了数形结合思想，体现了综合性，提高了学生的逻辑思维能力，是难题。

4、A

【解析】

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，再利用基本量法与题中给的条件列式求解首项与公差，进而求得 $a_3 + a_4$ 即可。

【详解】

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，由 $\begin{cases} a_5 = 7, \\ a_{10} + a_7 = 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a_1 + 4d = 7, \\ a_1 + 9d + a_1 + 6d = 0 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a_1 = 15, \\ d = -2 \end{cases}$ ，所以

$$a_3 + a_4 = 2a_1 + 5d = 2 \times 15 + 5 \times (-2) = 20.$$

故选：A

【点睛】

本题主要考查了等差数列的基本量求解，属于基础题。

5、C

【解析】

根据函数 $f(x)$ 的奇偶性、单调性、最值和零点对四个结论逐一分析，由此得出正确结论的编号。

【详解】

$f(x)$ 的定义域为 R 。

由于 $f(-x) = f(x)$ ，所以 $f(x)$ 为偶函数，故①正确。

由于 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) < f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, 所以 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 上不是单调递增函数, 所以②错误.

当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \sin x + |\cos x| = \sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$,

且存在 $x = \frac{\pi}{4}$, 使 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} + \left|\cos \frac{\pi}{4}\right| = \sqrt{2}$.

所以当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \leq \sqrt{2}$;

由于 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $x \in \mathbf{R}$ 时 $f(x) \leq \sqrt{2}$,

所以 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$, 所以③错误.

依题意, $f(0) = \sin|0| + |\cos 0| = 1$, 当 $0 < x \leq 2\pi$ 时,

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ 或 } \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \\ \sin x - \cos x, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases},$$

所以令 $\sin x + \cos x = 0$, 解得 $x = \frac{7\pi}{4}$, 令 $\sin x - \cos x = 0$, 解得 $x = \frac{5\pi}{4}$. 所以在区间 $(0, 2\pi]$, $f(x)$ 有两个零点.

由于 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(x)$ 在区间 $[-2\pi, 0)$ 有两个零点. 故 $f(x)$ 在区间 $[-2\pi, 2\pi]$ 上有 4 个零点. 所以④正确.

综上所述, 正确的结论序号为①④.

故选: C

【点睛】

本小题主要考查三角函数的奇偶性、单调性、最值和零点, 考查化归与转化的数学思想方法, 属于中档题.

6、C

【解析】

计算 $\frac{3+i}{1-i} = 1+2i$, 由共轭复数的概念解得 x, y 即可.

【详解】

Q $\frac{3+i}{1-i} = 1+2i$, 又由共轭复数概念得: $x=1, y=2$,

$\therefore x+y=3$.

故选: C

【点睛】

本题主要考查了复数的运算，共轭复数的概念.

7、B

【解析】

求出集合 B ，利用集合的基本运算即可得到结论.

【详解】

由 $1-x > 0$ ，得 $x < 1$ ，则集合 $B = \{x \mid x < 1\}$ ，

所以， $A \cap B = \{-1, 0\}$.

故选：B.

【点睛】

本题主要考查集合的基本运算，利用函数的性质求出集合 B 是解决本题的关键，属于基础题.

8、A

【解析】

试题分析：由题意得，二项展开式的通项为 $T_{r+1} = C_8^r x^{8-r} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = (-1)^r C_8^r x^{8-\frac{3}{2}r}$ ，令 $8-\frac{3}{2}r = 2 \Rightarrow r = 4$ ，所以 x^2

的系数是 $(-1)^4 C_8^4 = 70$ ，故选 A.

考点：二项式定理的应用.

9、B

【解析】

本题考查了空间两个平面的判定与性质及充要条件，渗透直观想象、逻辑推理素养，利用面面平行的判定定理与性质定理即可作出判断.

【详解】

由面面平行的判定定理知： α 内两条相交直线都与 β 平行是 $\alpha // \beta$ 的充分条件，由面面平行性质定理知，若 $\alpha // \beta$ ，则 α 内任意一条直线都与 β 平行，所以 α 内两条相交直线都与 β 平行是 $\alpha // \beta$ 的必要条件，故选 B.

【点睛】

面面平行的判定问题要紧扣面面平行判定定理，最容易犯的错误为定理记不住，凭主观臆断，如：“若 $a \subset \alpha, b \subset \beta, a // b$ ，则 $\alpha // \beta$ ”此类的错误.

10、A

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/495004014203011131>