

2025 届安徽省肥东县圣泉中学高三压轴卷数学试卷

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $\triangle ABC$ 中内角 A, B, C 所对应的边依次为 a, b, c ，若 $2a=b+1, c=\sqrt{7}, C=\frac{\pi}{3}$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为（ ）

- A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

2. 已知函 $f(x)=(\sin x+\cos x)^2+2\cos^2 x$ ， $x\in\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ ，则 $f(x)$ 的最小值为（ ）

- A. $2-\sqrt{2}$ B. 1 C. 0 D. $-\sqrt{2}$

3. 已知抛物线 $C: y^2=4x$ 和点 $D(2,0)$ ，直线 $x=ty-2$ 与抛物线 C 交于不同两点 A, B ，直线 BD 与抛物线 C 交于另一点 E 。给出以下判断：

- ①以 BE 为直径的圆与抛物线准线相离；
②直线 OB 与直线 OE 的斜率乘积为 -2 ；
③设过点 A, B, E 的圆的圆心坐标为 (a,b) ，半径为 r ，则 $a^2-r^2=4$ 。

其中，所有正确判断的序号是（ ）

- A. ①② B. ①③ C. ②③ D. ①②③

4. 已知甲、乙两人独立出行，各租用共享单车一次（假定费用只可能为 1、2、3 元）。甲、乙租车费用为 1 元的概率分别是 0.5、0.2，甲、乙租车费用为 2 元的概率分别是 0.2、0.4，则甲、乙两人所扣租车费用相同的概率为（ ）

- A. 0.18 B. 0.3 C. 0.24 D. 0.36

5. 已知抛物线 $C: y^2=4x$ ，过焦点 F 的直线 l 与抛物线 C 交于 A, B 两点（ A 在 x 轴上方），且满足 $|AF|=3|BF|$ ，则直线 l 的斜率为（ ）

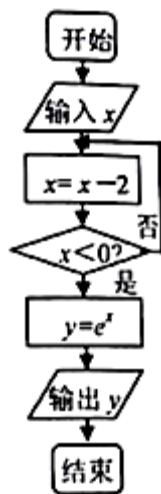
- A. 1 B. $\sqrt{3}$
C. 2 D. 3

6. 若函数 $f(x)=2\sin(x+2\theta)\cdot\cos x$ ($0<\theta<\frac{\pi}{2}$) 的图象过点 $(0,2)$ ，则（ ）

- A. 函数 $y=f(x)$ 的值域是 $[0,2]$ B. 点 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 是 $y=f(x)$ 的一个对称中心

- C. 函数 $y = f(x)$ 的最小正周期是 2π D. 直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 是 $y = f(x)$ 的一条对称轴

7. 根据如图所示的程序框图，当输入的 x 值为 3 时，输出的 y 值等于 ()



- A. 1 B. e C. e^{-1} D. e^{-2}

8. 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x+1)} - 1, & -1 < x < 0 \\ \frac{x}{2}, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$ ，若方程 $f(x) - 2ax = a - 1$ 有唯一解，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\{-8\} \cup (1, +\infty)$ B. $\{-16\} \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup (2, +\infty)$
 C. $\{-8\} \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup (2, +\infty)$ D. $\{-32\} \cup [1, 2] \cup (4, +\infty)$

9. 已知函数 $f(x) = \ln x$ ，若 $F(x) = f(x) - 3kx^2$ 有 2 个零点，则实数 k 的取值范围为 ()

- A. $\left(-\frac{1}{6e^2}, 0\right)$ B. $\left(-\frac{1}{6e}, 0\right)$ C. $\left(0, \frac{1}{6e}\right)$ D. $\left(0, \frac{1}{6e^2}\right)$

10. 新闻出版业不断推进供给侧结构性改革，深入推动优化升级和融合发展，持续提高优质出口产品供给，实现了行业的良性发展.下面是 2012 年至 2016 年我国新闻出版业和数字出版业营收增长情况，则下列说法错误的是 ()



- A. 2012 年至 2016 年我国新闻出版业和数字出版业营收均逐年增加
- B. 2016 年我国数字出版业营收超过 2012 年我国数字出版业营收的 2 倍
- C. 2016 年我国新闻出版业营收超过 2012 年我国新闻出版业营收的 1.5 倍
- D. 2016 年我国数字出版营收占新闻出版营收的比例未超过三分之一

11. 复数 $z = \frac{2+i}{1-i}$, i 是虚数单位, 则下列结论正确的是

- A. $|z| = \sqrt{5}$
- B. z 的共轭复数为 $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$
- C. z 的实部与虚部之和为 1
- D. z 在复平面内的对应点位于第一象限

12. 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, 四面体 $OABC$ 各顶点坐标分别为:

$O(0,0,0), A(0,0,2), B\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, 0\right), C\left(0, \frac{2}{3}\sqrt{3}, 0\right)$. 假设蚂蚁窝在 O 点, 一只蚂蚁从 O 点出发, 需要在 AB , AC 上

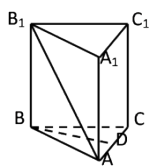
分别任意选择一点留下信息, 然后再返回 O 点. 那么完成这个工作所需要走的最短路径长度是 ()

- A. $2\sqrt{2}$
- B. $\sqrt{11} - \sqrt{21}$
- C. $\sqrt{5} + \sqrt{21}$
- D. $2\sqrt{3}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知直角坐标系中起点为坐标原点的向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$, $\vec{c} = (m, 1-m)$, $\vec{d} = (n, 1-n)$, 存在 $\vec{a}, \vec{b}$, 对于任意的实数 m, n , 不等式 $|\vec{a} - \vec{c}| + |\vec{b} - \vec{d}| \geq T$, 则实数 T 的取值范围是_____.

14. 如图所示, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D 是 AC 的中点, $AA_1 : AB = \sqrt{2} : 1$, 则异面直线 AB_1 与 BD 所成的角为_____.



15.

我国著名的数学家秦九韶在《数书九章》提出了“三斜求积术”。他把三角形的三条边分别称为小斜、中斜和大斜。三斜求积术就是用小斜平方加上大斜平方，送到中斜平方，取相减后余数的一半，自乘而得一个数，小斜平方乘以大斜平方，送到上面得到的那个数，相减后余数被4除，所得的数作为“实”，1作为“隅”，开平方后即得面积。所谓“实”、“隅”指的是在方程 $px^2 = q$ 中， p 为“隅”， q 为“实”。即若 $\triangle ABC$ 的大斜、中斜、小斜分别为 a, b, c ，则

$$S^2 = \frac{1}{4} \left[a^2 c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \right)^2 \right].$$

已知点 D 是 $\triangle ABC$ 边 AB 上一点， $AC = 3$ ， $BC = 2$ ， $\angle ACD = 45^\circ$ ，

$$\tan \angle BCD = \frac{8 + \sqrt{15}}{7},$$

则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

16. 点 P 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右支上，其左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，直线 PF_1 与以坐标原点 O 为圆心、 a 为半径的圆相切于点 A ，线段 PF_1 的垂直平分线恰好过点 F_2 ，则该双曲线的渐近线的斜率为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ，函数 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(2x + \varphi) - \cos^2 x$.

(1) 若 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ，求 $f(x)$ 的单调递增区间；

(2) 若 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}$ ，求 $\sin \varphi$ 的值.

18. (12 分) 设不等式 $-2 < |x-1| - |x+2| < 0$ 的解集为 M ， $a, b \in M$.

(1) 证明： $\left| \frac{1}{3}a + \frac{1}{6}b \right| < \frac{1}{4}$ ；

(2) 比较 $|1-4ab|$ 与 $2|a-b|$ 的大小，并说明理由.

19. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = \frac{\pi}{3}$ ， $b = \sqrt{7}$ ，_____求 BC 边上的高.

① $\sin A = \frac{\sqrt{21}}{7}$ ，② $\sin A = 3 \sin C$ ，③ $a - c = 2$ ，这三个条件中任选一个，补充在上面问题中并作答.

20. (12 分) [2018·石家庄一检] 已知函数 $f(x) = x(\ln x - ax) (a \in \mathbb{R})$.

(1) 若 $a = 1$ ，求函数 $f(x)$ 的图像在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程；

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ，且 $x_1 < x_2$ ，求证： $f(x_2) > -\frac{1}{2}$.

21. (12 分) 选修 4-4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos\alpha \\ y = \sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数). 以直角坐标系原点 O 为极点， x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}$ ，点 P 为曲线 C 上的动点，求点 P 到直线 l 距离的最大值.

22. (10 分) 已知点 A 为圆 $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$ 上的动点， O 为坐标原点，过 $P(0,4)$ 作直线 OA 的垂线 (当 A 、 O 重合时，直线 OA 约定为 y 轴)，垂足为 M ，以 O 为极点， x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求点 M 的轨迹的极坐标方程;

(2) 直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 4$ ，连接 OA 并延长交 l 于 B ，求 $\frac{|OA|}{|OB|}$ 的最大值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

由余弦定理可得 $a^2 + b^2 - ab = 7$ ，结合 $2a = b + 1$ 可得 a, b ，再利用面积公式计算即可.

【详解】

由余弦定理，得 $7 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = a^2 + b^2 - ab$ ，由 $\begin{cases} 7 = a^2 + b^2 - ab \\ 2a = b + 1 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$ ，

所以， $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

故选：A.

【点睛】

本题考查利用余弦定理解三角形，考查学生的基本计算能力，是一道容易题.

2、B

【解析】

$f(x) = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + 2, x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, $-\frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$ 利用整体换元法求最小值.

【详解】

由已知, $f(x) = 1 + 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = \sin 2x + \cos 2x + 2 = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + 2$,

又 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, $\therefore -\frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$, 故当 $2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$, 即 $x = -\frac{\pi}{4}$ 时, $f(x)_{\min} = 1$.

故选: B.

【点睛】

本题考查整体换元法求正弦型函数的最值, 涉及到二倍角公式的应用, 是一道中档题.

3、D

【解析】

对于①, 利用抛物线的定义, 利用 $d = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{|BF| + |EF|}{2} > \frac{|BE|}{2} = R$ 可判断;

对于②, 设直线 DE 的方程为 $x = my + 2$, 与抛物线联立, 用坐标表示直线 OB 与直线 OE 的斜率乘积, 即可判断;

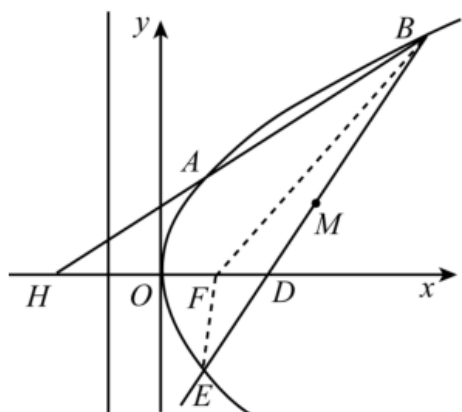
对于③, 将 $x = ty - 2$ 代入抛物线 C 的方程可得, $y_A y_1 = 8$, 从而, $y_A = -y_2$, 利用韦达定理可得

$|BE|^2 = 16m^4 + 48m^2 + 32$, 再由 $r^2 = |MN|^2 + \left(\frac{|BE|}{2}\right)^2$, 可用 m 表示 r^2 , 线段 BE 的中垂线与 x 轴的交点 (即圆心

N) 横坐标为 $2m^2 + 4$, 可得 a , 即可判断.

【详解】

如图, 设 F 为抛物线 C 的焦点, 以线段 BE 为直径的圆为 M , 则圆心 M 为线段 BE 的中点.



设 B, E 到准线的距离分别为 d_1, d_2 , $\odot M$ 的半径为 R , 点 M 到准线的距离为 d ,

显然 B, E, F 三点不共线,

则 $d = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{|BF| + |EF|}{2} > \frac{|BE|}{2} = R$. 所以①正确.

由题意可设直线 DE 的方程为 $x = my + 2$,

代入抛物线 C 的方程, 有 $y^2 - 4my - 8 = 0$.

设点 B, E 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,

则 $y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -8$.

所以 $x_1 x_2 = (my_1 + 2)(my_2 + 2) = m^2 y_1 y_2 + 2m(y_1 + y_2) + 4 = 4$.

则直线 OB 与直线 OE 的斜率乘积为 $\frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = -2$. 所以②正确.

将 $x = ty - 2$ 代入抛物线 C 的方程可得, $y_A y_1 = 8$, 从而, $y_A = -y_2$. 根据抛物线的对称性可知,

A, E 两点关于 x 轴对称, 所以过点 A, B, E 的圆的圆心 N 在 x 轴上.

由上, 有 $y_1 + y_2 = 4m, x_1 + x_2 = 4m^2 + 4$,

则 $|BE|^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 + (y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2 = 16m^4 + 48m^2 + 32$.

所以, 线段 BE 的中垂线与 x 轴的交点 (即圆心 N) 横坐标为 $2m^2 + 4$, 所以 $a = 2m^2 + 4$.

于是, $r^2 = |MN|^2 + \left(\frac{|BE|}{2}\right)^2 = \left(2m^2 + 4 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 + 4m^4 + 12m^2 + 8$,

代入 $x_1 + x_2 = 4m^2 + 4, y_1 + y_2 = 4m$, 得 $r^2 = 4m^4 + 16m^2 + 12$,

所以 $a^2 - r^2 = (2m^2 + 4)^2 - (4m^4 + 16m^2 + 12) = 4$.

所以③正确.

故选: D

【点睛】

本题考查了抛物线的性质综合, 考查了学生综合分析, 转化划归, 数形结合, 数学运算的能力, 属于较难题.

4、B

【解析】

甲、乙两人所扣租车费用相同即同为 1 元, 或同为 2 元, 或同为 3 元, 由独立事件的概率公式计算即得.

【详解】

由题意甲、乙租车费用为 3 元的概率分别是 0.3, 0.4,

∴甲、乙两人所扣租车费用相同的概率为

$$P = 0.5 \times 0.2 + 0.2 \times 0.4 + 0.3 \times 0.4 = 0.3.$$

故选: B.

【点睛】

本题考查独立性事件的概率. 掌握独立事件的概率乘法公式是解题基础.

5、B

【解析】

设直线 l 的方程为 $x = my + 1$ 代入抛物线方程, 利用韦达定理可得 $y_1 + y_2 = 4m$, $y_1 y_2 = -4$, 由 $|AF| = 3|BF|$ 可知

$\overline{AF} = 3\overline{FB}$ 所以可得 $y_1 = -3y_2$ 代入化简求得参数, 即可求得结果.

【详解】

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ($y_1 > 0$, $y_2 < 0$). 易知直线 l 的斜率存在且不为 0, 设为 $\frac{1}{m}$, 则直线 l 的方程为 $x = my + 1$.

与抛物线方程联立得 $y^2 = 4(my + 1)$, 所以 $y_1 y_2 = -4$, $y_1 + y_2 = 4m$. 因为 $|AF| = 3|BF|$, 所以 $\overline{AF} = 3\overline{FB}$, 得

$$y_1 = -3y_2, \text{ 所以 } y_2^2 = \frac{4}{3}, \text{ 即 } y_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}, y_1 = 2\sqrt{3}, \text{ 所以 } \frac{1}{m} = \frac{4}{y_1 + y_2} = \sqrt{3}.$$

故选: B.

【点睛】

本题考查直线与抛物线的位置关系, 考查韦达定理及向量的坐标之间的关系, 考查计算能力, 属于中档题.

6、A

【解析】

根据函数 $f(x)$ 的图像过点 $(0, 2)$, 求出 θ , 可得 $f(x) = \cos 2x + 1$, 再利用余弦函数的图像与性质, 得出结论.

【详解】

由函数 $f(x) = 2\sin(x + 2\theta) \cdot \cos x$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) 的图象过点 $(0, 2)$,

可得 $2\sin 2\theta = 2$, 即 $\sin 2\theta = 1$,

$$\therefore 2\theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{故 } f(x) = 2\sin(x + 2\theta) \cdot \cos x = 2\cos^2 x = \cos 2x + 1,$$

对于 A, 由 $-1 \leq \cos 2x \leq 1$, 则 $0 \leq f(x) \leq 2$, 故 A 正确;

对于 B, 当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, 故 B 错误;

对于 C, $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 故 C 错误;

对于 D, 当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, 故 D 错误;

故选: A

【点睛】

本题主要考查了二倍角的余弦公式、三角函数的图像与性质, 需熟记性质与公式, 属于基础题.

7、C

【解析】

根据程序图, 当 $x < 0$ 时结束对 x 的计算, 可得 y 值.

【详解】

由题 $x=3$, $x=x-2=3-1$, 此时 $x>0$ 继续运行, $x=1-2=-1<0$, 程序运行结束, 得 $y=e^{-1}$, 故选 C.

【点睛】

本题考查程序框图, 是基础题.

8、B

【解析】

求出 $f(x)$ 的表达式, 画出函数图象, 结合图象以及二次方程实根的分布, 求出 a 的范围即可.

【详解】

解: 令 $-1 < x < 0$, 则 $0 < x+1 < 1$,

则 $f(x+1) = \frac{x+1}{2}$,

故 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} - 1, & -1 < x < 0 \\ \frac{x}{2}, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$, 如图示:

由 $f(x) - 2ax = a - 1$,

得 $f(x) = a(2x+1) - 1$,

函数 $y = a(2x+1) - 1$ 恒过 $A(-\frac{1}{2}, -1)$,

由 $B(1, \frac{1}{2})$, $C(0, 1)$,

可得 $k_{AB} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{1 + \frac{1}{2}} = 1$, $k_{OA} = 2$, $k_{AC} = \frac{1+1}{\frac{1}{2}} = 4$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/495032234122012122>