第4章　向量组与线性方程组的解的构造

4.1向量组及其线性组合

4.2向量组的线性有关性

4.3向量组的秩

4.4 线性方程组的解的构造

4.1向量组及其线性组合

4.1.1 n 维向量的概念

1. n 维向量的定义 n 个有顺序的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$

n 维向量，这 n 个数称为该向量的分量，第 i 个数 a_i

称为第 i 个分量（或第 i 个坐标）.

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$ 行向量 即 $1\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$ 列向量 即 $n\times 1$ 矩阵

2．零向量 $\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)$

3．负向量

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),-\alpha=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$$

4．向量的相等

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\quad \beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

$$\alpha=\beta\Leftrightarrow a_i=b_i\ (i=1,2,\cdots,n)$$

5．向量组

同维数的列向量（或同维数的行向量）所构成的集合称为向量组

4.1.2 n 维向量的线性运算

1．加法与数乘 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$

为任意实k数，则

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

$$k\alpha=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n),$$

2．加法与数乘的运算规律（略）

注:利用向量的运算,对于方程组 $Ax=b$ $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

$$\alpha_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix},(j=1,2,\cdots,n)\qquad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\qquad b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

则

$$Ax=b\Leftrightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b\Leftrightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)x=b$$

4.1.3　向量组的线性组合与线性表达

1.定义2 (1) 给定向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$,对于任何一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,体现式 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$ 称为向量组 A 的一种线性组合,$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 称为该线性组合的系数.

(2)给定向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和向量β ,假如存在一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$

则称β 是向量组的线性组合，或称 β 可由向量组A 线性表达.

2.定理1

β 可由向量组A 线性表达 的**充分必要条件**是

矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$的秩等于矩阵$B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta)$的秩

注：设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ $B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta)$

β 可由向量组A 唯一线性表达 的**充分必要条件**是

$$R(A)=R(B)=m$$

例1 $\alpha_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(2,3,1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(3,1,2)^{\mathrm{T}},\beta=(0,4,2)^{\mathrm{T}}$

试问β 能否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表达？若能，写出详细表达式.

解:

$$B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\2&3&1&4\\3&1&2&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

$$R(A)=R(B)=3$$

所以β 能否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$惟一线性表达，且

$$\beta=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$$

例2 $\boldsymbol{\alpha}=(2,-3,0),\boldsymbol{\beta}=(0,-1,2),\boldsymbol{\gamma}=(0,-7,-4)$

试问β 能否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表达？若能，写出详细表达式.

解: $B=(A,\gamma^{\mathrm{T}})=(\alpha^{\mathrm{T}},\beta^{\mathrm{T}},\gamma^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}2&0&0\\-3&-1&-7\\0&2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

因为, $R(A)=2,R(B)=3$

所以, γ 不能由α ,β 线性表达.

4.1.4 向量组的等价

1.定义3 设两个向量组

$$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r \quad ,B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$$

若向量组A中的每个向量都可由向量组B线性表达，则称向量组A可由向量组B线性表达.

若向量组A与向量组B能够相互线性表达，则称向量组A与向量组B等价.

2.定理2 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r \quad ,B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$

设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r) \quad ,B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$

向量组A可由向量组B线性表达$\Leftrightarrow R(B)=R(A,B)$

推论:向量组A与向量组B等价$\Leftrightarrow R(A)=R(B)=R(A,B)$

4.2向量组的线性有关性

4.2.1线性有关与线性无关的定义

1.定义4 设有n维向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$,若存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$,则称向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性有关,不然称为线性无关.

换言之,若$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关,则上式当且仅当

$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$时才成立.

2.由定义4可知,

(1) 仅含一种零向量的向量组必线性有关;

(2) 仅含一种非零向量的向量组必线性无关;

(3) 任何包括零向量在内的向量组必线性有关;

(4) 向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性有关$\Leftrightarrow$齐次线性方程组

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$有非零解$\Leftrightarrow R(A)=R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)<m$

4.2.2 向量组线性有关的充分必要条件

定理3 向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性有关 $\Leftrightarrow R(A)<m$

向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow R(A)=m$

例3 讨论向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$ 的线性有关性.

解: $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}2&1&3\\3&2&2\\1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&1&-1\\3&2&2\\2&1&3\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_1\times(-2)+r_3]{r_1\times(-3)+r_2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&5\\0&-1&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\times(-1)+r_3}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-5\\0&0&0\end{pmatrix}$$

因为 $R(A)=2<3$，从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性有关.

例4：已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix}$，问

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是否线性有关.

解：

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\3&-2&5\\2&-1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&3\\1&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$R(A)=3$

所以，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关.

例5：设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，又设，

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2\ ,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\ \beta_3=\alpha_3+\alpha_1$$

证明向量组β_1,β_2,β_3也线性无关.

证明：设有k_1,k_2,k_3 使得

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，故有

$$\begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases}$$

此时，线性方程组只有零解$k_1=k_2=k_3=0$

也即向量组β_1,β_2,β_3线性无关.