

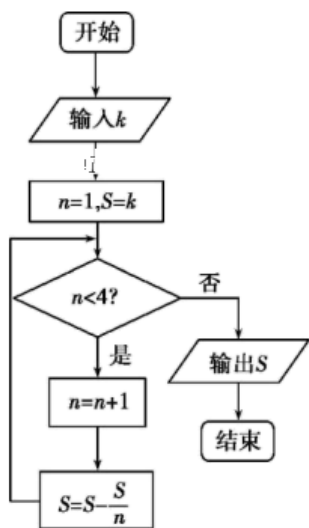
江苏省四星级高中部分学校 2023-2024 学年高考数学三模试卷

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

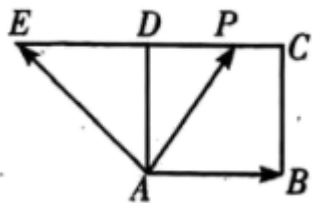
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知命题 $p: \exists x_0 > 2, x_0^3 - 8 > 0$ ，那么 $\neg p$ 为（ ）
A. $\exists x_0 > 2, x_0^3 - 8 \leq 0$ B. $\forall x > 2, x^3 - 8 \leq 0$
C. $\exists x_0 \leq 2, x_0^3 - 8 \leq 0$ D. $\forall x \leq 2, x^3 - 8 \leq 0$
2. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，O 为坐标原点，P 为双曲线在第一象限上的点，直线 PO， PF_2 分别交双曲线 C 的左、右支于另一点 M, N, 若 $|PF_1| = 3|PF_2|$ ，且 $\angle MF_2N = 60^\circ$ ，则双曲线的离心率为（ ）
A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. 3 C. 2 D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$
3. 若命题 $\square$ ：从有 2 件正品和 2 件次品的产品中任选 2 件得到都是正品的概率为三分之一；命题 $\square$ ：在边长为 4 的正方形 $\square\square\square\square$ 内任取一点 $\square$ ，则 $\square\square\square\square > 90^\circ$ 的概率为 $\frac{\square}{\square}$ ，则下列命题是真命题的是（ ）
A. $\square \wedge \square$ B. $(\neg\square) \wedge \square$ C. $\square \wedge (\neg\square)$ D. $\neg\square$
4. 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且满足 $3 + a_5 = a_3 + a_8$ ， S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则 $S_{11} =$ （ ）
A. 27 B. 33 C. 39 D. 44
5. 我国古代数学著作《九章算术》中有如下问题：“今有器中米，不知其数，前人取半，中人三分取一，后人四分取一，余米一斗五升(注 一斗为十升).问，米几何？”下图是解决该问题的程序框图，执行该程序框图，若输出的 $S=15$ (单位：升)，则输入的 k 的值为（ ）



- A. 45 B. 60 C. 75 D. 100

6. 如图，四边形 $ABCD$ 为正方形，延长 CD 至 E ，使得 $DE = CD$ ，点 P 在线段 CD 上运动. 设 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AE}$ ，则 $x + y$ 的取值范围是 ()



- A. $[1, 2]$ B. $[1, 3]$ C. $[2, 3]$ D. $[2, 4]$

7. 若函数 $f(x) = e^{|x|} - mx^2$ 有且只有 4 个不同的零点，则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{e^2}{4}, +\infty\right)$ B. $\left(\frac{e^2}{4}, +\infty\right)$ C. $\left(-\infty, \frac{e^2}{4}\right)$ D. $\left(-\infty, \frac{e^2}{4}\right]$

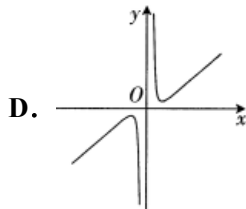
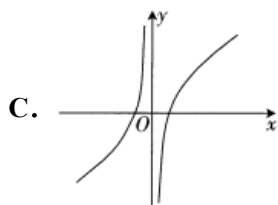
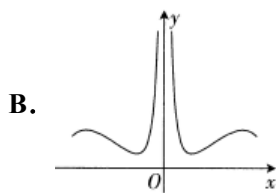
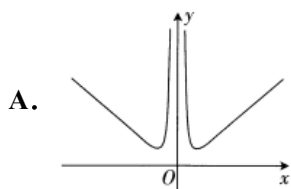
8. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_7 = 2a_6 + 3a_5$ ，若存在两项 a_m, a_n ，使得 $a_m \cdot a_n = 9a_1^2$ ，则 $\frac{1}{m} + \frac{9}{n}$ 的最小值为 ()。

- A. 16 B. $\frac{28}{3}$ C. 5 D. 4

9. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ ， $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ，则 $f(x)$ 的极大值点为 ()

- A. $-\frac{\pi}{3}$ B. $-\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{3}$

10. 函数 $f(x) = |x| - \frac{\ln|x|}{x^2}$ 的图象大致为 ()



11. $(x^2 - 2)(x + 2)^5$ 的展开式中含 x^4 的项的系数为 ()

- A. -20 B. 60 C. 70 D. 80

12. 定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数 $f(x)$ 满足任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x+2) = f(x) - f(1)$, 且当 $x \in [2, 3]$ 时,

$f(x) = -2x^2 + 12x - 18$. 若函数 $y = f(x) - \log_a(x+1)$ 至少有三个零点, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ B. $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ C. $\left(0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ D. $\left(0, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 抛物线 $y = 4x^2$ 的焦点 F 到准线 l 的距离为_____.

14. 从一箱产品中随机地抽取一件, 设事件 $A = \{\text{抽到一等品}\}$, 事件 $B = \{\text{抽到二等品}\}$, 事件 $C = \{\text{抽到三等品}\}$,

且已知 $P(A) = 0.65$, $P(B) = 0.2$, $P(C) = 0.1$, 则事件“抽到的产品不是一等品”的概率为_____

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $B = \frac{\pi}{3}$, $a = 2$, $b = \sqrt{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

16. 四面体 $A-BCD$ 中, $AB \perp$ 底面 BCD , $AB = BD = \sqrt{2}$, $CB = CD = 1$, 则四面体 $A-BCD$ 的外接球的表面积为_____

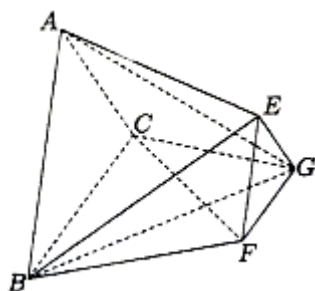
三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 + m^2x$ ($m \in \mathbf{R}$) 的导函数为 $f'(x)$.

(1) 若函数 $g(x) = f(x) - f'(x)$ 存在极值, 求 m 的取值范围;

(2) 设函数 $h(x) = f'(e^x) + f'(\ln x)$ (其中 e 为自然对数的底数), 对任意 $m \in \mathbf{R}$, 若关于 x 的不等式 $h(x) \geq m^2 + k^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 求正整数 k 的取值集合.

18. (12 分) 如图, 三棱台 $ABC-EFG$ 的底面是正三角形, 平面 $ABC \perp$ 平面 $BCGF$, $CB = 2GF$, $BF = CF$.



(1) 求证: $AB \perp CG$;

(2) 若 $BC = CF$, 求直线 AE 与平面 BEG 所成角的正弦值.

19. (12 分) 已知 $p: \forall x \in R, m(4x^2 + 1) > x$; $q: \exists x \in [2, 8], m \log_2 x + 1 \leq 0$.

(1) 若 p 为真命题, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若 $\neg p \vee q$ 为真命题且 $\neg p \wedge q$ 为假命题, 求实数 m 的取值范围.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$

(1) 若 $f(x) < ax + \frac{1}{x}$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若方程 $f(x) = m$ 有两个不同实根 x_1, x_2 , 证明: $x_1 + x_2 > 2$.

21. (12 分) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_n + 2a_{n+1} = 0$, 其前 n 项和为 S_n , 数列 $\left\{\frac{b_n}{2n+1}\right\}$ 的前 n 项积为 $\frac{1}{2n+1}$.

(1) 求 S_n 和数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = \frac{1}{\sqrt{b_n} \sqrt{b_{n+1}} (\sqrt{b_n} + \sqrt{b_{n+1}})}$, 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n , 并证明: 对任意的正整数 m, k , 均有 $S_m > T_k$.

22. (10 分) 已知 $f(x) = a \sin(1-x) + \ln x$, 其中 $a \in R$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 设函数 $g(x) = f(x) - x^2$, 求函数 $g(x)$ 的极值.

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上递增, 求 a 的取值范围;

(3) 证明: $\sum_{k=1}^n \sin \frac{1}{(2+k)^2} < \ln 3 - \ln 2$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

利用特称命题的否定分析解答得解.

【详解】

已知命题 $p: \exists x_0 > 2, x_0^3 - 8 > 0$ ，那么 $\neg p$ 是 $\forall x > 2, x^3 - 8 \leq 0$.

故选：B.

【点睛】

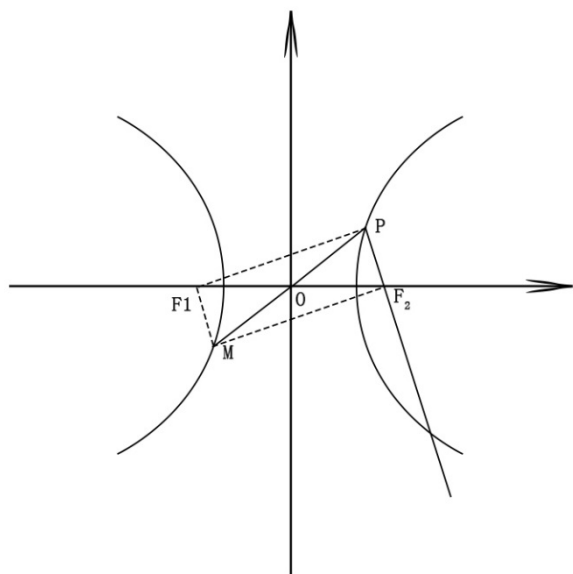
本题主要考查特称命题的否定，意在考查学生对该知识的理解掌握水平，属于基础题.

2、D

【解析】

本道题结合双曲线的性质以及余弦定理，建立关于 a 与 c 的等式，计算离心率，即可.

【详解】



结合题意，绘图，结合双曲线性质可以得到 $PO=MO$ ，而 $F_1O=F_2O$ ，结合四边形对角线平分，可得四边形 PF_1MF_2 为平行四边形，结合 $\angle MF_2N=60^\circ$ ，故 $\angle F_1MF_2=60^\circ$

对三角形 F_1MF_2 运用余弦定理，得到， $F_1M^2+F_2M^2-F_1F_2^2=2\cdot MF_1\cdot MF_2\cdot\cos\angle F_1MF_2$

而结合 $|PF_1| = 3|PF_2|$ ，可得 $|MF_1| = a, |MF_2| = 3a$ ， $F_1F_2 = 2c$ ，代入上式子中，得到

$$a^2 + 9a^2 - 4c^2 = 3a^2, \text{ 结合离心率满足 } e = \frac{c}{a}, \text{ 即可得出 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{2}, \text{ 故选 D.}$$

【点睛】

本道题考查了余弦定理以及双曲线的性质，难度偏难。

3、B

【解析】因为从有 2 件正品和 2 件次品的产品中任选 2 件得到都是正品的概率为 $\square_1 = \frac{1}{\square_2} = \frac{1}{8}$ ，即命题 $\square$ 是错误的，

则 $\neg\square$ 是正确的；在边长为 4 的正方形 $\square\square\square\square$ 内任取一点 $\square$ ，若 $\square\square\square\square > 90^\circ$ 的概率为 $\square_2 = \frac{\frac{1}{2} \times \square \times 4}{4 \times 4} = \frac{\square}{8}$ ，即命题 $\square$ 是

正确的，故由符合命题的真假的判定规则可得答案 $(\neg\square) \wedge \square$ 是正确的，应选答案 B。

点睛：本题将古典型概率公式、几何型概率公式与命题的真假（含或、且、非等连接词）的命题构成的复合命题的真假的判定有机地整合在一起，旨在考查命题真假的判定及古典概型的特征与计算公式的运用、几何概型的特征与计算公式的运用等知识与方法的综合运用，以及分析问题 解决问题的能力。

4、B

【解析】

利用等差数列性质，若 $m+n=p+q$ ，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$ 求出 $a_6=3$ ，再利用等差数列前 n 项和公式得

$$S_{11} = \frac{11(a_1+a_{11})}{2} = 11a_6 = 33$$

【详解】

解：因为 $3+a_5=a_3+a_8$ ，由等差数列性质，若 $m+n=p+q$ ，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$ 得，

$$\therefore a_6=3.$$

$$S_n \text{ 为数列 } \{a_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和, 则 } S_{11} = \frac{11(a_1+a_{11})}{2} = 11a_6 = 33.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查等差数列性质与等差数列前 n 项和.

(1)如果 $\{a_n\}$ 为等差数列，若 $m+n=p+q$ ，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$ ($m, n, p, q \in N^*$).

(2)要注意等差数列前 n 项和公式的灵活应用，如 $S_{2n-1} = (2n-1)a_n$.

5、B

【解析】

根据程序框图中程序的功能，可以列方程计算．

【详解】

由题意 $S \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = 15$ ， $S = 60$ ．

故选：B.

【点睛】

本题考查程序框图，读懂程序的功能是解题关键．

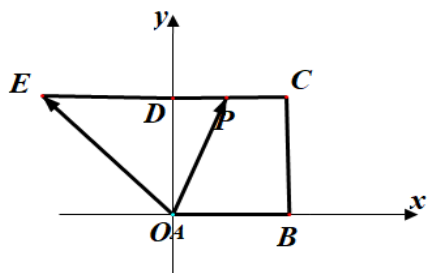
6、C

【解析】

以 A 为坐标原点，以 AB , AD 分别为 x 轴, y 轴建立直角坐标系，利用向量的坐标运算计算即可解决.

【详解】

以 A 为坐标原点建立如图所示的直角坐标系，不妨设正方形 $ABCD$ 的边长为 1，



则 $B(1,0)$ ， $E(-1,1)$ ，设 $P(t,1)(0 \leq t \leq 1)$ ，则 $(t,1) = x(1,0) + y(-1,1)$ ，所以 $t = x - y$ ，且 $y = 1$ ，

故 $x + y = t + 2 \in [2, 3]$ ．

故选：C.

【点睛】

本题考查利用向量的坐标运算求变量的取值范围，考查学生的基本计算能力，本题的关键是建立适当的直角坐标系，是一道基础题．

7、B

【解析】

由 $f(x) = e^{|x|} - mx^2$ 是偶函数，则只需 $f(x) = e^{|x|} - mx^2$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上有且只有两个零点即可．

【详解】

解：显然 $f(x) = e^{|x|} - mx^2$ 是偶函数

所以只需 $x \in (0, +\infty)$ 时， $f(x) = e^{|x|} - mx^2 = e^x - mx^2$ 有且只有 2 个零点即可

令 $e^x - mx^2 = 0$ ，则 $m = \frac{e^x}{x^2}$

令 $g(x) = \frac{e^x}{x^2}$ ， $g'(x) = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$

$x \in (0, 2)$ ， $g'(x) < 0$ ， $g(x)$ 递减，且 $x \rightarrow 0^+$ ， $g(x) \rightarrow +\infty$

$x \in (2, +\infty)$ ， $g'(x) > 0$ ， $g(x)$ 递增，且 $x \rightarrow +\infty$ ， $g(x) \rightarrow +\infty$

$$g(x) \geq g(2) = \frac{e^2}{4}$$

$x \in (0, +\infty)$ 时， $f(x) = e^{|x|} - mx^2 = e^x - mx^2$ 有且只有 2 个零点，

只需 $m > \frac{e^2}{4}$

故选：B

【点睛】

考查函数性质的应用以及根据零点个数确定参数的取值范围，基础题.

8、D

【解析】

由 $a_7 = 2a_6 + 3a_5$ ，可得 $q = 3$ ，由 $a_m \cdot a_n = 9a_1^2$ ，可得 $m + n = 4$ ，再利用“1”的妙用即可求出所求式子的最小值.

【详解】

设等比数列公比为 $q (q > 0)$ ，由已知， $a_5 q^2 = 2a_5 q + 3a_5$ ，即 $q^2 = 2q + 3$ ，

解得 $q = 3$ 或 $q = -1$ （舍），又 $a_m \cdot a_n = 9a_1^2$ ，所以 $a_1 3^{m-1} \cdot a_1 3^{n-1} = 9a_1^2$ ，

即 $3^{m+n-2} = 3^2$ ，故 $m + n = 4$ ，所以 $\frac{1}{m} + \frac{9}{n} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{m} + \frac{9}{n} \right) (m + n) = \frac{1}{4} \left(10 + \frac{n}{m} + \frac{9m}{n} \right)$

$\geq \frac{1}{4} (10 + 2\sqrt{9}) = 4$ ，当且仅当 $m = 1, n = 3$ 时，等号成立.

故选：D.

【点睛】

本题考查利用基本不等式求式子和的最小值问题，涉及到等比数列的知识，是一道中档题.

9、A

【解析】

求出函数的导函数，令导数为零，根据函数单调性，求得极大值点即可.

【详解】

$$\text{因为 } f(x) = \frac{1}{2}x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{1}{2}x - \sin x,$$

$$\text{故可得 } f'(x) = -\cos x + \frac{1}{2},$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 因为 } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\text{故可得 } x = -\frac{\pi}{3} \text{ 或 } x = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{则 } f(x) \text{ 在区间 } \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right) \text{ 单调递增,}$$

$$\text{在 } \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \text{ 单调递减, 在 } \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 单调递增,}$$

$$\text{故 } f(x) \text{ 的极大值点为 } -\frac{\pi}{3}.$$

故选: A.

【点睛】

本题考查利用导数求函数的极值点, 属基础题.

10、A

【解析】

根据函数 $f(x)$ 的奇偶性和单调性, 排除错误选项, 从而得出正确选项.

【详解】

因为 $f(-x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数, 排除 C 和 D.

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}, \quad f'(x) = \frac{x^3 + 2 \ln x - 1}{x^3},$$

令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < 1$, 即 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递减; 令 $f'(x) > 0$, 得 $x > 1$, 即 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增. 所以 $f(x)$

在 $x = 1$ 处取得极小值, 排除 B.

故选: A

【点睛】

本小题主要考查函数图像的识别, 考查利用导数研究函数的单调区间和极值, 属于中档题.

11、B

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/495332113320012101>