

数学试卷

注意事项:

1. 本试卷考试时间为 120 分钟, 试卷满分 150 分, 考试形式闭卷.
 2. 本试卷中所有试题必须作答在答题卡上规定的位置, 否则不给分.
 3. 答题前, 务必将自己的姓名, 准考证号用 0.5 毫米黑色墨水签字笔填写在试卷及答题卡上.
- 一、选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一项是正确的.

1. 设 $z = 1 + i$, 则 $z^2 - i =$ ()

- A. i B. $-i$ C. 1 D. -1

2. 已知命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 4x + a < 0$, 若命题 p 是假命题, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\{a | 0 < a < 4\}$ B. $\{a | a \leq 4\}$ C. $\{a | a \leq 0\}$ D. $\{a | a < 4\}$

3. 平面向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 相互垂直, 已知 $\vec{a} = (6, -8)$, $|\vec{b}| = 5$, 且 $\vec{b}$ 与向量 $(1, 0)$ 的夹角是钝角, 则 $\vec{b} =$ ()

- A. $(-3, -4)$ B. $(4, 3)$ C. $(-4, 3)$ D. $(-4, -3)$

4. 已知椭圆 $\frac{x^2}{10-m} + \frac{y^2}{m-2} = 1$ 的长轴在 y 轴上, 若焦距为 4, 则 m 等于 ()

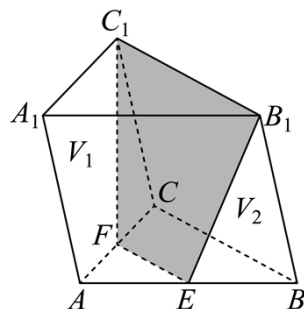
- A. 4 B. 5 C. 7 D. 8

5. 在一组样本数据中, 1, 2, 3, 4 出现的频率分别为 p_1, p_2, p_3, p_4 , 且 $\sum_{i=1}^4 p_i = 1$, 则下面四种情形中, 对应样本的标准差最小的一组是 ()

- A. $p_1 = p_4 = 0.4, p_2 = p_3 = 0.1$ B. $p_1 = p_4 = 0.1, p_2 = p_3 = 0.4$
- C. $p_1 = p_4 = 0.2, p_2 = p_3 = 0.3$ D. $p_1 = p_4 = 0.3, p_2 = p_3 = 0.2$

6. 如图所示, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 若点 E, F 分别满足 $\vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{AB}$, $\vec{AF} = \frac{2}{3}\vec{AC}$, 平面 EB_1C_1F

将三棱柱分成体积为 V_1, V_2 的两部分, 则 $V_1 : V_2 =$ ()



- A. 19:8 B. 2:1 C. 17:10 D. 16:11

7. 若直线 $y = ax + b$ 与曲线 $y = e^x$ 相切, 则 $a + b$ 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, e]$ B. $[2, e]$ C. $[e, +\infty)$ D. $[2, +\infty)$

8. 已知函数 $f(x) = e^x - a \ln(ax - a) + a (a > 0)$, 若对于任意的 $x > 1$ 使得不等式 $f(x) \geq 0$ 成立, 则实数 a 的取值范围 ()

- A. $(0, e^2]$ B. $(0, e^e]$ C. $[e^2, +\infty)$ D. $[e^e, +\infty)$

二、多项选择题: 本大题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 6 分, 选对但不全的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f(x) = |\sin x| - \sqrt{3} \cos x$, 则 ()

- A. $f(x)$ 是偶函数 B. $f(x)$ 的最小正周期是 π
C. $f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3}, 2]$ D. $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上单调递增

10. 抛物线有如下光学性质: 由其焦点射出的光线经抛物线反射后, 沿平行于抛物线对称轴的方向射出. 反之, 平行于抛物线对称轴的入射光线经抛物线反射后必过抛物线的焦点. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$, O 为坐标原点, 一束平行于 x 轴的光线 l_1 从点 $P(m, 1) \left(m > \frac{1}{4} \right)$ 射入, 经过 C 上的点 $A(x_1, y_1)$, 反射后, 再经过 C

上另一点 $B(x_2, y_2)$ 反射后, 沿直线 l_2 射出, 经过点 Q , 则 ()

- A. $x_1 x_2 = 4$
B. 延长 AO 交直线 $x = -1$ 于点 D , 则 D, B, Q 三点共线
C. $|AB| = \frac{25}{4}$
D. 若 PB 平分 $\angle ABQ$, 则 $m = \frac{13}{2}$

11. 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 存在两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 且 $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = -x_2$. 设

$f(x)$ 的零点个数为 m , 方程 $3a(f(x))^2 + 2bf(x) + c = 0$ 的实根个数为 n , 则 ()

- A. 当 $a > 0$ 时, $x_2 > 0$ B. 当 $a > 0$ 时, $n = 3$
C. 当 $a < 0$ 时, $m + 2 = n$ D. mn 一定能被 3 整除

三、填空题: 本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_4 = S_{11}$, $a_5 = 2$, 则 $a_1 =$ _____.

13. 已知正 $\triangle ABC$ 的边长为 $2\sqrt{3}$, 平面 ABC 内的动点 P, M 满足 $|\overrightarrow{AP}| = 1$, $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MC}$, 则 $|\overrightarrow{BM}|^2$ 的最大值是_____.

14. 将 0, 1 两个数随机填入 4×4 的小方格中, 每个小方格中恰填一个数, 则使每行、每列所填数之和都为偶数的概率为_____.

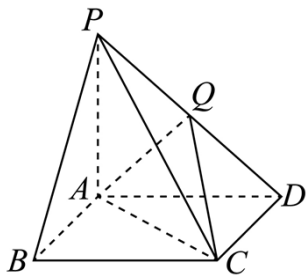
四、解答题: 本大题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sqrt{3}a \sin C + a \cos C - b = c$

(1) 求 A ;

(2) 设 AB 的中点为 D , 若 $CD = a = \sqrt{7}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

16. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, Q 为棱 PD 的中点.



(1) 求证: $PB \parallel$ 平面 ACQ ;

(2) 已知 $AQ \perp PC$.

①求直线 PC 与平面 ACQ 所成角的正弦值;

②求点 P 到平面 ACQ 的距离.

17. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足: $S_n + a_n = \frac{1}{2^n}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项;

(2) 设数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 若 $(1 - T_n)^2 > \lambda a_n S_n$, 求实数 λ 的取值范围.

18. 已知双曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 左右顶点分别为 A_1, A_2 , 过点 $M(-2, 0)$ 的直线 l 交双曲线 Γ 于 P, Q 两点.

(1) 若双曲线 Γ 的渐近线为 $y = \pm \sqrt{2}x$ 时, 求离心率;

(2) 若 $a=1$, $b=1$, $\triangle MA_2P$ 为等腰三角形时, 且点 P 在 x 轴上方, 求点 P 的坐标;

(3) 若 $a=1$, 连接 OQ 并延长, 交双曲线 Γ 于点 R , 若 $\overline{A_1R} \cdot \overline{A_2P} = 1$, 求 b 的取值范围.

19. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 若 $\forall x_1, x_2 \in I, \forall t \in (0,1), f[tx_1 + (1-t)x_2] \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 是 I 上的凹函数. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 则 $f(x)$ 为凹函数的充要条件是其导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 上单调递减.

(1) 若函数 $y = ax^2 - 2x \ln x$ 是定义在 $[2,4]$ 上的凹函数, 求实数 a 的取值范围;

(2) 已知函数 $f(x)$ 是定义在 I 上的凹函数, 证明: 对于任意的 $x_1, x_2, x_3 \in I$, 若 $x_1 < x_3 < x_2$, 则

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \geq \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3};$$

(3) 已知函数 $g(x) = e^{ax}$, 若对于 $\forall x \in (-1,0)$, 都有 $g(x) > \frac{1+x}{1-x}$, 求实数 a 的取值范围.

数学试卷

注意事项:

1. 本试卷考试时间为 120 分钟, 试卷满分 150 分, 考试形式闭卷.
 2. 本试卷中所有试题必须作答在答题卡上规定的位置, 否则不给分.
 3. 答题前, 务必将自己的姓名, 准考证号用 0.5 毫米黑色墨水签字笔填写在试卷及答题卡上.
- 一、选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一项是正确的.

1. 设 $z = 1 + i$, 则 $z^2 - i =$ ()

- A. i B. $-i$ C. 1 D. -1

【答案】A

【解析】

【分析】利用复数的乘法可求运算结果.

【详解】 $z^2 - i = (1 + i)^2 - i = i$,

故选: A

2. 已知命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 4x + a < 0$, 若命题 p 是假命题, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\{a | 0 < a < 4\}$ B. $\{a | a \leq 4\}$ C. $\{a | a \leq 0\}$ D. $\{a | a < 4\}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用命题 p 为假命题, 得到为 $\neg p$ 真命题, 即 $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 4x + a \geq 0$ 恒成立, 即可求出实数 a 的取值范围.

【详解】命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 4x + a < 0$ 的否定 $\neg p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 4x + a \geq 0$.

因为 p 是假命题, 所以 $\neg p$ 是真命题, 即 $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 4x + a \geq 0$ 恒成立,

所以 $\Delta = 16 - 4a \leq 0$, 解得 $a \geq 4$.

故选: B.

3. 平面向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 相互垂直, 已知 $\vec{a} = (6, -8)$, $|\vec{b}| = 5$, 且 $\vec{b}$ 与向量 $(1, 0)$ 的夹角是钝角, 则 $\vec{b} =$ ()

- A. $(-3, -4)$ B. $(4, 3)$ C. $(-4, 3)$ D. $(-4, -3)$

【答案】D

【解析】

【分析】先设出向量 $\vec{b}$ 的坐标，利用平面向量垂直的坐标表示及模的运算，向量夹角的定义求解即可.

【详解】设 $\vec{b} = (x, y)$

$$\vec{a} \perp \vec{b}, \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \therefore 6x - 8y = 0, \quad ①,$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{x^2 + y^2} = 5, \quad ②,$$

$\vec{b}$ 与向量 $(1, 0)$ 夹角为钝角, $\therefore x < 0$, ③,

$$\text{由①②③解得} \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}, \therefore \vec{b} = (-4, -3),$$

故选: D.

4. 已知椭圆 $\frac{x^2}{10-m} + \frac{y^2}{m-2} = 1$ 的长轴在 y 轴上, 若焦距为4, 则 m 等于 ()

A. 4

B. 5

C. 7

D. 8

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意得椭圆焦点在 y 轴上, 且 $c = 2$, 列出相应式子从而求解.

【详解】由题意得椭圆焦点在 y 轴上, 且 $c = 2$,

$$\text{得: } \begin{cases} 10-m > 0 \\ m-2 > 0 \\ m-2-(10-m) = 4 \end{cases}, \text{解得: } m = 8, \text{故 D 项正确.}$$

故选: D.

5. 在一组样本数据中, 1, 2, 3, 4 出现的频率分别为 p_1, p_2, p_3, p_4 , 且 $\sum_{i=1}^4 p_i = 1$, 则下面四种情形中, 对应样本的标准差最小的一组是 ()

A. $p_1 = p_4 = 0.4, p_2 = p_3 = 0.1$

B. $p_1 = p_4 = 0.1, p_2 = p_3 = 0.4$

C. $p_1 = p_4 = 0.2, p_2 = p_3 = 0.3$

D. $p_1 = p_4 = 0.3, p_2 = p_3 = 0.2$

【答案】B

【解析】

【分析】根据方差公式, 分别求出各选项的方差, 进而判断标准差的大小即可求解,

【详解】对于 A, $E(X) = 1 \times 0.4 + 2 \times 0.1 + 3 \times 0.1 + 4 \times 0.4 = 2.5$,

$$D(X) = (1-2.5)^2 \times 0.4 + (2-2.5)^2 \times 0.1 + (3-2.5)^2 \times 0.1 + (4-2.5)^2 \times 0.4 = 1.85,$$

$$\text{所以 } s_A = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1.85},$$

$$\text{对于 B, } E(X) = 1 \times 0.1 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.4 + 4 \times 0.1 = 2.5,$$

$$D(X) = (1-2.5)^2 \times 0.1 + (2-2.5)^2 \times 0.4 + (3-2.5)^2 \times 0.4 + (4-2.5)^2 \times 0.1 = 0.65,$$

$$\text{所以 } s_B = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0.65},$$

$$\text{对于 C, } E(X) = 1 \times 0.2 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.2 = 2.5,$$

$$D(X) = (1-2.5)^2 \times 0.2 + (2-2.5)^2 \times 0.3 + (3-2.5)^2 \times 0.3 + (4-2.5)^2 \times 0.2 = 1.05,$$

$$\text{所以 } s_C = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1.05},$$

$$\text{对于 D, } E(X) = 1 \times 0.3 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.2 + 4 \times 0.3 = 2.5,$$

$$D(X) = (1-2.5)^2 \times 0.3 + (2-2.5)^2 \times 0.2 + (3-2.5)^2 \times 0.2 + (4-2.5)^2 \times 0.3 = 1.45,$$

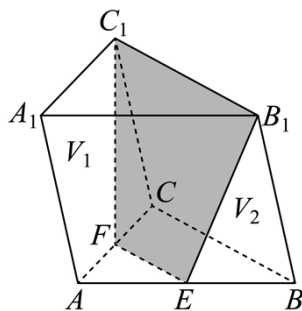
$$\text{所以 } s_D = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1.45},$$

综上对应样本的标准差最小的一组是 B 组,

故选: B

6. 如图所示, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 若点 E, F 分别满足 $\overline{AE} = \frac{2}{3}\overline{AB}$, $\overline{AF} = \frac{2}{3}\overline{AC}$, 平面 EB_1C_1F

将三棱柱分成体积为 V_1, V_2 的两部分, 则 $V_1:V_2 = (\quad)$



A. 19:8

B. 2:1

C. 17:10

D. 16:11

【答案】A

【解析】

【分析】根据平行线分线段成比例可求得 $S_{\triangle AEF} = \frac{4}{9}S_{\triangle ABC}$, 结合棱台和棱柱体积公式可求得结果.

【详解】Q $\overline{AE} = \frac{2}{3}\overline{AB}$, $\overline{AF} = \frac{2}{3}\overline{AC}$, $\therefore EF \parallel BC$, $EF = \frac{2}{3}BC$, $\therefore S_{\triangle AEF} = \frac{4}{9}S_{\triangle ABC}$;

$$Q \frac{EF}{B_1C_1} = \frac{AF}{A_1C_1} = \frac{AE}{A_1B_1} = \frac{2}{3}, \therefore \text{几何体 } AEF - A_1B_1C_1 \text{ 为三棱台,}$$

设三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的高为 h ,

$$\begin{aligned} \therefore V_1 &= \frac{1}{3} \left(S_{\triangle AEF} + \sqrt{S_{\triangle AEF} \cdot S_{\triangle A_1B_1C_1}} + S_{\triangle A_1B_1C_1} \right) \cdot h = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9} S_{\triangle ABC} + \frac{2}{3} S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ABC} \right) \cdot h \\ &= \frac{19}{27} S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{19}{27} V_{ABC-A_1B_1C_1}, \end{aligned}$$

$$\therefore V_2 = V_{ABC-A_1B_1C_1} - V_1 = \frac{8}{27} V_{ABC-A_1B_1C_1}, \therefore V_1 : V_2 = 19 : 8.$$

故选: A.

7. 若直线 $y = ax + b$ 与曲线 $y = e^x$ 相切, 则 $a + b$ 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, e]$ B. $[2, e]$ C. $[e, +\infty)$ D. $[2, +\infty)$

【答案】A

【解析】

【分析】借助导数的几何意义计算可得 $a + b = (2 - m)e^m$, 借助导数得到函数 $f(x) = (2 - x)e^x$ 的值域即可得解.

【详解】对于 $y = e^x$, 有 $y' = e^x$, 令切点为 (m, e^m) , 则切线方程为 $y = e^m(x - m) + e^m$,

即 $y = e^m x + (1 - m)e^m$, 即有 $a + b = e^m + (1 - m)e^m = (2 - m)e^m$,

令 $f(x) = (2 - x)e^x$, 则 $f'(x) = (1 - x)e^x$,

当 $x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$,

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

故 $f(x) \leq f(1) = (2 - 1)e^1 = e$,

又当 x 趋向于正无穷大时, $f(x)$ 趋向于负无穷,

故 $f(x) \in (-\infty, e]$, 即 $a + b \in (-\infty, e]$.

故选: A.

8. 已知函数 $f(x) = e^x - a \ln(ax - a) + a (a > 0)$, 若对于任意的 $x > 1$ 使得不等式 $f(x) \geq 0$ 成立, 则实数 a

的取值范围 ()

A. $(0, e^2]$

B. $(0, e^e]$

C. $[e^2, +\infty)$

D. $[e^e, +\infty)$

【答案】A

【解析】

【分析】将不等式变形为 $e^{x-\ln a} + x - \ln a < x - 1 + \ln(x-1)$ ，构造函数 $g(x) = x + \ln x$ ，分析可知该函数为增函数，可得出 $\ln a > x - \ln(x-1)$ ，求出函数 $h(x) = x - \ln(x-1)$ 的最小值，可得出关于实数 a 的不等式，即可得出实数 a 的取值范围.

【详解】因为 $a > 0$ ，由 $ax - a > 0$ 可得 $x > 1$ ，即函数 $f(x)$ 的定义域为 $(1, +\infty)$ ，

$$f(x) = e^x - a \ln a - a \ln(x-1) + a \geq 0 \text{ 可得 } \frac{e^x}{a} - \ln a \geq \ln(x-1) - 1,$$

$$\text{即 } e^{x-\ln a} + x - \ln a \geq x - 1 + \ln(x-1),$$

构造函数 $g(x) = x + \ln x$ ，其中 $x > 0$ ，则 $g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ ，故函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

$$\text{所以 } g(e^{x-\ln a}) \geq g(x-1), \text{ 可得 } e^{x-\ln a} \geq x-1, \text{ 则 } x - \ln a \geq \ln(x-1),$$

$$\text{即 } \ln a \leq x - \ln(x-1), \text{ 其中 } x > 1, \text{ 令 } h(x) = x - \ln(x-1), \text{ 其中 } x > 1,$$

$$\text{则 } h'(x) = 1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1}, \text{ 当 } 1 < x < 2 \text{ 时, } h'(x) < 0, \text{ 此时函数 } h(x) \text{ 单调递减,}$$

$$\text{当 } x > 2 \text{ 时, } h'(x) > 0, \text{ 此时函数 } h(x) \text{ 单调递增,}$$

$$\text{所以, } \ln a \leq h(x)_{\min} = h(2) = 2, \text{ 解得 } a \leq e^2.$$

综上, $0 < a \leq e^2$

故选: A.

【点睛】关键点点睛: 解本题的关键在于将不等式变形为 $e^{x-\ln a} + x - \ln a < x - 1 + \ln(x-1)$ ，结合不等式的结果构造函数 $g(x) = x + \ln x$ ，转化为函数 $g(x)$ 的单调性以及参变量分离法求解.

二、多项选择题: 本大题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 6 分, 选对但不全的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f(x) = |\sin x| - \sqrt{3} \cos x$, 则 ()

A. $f(x)$ 是偶函数

B. $f(x)$ 的最小正周期是 π

C. $f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3}, 2]$

D. $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上单调递增

【答案】AC

【解析】

【分析】根据偶函数的定义判断 A，按 x 的取值讨论画出 $f(x)$ 的大致图象，结合正弦函数的性质判断 BCD.

【详解】因为 $f(-x) = |\sin(-x)| - \sqrt{3}\cos(-x) = |\sin x| - \sqrt{3}\cos x = f(x)$,

所以 $f(x)$ 是偶函数，A 说法正确；

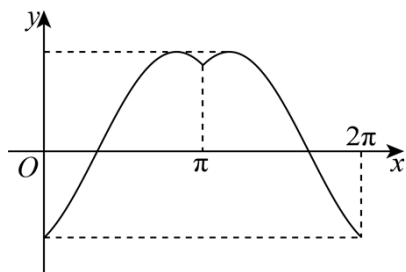
因为 $f(x+2\pi) = |\sin(x+2\pi)| - \sqrt{3}\cos(x+2\pi) = |\sin x| - \sqrt{3}\cos x = f(x)$,

所以 2π 是 $f(x)$ 的一个周期，

当 $0 \leq x \leq \pi$ 时， $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$,

当 $\pi \leq x \leq 2\pi$ 时， $f(x) = -\sin x - \sqrt{3}\cos x = -2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$,

所以 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 的图象如图所示，



由图象可知 $f(x)$ 的最小正周期是 2π ，B 说法错误；

因为 $f(0) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ ， $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ ，

所以 $f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3}, 2]$ ，C 说法正确；

当 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ 时， $\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3}$ ， $f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 不具有单调性，D 说法错误；

故选：AC

10.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/496013021050011052>