

(八省联考)2025年山东省新高考综合改革适应性演练数学试卷带解析附参考

答案(研优卷)

学校：_____ 姓名：_____ 班级：_____ 考号：_____

题号	一	二	三	总分
得分				

注意事项：

1. 答题前填写好自己的姓名、班级、考号等信息
2. 请将答案正确填写在答题卡上

第 I 卷 (选择题)

请点击修改第 I 卷的文字说明

评卷人	得分

一、选择题 (共 2 题, 总计 0 分)

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 设命题 $p: \frac{a}{\sin B} = \frac{b}{\sin C} = \frac{c}{\sin A}$, 命题 $q: \triangle ABC$ 是等边三角形, 那么命题 p 是命题 q 的 ()

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分又不必要条件(2005 江西文)

解析: C

2. 某工厂第一年年产量为 A , 第二年的增长率为 a , 第三年的增长率为 b , 这两年的平均增长率为 x , 则

- A. $x = \frac{a+b}{2}$
- B. $x \leq \frac{a+b}{2}$
- C. $x > \frac{a+b}{2}$
- D. $x \geq \frac{a+b}{2}$

解析: B

评卷人	得分

二、填空题 (共 16 题, 总计 0 分)

3. 已知方程 $|4x - x^2| - a = 0$ 有四个根, 则实数 a 的取值范围是_____.

解析: (0,4)

4. 如图, 将平面直角坐标系的格点 (横、纵坐标均为整数的点) 按如下规则表上数字标签: 原点处标 0, 点 (1, 0) 处标 1, 点 (1, -1) 处标 2, 点 (0, -1) 处标 3, 点 (-1, -1) 处标 4, 点 (-1, 0) 处标 5, 点 (-1, 1) 处标 6, 点 (0, 1) 处标 7, 以此类推, 则标签 2009^2 的格点的坐标为_____.

答案: (1005, 1004) 一、

解析: (1005, 1004)

一、

5. 幂函数 $y = f(x)$ 的图象经过点 $(2, \frac{1}{8})$, 则满足 $f(x) = -27$ 的 x 的值是_____.

解析: $-\frac{1}{3}$

6. 若函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 2 \\ f(x+1), & x < 2 \end{cases}$, 则 $f(1) = \underline{\quad\blacktriangle\quad}$.

解析:

7. 某学院的 A,B,C 三个专业共有 1200 名学生, 为了调查这些学生勤工俭学的情况, 拟采用分层抽样的方法抽取一个容量为 120 的样本. 已知该学院的 A 专业有 380 名学生, B 专业有 420 名学生, 则在该学院的 C 专业应抽取_____名学生.

【解】 40

解析:

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c , 若 $a=5$, $b=7$, $\cos C = \frac{4}{5}$, 则角 A 的大小为 $\underline{\quad\blacktriangle\quad}$.

解析:

9. 已知角 α 的终边过点 $P(-5, 12)$, 则 $\cos \alpha = \underline{\quad\quad\quad}$.

解析: $-\frac{5}{13}$

10. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的各顶点都在以 O 为球心的球面上, 且 $AB=AD=1$, $AA_1=\sqrt{2}$, 则 A 、 D_1 两点的球面距离为_____。

解析:

11. 从编号为 $0, 1, 2, \dots, 79$ 的 80 件产品中, 采用系统抽样的方法抽取容量是 5 的样本, 若编号为 28 的产品在样本中, 则该样本中产品的最大编号为 ▲。

答案: 76.

解析: 76.

12. 对于 $a, b \in R$, 记 $\max\{a, b\} = \begin{cases} a(a \geq b) \\ b(a < b) \end{cases}$, 函数

$f(x) = \max\{|x+1|, |x-2|\}$ ($x \in R$) 的最小值为_____;

(第 5 题

解析:

13. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, 则 $\complement_U(A \cap B) =$ ▲

解析: $\{2, 4, 5, 6\}$

14. 经过点 $(-2, 3)$, 且斜率为 2 的直线方程的一般式为_____。

解析: $2x - y + 7 = 0$

15. 直线 $l: ax + y - 2 - a = 0$ 在 x 轴和 y 轴上的截距相等, 则 a 的值是_____。

答案: -2 或 1 解析: 由 $a+2=$, $\therefore a=-2$ 或 1 。

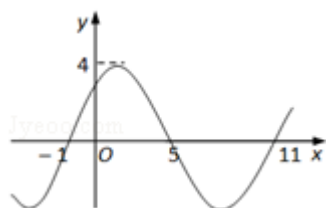
解析: -2 或 1 解析: 由 $a+2=\frac{a+2}{a}$, $\therefore a=-2$ 或 1 。

16. 设 A 、 B 是 x 轴上的两点, 点 P 的横坐标为 2, 且 $PA=PB$, 若直线 PA 的方程为 $x-y+1=0$, 则直线 PB 的方程是_____。

解析:

17. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \phi)$ ($A > 0$, $\omega > 0$, $0 \leq \phi < 2\pi$) 在 R 上的部分图象如图所示, 则

$f(x) =$ $4 \sin(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{6})$ 。(5 分)



答案：由 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 的部分图象确定其解析式. 3259693 专题：三角函数的图像与性质. 分析：由最大值可得 A ，由周期 $T=2[5-(-1)]=12$ 可求 ω ，根据 $f(-1)=0$ 及 $0\leq\phi<2\pi$ 可得 ϕ .

解：由 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 的部分图象确定其解析式. 3259693

析：

专 三角函数的图像与性质.

题：

分 由最大值可得 A ，由周期 $T=2[5-(-1)]=12$ 可求 ω ，根据 $f(-1)=0$ 及 $0\leq\phi<2\pi$ 可得 ϕ .

析： 2π 可得 ϕ .

解：由最大值得 $A=4$ ， $T=2[5-(-1)]=12$ ，则 $\frac{2\pi}{\omega}=12$ ， $\omega=\frac{\pi}{6}$ ，

答：

$$f(x)=4\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\phi\right),$$

$$\text{由 } f(-1)=0, \text{ 得 } 4\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\phi\right)=0,$$

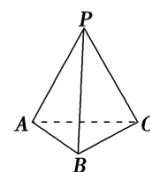
$$\text{又 } 0\leq\phi<2\pi, \text{ 所以 } \phi=\frac{\pi}{6},$$

$$\text{所以 } f(x)=4\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{6}\right),$$

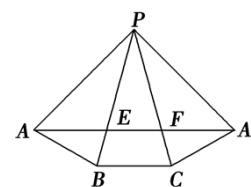
$$\text{故答案为: } 4\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{6}\right).$$

点 本题考查由 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 的部分图象确定解析式，考查数形结合思想，属中档题.

18. 如图，在四面体 $P-ABC$ 中， $PA=PB=PC=2$ ， $\angle APB=\angle BPC=\angle APC=30^\circ$ ，一只蚂蚁从 A 点出发沿着四面体的表面绕一周，再回到 A 点，问：蚂蚁沿着怎样的路径爬行时路程最短，最短路径是_____.



解析：如右图，将四面体沿 PA 剪开，并将其侧面展开平铺在一个平面上，连接 AA' 分别交 PB ， PC 于 E ， F 两点，则当蚂蚁沿着 $A \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow A'$ 路径爬行时，路程最短. 在 $\triangle APA'$ 中， $\angle APA'=90^\circ$ ， $PA=PA'=2$ ， $\therefore AA'=2\sqrt{2}$ ，即最短路程 AA' 的长为 $2\sqrt{2}$.



答案：2

解

析

:

$$2\sqrt{2}$$

评卷人	得分

三、解答题（共 12 题，总计 0 分）

19. 各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 中，设 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ， $T_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$ ，

且 $(2 - S_n)(1 + T_n) = 2$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ 。

(1) 设 $b_n = 2 - S_n$ ，证明数列 $\{b_n\}$ 是等比数列；

(2) 设 $c_n = \frac{1}{2}na_n$ ，求集合 $\{(m, k, r) | c_m + c_r = 2c_k, m < k < r, m, k, r \in \mathbf{N}^*\}$ 。

解析：(1) 当 $n=1$ 时， $(2 - S_1)(1 + T_1) = 2$ ，

即 $(2 - a_1)(1 + \frac{1}{a_1}) = 2$ ，解得 $a_1 = 1$ 。.....2 分

由 $(2 - S_n)(1 + T_n) = 2$ ，所以 $T_n = \frac{2}{2 - S_n} - 1$ ①

当 $n \geq 2$ 时， $T_{n-1} = \frac{2}{2 - S_{n-1}} - 1$ ②

①-②，得 $\frac{1}{a_n} = \frac{2}{2 - S_n} - \frac{2}{2 - S_{n-1}} = \frac{2a_n}{(2 - S_n)(2 - S_{n-1})}$ ($n \geq 2$)，.....4

分

即 $(2 - S_n)(2 - S_{n-1}) = 2[(2 - S_{n-1}) - (2 - S_n)]^2$ ，

即 $b_nb_{n-1} = 2(b_{n-1} - b_n)^2$ ，所以 $\frac{b_n}{b_{n-1}} + \frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{5}{2}$ ，

因为数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，所以数列 $\{2 - S_n\}$ 单调递减，所以 $\frac{b_n}{b_{n-1}} < 1$ 。

所以 $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{1}{2}$ ($n \geq 2$)。

因为 $a_1 = 1$ ，所以 $b_1 = 1 \neq 0$ ，

所以数列 $\{b_n\}$ 是等比数列。.....6 分

(2) 由 (1) 知 $2 - S_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$ ，所以 $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ ，即 $c_n = \frac{n}{2^n}$ 。

由 $c_m + c_r = 2c_k$ ，得 $\frac{c_m}{c_k} + \frac{c_r}{c_k} = 2$ (*)

又 $n \geq 2$ 时， $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n+1}{2n} < 1$ ，所以数列 $\{c_n\}$ 从第 2 项开始依次递减。.....8 分

(I) 当 $m \geq 2$ 时，若 $k - m \geq 2$ ，则 $\frac{c_m}{c_k} \geq \frac{c_m}{c_{m+2}} = \frac{\frac{m}{2^m}}{\frac{m+2}{2^{m+2}}} = \frac{4m}{m+2} \geq 2$ ，

(*) 式不成立，所以 $k - m = 1$ ，即 $k = m + 1$ 。.....10 分

令 $r = m + 1 + i (i \in \mathbf{N}^*)$, 则 $c_r = \frac{r}{2^{m+1+i}} = 2c_k - c_m = \frac{2(m+1)}{2^{m+1}} - \frac{m}{2^m} = \frac{2}{2^{m+1}} = \frac{2^{i+1}}{2^{m+1+i}}$,

所以 $r = 2^{i+1}$, 即存在满足题设的数组 $\{(2^{i+1} - i - 1, 2^{i+1} - i, 2^{i+1})\} (i \in \mathbf{N}^*)$ 13 分

(II) 当 $m = 1$ 时, 若 $k = 2$, 则 r 不存在; 若 $k = 3$, 则 $r = 4$;

若 $k \geq 4$ 时, $\frac{c_1}{c_k} \geq \frac{c_1}{c_4} = 2$, (*) 式不成立.

综上所述, 所求集合为 $\{(1, 3, 4), (2^{i+1} - i - 1, 2^{i+1} - i, 2^{i+1})\} (i \in \mathbf{N}^*)$ 16 分

(注: 列举出一组给 2 分, 多于一组给 3 分)

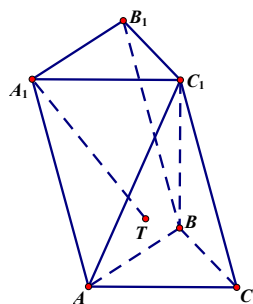
20. 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 底面 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 角 形 ,

$\angle ACB = \frac{\pi}{2}$, 顶点 C_1 在底面 $\triangle ABC$ 内的射影是点 B , 且

$AC = BC = BC_1 = 3$, 点 T 是平面 ABC_1 内一点.

(1) 若 T 是 $\triangle ABC_1$ 的重心, 求直线 A_1T 与平面 ABC_1 所成角;

(2) 是否存在点 T , 使 $TB_1 = TC$ 且平面 $TA_1C_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1 , 若存在, 求出线段 TC 的长度, 若不存在, 说明理由. (本小题满分 10 分)



解析: 解: 如图以 CB 、 CA 分别为 x 、 y 轴, 过 C 作直线 $Cz \parallel BC_1$, 以 Cz 为 z 轴

$$\therefore B(3,0,0), C(0,0,0), A(0,3,0), C_1(3,0,3)$$

$$\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CB} = (6,0,3) \Rightarrow B_1(6,0,3)$$

$$\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CA} = (3,3,3) \Rightarrow A_1(3,3,3)$$

$$(1) T \text{ 是 } \triangle ABC_1 \text{ 重心} \Rightarrow T(2,1,1) \Rightarrow \overrightarrow{TA_1} = (1,2,2)$$

$$\text{设面 } ABC_1 \text{ 的法向量为 } \vec{n_1} = (x_1, y_1, z_1), \overrightarrow{AB} = (3, -3, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - 3y_1 = 0 \\ 3x_1 - 3y_1 + 3z_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 0 \\ x_1 = y_1 \end{cases} \Rightarrow \text{取法向量 } \vec{n_1} = (1, 1, 0)$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{TA_1}, \vec{n_1} \rangle = \frac{3}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \langle \overrightarrow{TA_1}, \vec{n_1} \rangle = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{设 } TA_1 \text{ 与面 } ABC_1 \text{ 所成角为 } \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \langle \overrightarrow{TA_1}, \vec{n_1} \rangle = \frac{\pi}{4}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) T \text{ 在面 } ABC_1 \text{ 内}, \overrightarrow{CT} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BT} = \overrightarrow{CB} + m\overrightarrow{BC_1} + n\overrightarrow{BA} = (3-3n, 3n, 3m),$$

$$\text{即 } T(3-3n, 3n, 3m) \text{ 由 } TB_1 = TC \text{ 得}$$

$$(3-3n)^2 + (3n)^2 + (3m)^2 = (3n+3)^2 + (3n)^2 + (3m-3)^2 \Rightarrow -2m + 4n = -1 \quad \text{①}$$

$$\text{设面 } CAA_1C_1 \text{ 法向量为 } \vec{n_2} = (x_2, y_2, z_2), \overrightarrow{CA} = (0, 3, 0), \overrightarrow{CC_1} = (3, 0, 3)$$

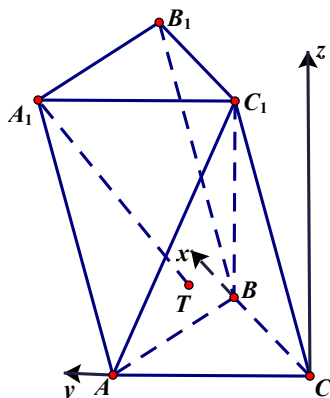
$$\Rightarrow \begin{cases} 3y_2 = 0 \\ 3x_2 + 3z_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{取 } \vec{n_2} = (1, 0, -1)$$

$$\text{设面 } TA_1C_1 \text{ 法向量为 } \vec{n_3} = (x_3, y_3, z_3), \overrightarrow{C_1A_1} = (0, 3, 0), \overrightarrow{C_1T} = (-3n, 3n, 3m-3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_3 = 0 \\ -3nx_3 + (3m-3)z_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{取 } \vec{n_3} = (m-1, 0, n), \text{ 由平面 } TA_1C_1 \perp \text{平面 } ACC_1A_1 \text{ 得}$$

$$\cos \langle \vec{n_2}, \vec{n_3} \rangle = \frac{m-1-n}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(m-1)^2 + n^2}} = 0 \Rightarrow m = n+1 \quad \text{②}$$

$$\text{由①②解得 } n = \frac{1}{2}, m = \frac{3}{2}, \therefore \text{存在点 } T\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right), TC = \frac{3\sqrt{11}}{2}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

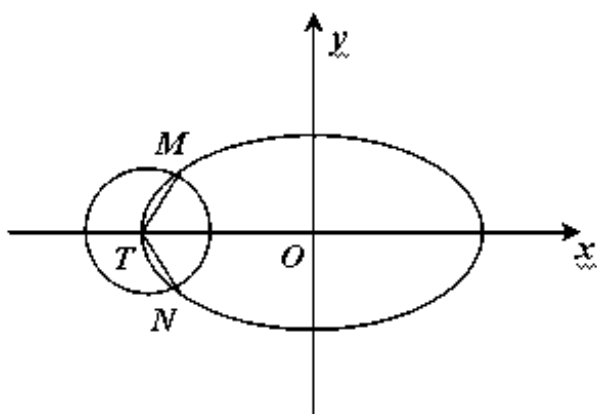


21. 如图，已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，以椭圆 C 的左顶点 T

为圆心作圆 $T: (x+2)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ ，设圆 T 与椭圆 C 交于点 M 与点 N 。

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 求 $\overrightarrow{TM} \cdot \overrightarrow{TN}$ 的最小值，并求此时圆 T 的方程；



解析：

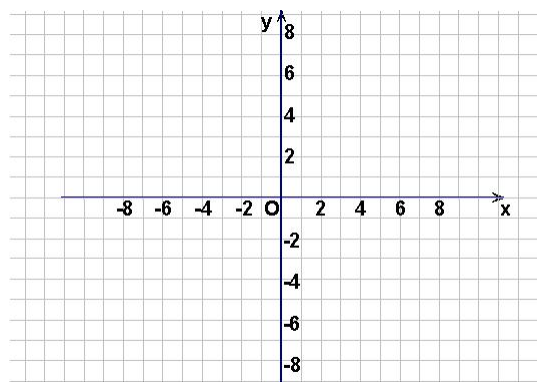
22. (本题 10 分)

$$\text{已知函数 } f(x) = \begin{cases} 2^x & (x < 0) \\ (x-1)^2 & (0 \leq x < 2) \\ 3-x & (2 \leq x \leq 4) \end{cases}$$

(I) 试作出函数 $f(x)$ 图像的简图 (请用铅笔作图，不必列表，不必写作图过程)；

(II) 请根据图像写出函数 $f(x)$ 的定义域、值域、单调区间；

(III) 若方程 $f(x) = a$ 有两解时写出 a 的取值，并求出当 $a = \frac{1}{2}$ 时方程的解。



解析：（本小题满分 10 分）

（1）图略2 分

（2）定义域 $(-\infty, 4]$ 3 分

值域 $[-1, 1]$ 4 分

单调增区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(1, 2)$ 5 分

单调减区间 $(0, 1)$ 和 $(2, 4)$ 6 分

（3） $a = 0$ 或 1 8 分

$x = -1$ 或 $x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $x = \frac{5}{2}$ 10 分

23. 在平面直角坐标系中，动点 P 到点 $M(1, 0)$ 的距离与到 y 轴的距离之和为 2，记点 P 的轨迹为 C .

（1）求轨迹 C 的方程；

（2）过原点且斜率为 k 的直线 l 与曲线 C 有两个交点 A, B (点 A 在 y 轴右侧)，若 $\overrightarrow{OA} = -3\overrightarrow{OB}$ ，求线段 AB 的长.

2012 届高三数学综合题

一、填空题:

1. 计算: $2\sin 20^\circ + \cos 10^\circ + \tan 20^\circ \cdot \sin 10^\circ =$ _____.

【答案】 $\sqrt{3}$.

【提示】原式 $= 2\sin 20^\circ + \frac{\cos 20^\circ \cos 10^\circ + \sin 20^\circ \sin 10^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\sin 40^\circ + \cos 10^\circ}{\cos 20^\circ} =$
 $\frac{\sin(60^\circ - 20^\circ) + \cos(30^\circ - 20^\circ)}{\cos 20^\circ} = \sqrt{3}$.

【说明】向特殊角转化、向单一的角转化是一般思路.

2. 已知以 1 为首项的数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1, & a_n < 3, \\ \frac{a_n}{3}, & a_n \geq 3 \end{cases}$, 则 $a_{20} =$ _____.

【答案】2.

【说明】从特殊到一般的意识, 归纳的意识.

3. 已知函数 $f(x) = a\sin \frac{2\pi}{5}x + b\tan \frac{\pi}{5}x$ (a, b 为常数, $x \in \mathbf{R}$). 若 $f(1) = -1$, 则不等式 $f(24) > \log_2 x$ 的解集为 _____.

【答案】 $(0, 2)$.

【提示】因为 $f(x)$ 的周期为 5, 所以 $f(24) = f(4)$.

因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(4) = f(-1) = -f(1) = 1$.

不等式化为 $\log_2 x < 1$, 所以 $0 < x < 2$.

【说明】本题考查函数的周期性与奇偶性, 简单的对数不等式的定义域问题.

4. 若 $0 < x < \frac{\pi}{4}$, 则函数 $y = \frac{\tan^3 x}{\tan 2x}$ 的最大值为 _____.

【答案】 $\frac{1}{8}$.

【提示】因为 $y = \frac{1}{2}\tan^2 x(1 - \tan^2 x) \leq \frac{1}{8}$, 当且仅当 $\tan x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 取等号.

【说明】本题考查三角函数最值, 换元的思想, 二次函数最值.

5. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的单调函数, 且对任意的 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $f[f(x) - x^3] = 2$, 则过点 $(1, 2)$ 且与曲线 $y = f(x)$ 相切的直线方程是 _____.

【答案】 $3x - y - 1 = 0$, 或 $3x - 4y + 5 = 0$.

【提示】因为 $f(x)$ 为单调函数, 故 $f(x) - x^3 = a$ (a 为常数), 即 $f(x) = x^3 + a$.

而条件化为 $f(a) = 2$, 代入得 $a^3 + a = 2$, 所以 $a = 1$, 即 $f(x) = x^3 + 1$.

可以求得切点为 $(1, 2)$ 或 $(-\frac{1}{2}, \frac{7}{8})$.

【说明】考查函数的单调性的应用, 过曲线上某点的切线与曲线在某点处的切线的区别.

6. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 若 $a_1^2 + a_5^2 \leq 10$, 则 $a_5 + a_6 + \cdots + a_9$ 的最大值是 _____.

【答案】25.

【提示】令 $a_1 = x$, $a_5 = y$, 则条件化为 $x^2 + y^2 \leq 10$. 因为 $a_5 + a_6 + \cdots + a_9 = \frac{15}{2}y - \frac{5}{2}x$, 转化为

直线与圆的位置关系求解.

【说明】考查等差数列基本量, 数形结合思想的应用.

7. 设正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n , 若 $\{a_n\}$ 和 $\{\sqrt{S_n}\}$ 都是等差数列, 且公差相等, 则 a_1 = _____.

【答案】 $\frac{1}{4}$.

【提示】由 $\{\sqrt{S_n}\}$ 为等差数列得, $S_n = d^2 n^2$. 且 $a_1 = \frac{d}{2}$. 再根据 $a_1 = S_1$ 得, $d = \frac{1}{2}$.

【说明】等差数列的通项公式 a_n 与前 n 项和 S_n 的特征.

8. 设抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 点 $A(0, 3)$. 点 P 在抛物线上且满足 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PF}$, 则 P 到该抛物线准线的距离为 _____.

【答案】 $\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

【提示】由 $F(\frac{p}{2}, 0)$, $A(0, 3)$ 可得 $P(\frac{p}{6}, 2)$, 代入 $y^2 = 2px$ 得 $4 = \frac{p^2}{3}$, 解得 $p = 2\sqrt{3}$. 所以 P

到抛物线准线的距离为 $\frac{p}{6} + \frac{p}{2} = \frac{2p}{3} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$.

【说明】本题主要考查抛物线的方程与性质, 以及与定比分点相关的运算.

9. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 过双曲线右焦点 F 且垂直于 x 轴的直线与双曲线及其渐近线分别交于点 M, N , 且 M, N 都在第一象限. 若 $MN = \frac{a}{3}$, 则双曲线的离心率为 _____.

【答案】 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

【提示】令 $x = c$, 可得 $M(c, \frac{b^2}{a})$, $N(c, \frac{bc}{a})$. 所以 $MN = \frac{bc}{a} - \frac{b^2}{a} = \frac{a}{3}$, 即 $b(c - b) = \frac{1}{3}a^2 = \frac{1}{3}(c^2 - b^2)$, 化简得 $c = 2b$, 从而 $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$. 所以离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

【说明】本题主要考查双曲线的渐近线与离心率等基本量的运算.

10. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $l: x - y + 3 = 0$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 相交于 A, B 两点. 若 $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} = \sqrt{3}\overrightarrow{OC}$, 且点 C 也在圆 O 上, 则圆 O 的半径 $r =$ _____.

【答案】 $3\sqrt{2}$.

【提示】将 $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} = \sqrt{3}\overrightarrow{OC}$ 两边平方得: $\overrightarrow{OA}^2 + 4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OB}^2 = 3\overrightarrow{OC}^2$,

即 $r^2 + 4r^2 \cos \angle AOB + 4r^2 = 3r^2$, 整理得 $\cos \angle AOB = -\frac{1}{2}$, 即 $\angle AOB = \frac{2\pi}{3}$.

因为圆心 O 到直线 l 的距离 $d = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 所以 $r = 2d = 3\sqrt{2}$.

【说明】本题主要考查直线与圆的相交位置关系, 以及向量的基本运算.

11. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点为 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, P 为该椭圆上一点,

且 $\vec{PF}_1 \cdot \vec{PF}_2 = c^2$, 则此椭圆离心率的取值范围是_____.

【答案】 $[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

【提示】 设 $P(x, y)$, 则 $\vec{PF}_1 \cdot \vec{PF}_2 = x^2 + y^2 - c^2 = c^2$, 即 $x^2 + y^2 = 2c^2$.

因为 P 在椭圆上, 故令 $b \leq \sqrt{2}c \leq a$, 解得 $e = \frac{c}{a} \in [\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

【说明】 本题主要考查椭圆的离心率的取值范围, 考查代数运算求解能力.

12. 如图在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 120^\circ$, $AB = 1$, $AC = 2$, D 为 BC 边上

一点 $\vec{DC} = 2\vec{BD}$, 则 $\vec{AD} \cdot \vec{BC} =$ _____.

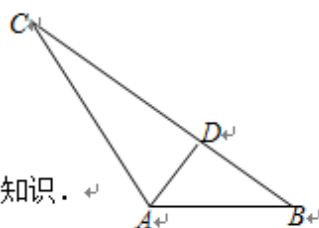
【答案】 $\frac{1}{3}$.

【说明】 本题涉及利用基底来表示向量, 向量的数量积运算等知识.

解决与几何图形有关的向量问题通常用有两种方法:

① 选择一组基底, 把所求向量用基底表示, 然后进行运算;

② 建立适当的直角坐标系, 利用坐标来表示向量, 把向量运算转化为坐标运算.



变式: 若条件改为 $\vec{DC} = \lambda \vec{BD}$, 则 $\vec{AD} \cdot \vec{BC}$ 的取值范围为_____.

【答案】 $(-2, 5]$.

13. 已知函数 $f(x) = 2\cos 2x + \sin^2 x - 4\cos x$, $x \in \mathbf{R}$, 则函数 $f(x)$ 的最大值为_____.

【答案】 6.

【说明】 这种类型的问题, 经过化简, 常常转化为两种形式, 一是 $g(\sin x)$ 的形式(升幂), 另

一是 $A\sin(\omega x + \phi)$ 的形式. 同时应注意 x 的范围.

14. 已知一个底面为正方形的长方体容器, 若下底面和四个侧面的面积和 27, 则当容器的容积最大时, 底面边长的值为_____.

【答案】 3.

【说明】 这是一个以立体几何图形为背景的函数题. 总体思路是设变量(选哪个量做自变量?

有些题可以选两个), 构建目标函数(注意定义域), 解决目标函数(不等式的方法、导数的方法等).

二、解答题：↵

1. 设函数 $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3}) + \sin^2 x - \frac{1}{2}$. ↵

(1) 当 $x \in [0, \pi]$ 时, 求 $f(x)$ 的单调递减区间; ↵

(2) 当 $f(\alpha - \frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, 求 $f(2\alpha)$ 的值. ↵

解: (1) $f(x) = \cos 2x \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin 2x \cdot \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x$. ↵

$f(x)$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 上的单调减区间为 $[k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}]$, $k \in \mathbf{Z}$. ↵

当 $k=0, 1$ 时, 对应的单调减区间为 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, $[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$, ↵

因为 $x \in [0, \pi]$, 所以 $f(x)$ 在 $x \in [0, \pi]$ 上的单调减区间为 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 和 $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$. ↵

(2) 由条件得 $-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin(2\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin(2\alpha - \frac{\pi}{4}) = -\frac{2}{3}$. ↵

所以, $f(2\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 4\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(4\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2(2\alpha - \frac{\pi}{4})$
 $= -\frac{\sqrt{3}}{2} [1 - 2\sin^2(2\alpha - \frac{\pi}{4})] = -\frac{\sqrt{3}}{2} [1 - 2 \times (-\frac{2}{3})^2] = -\frac{\sqrt{3}}{18}$. ↵

【说明】考查三角恒等变形, 三角函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的性质. 突出降幂、变角常用技巧应用. ↵

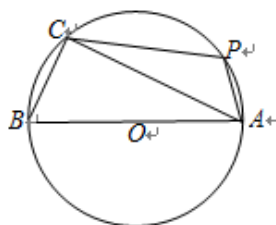
2. 在 $\triangle ABC$ 中, 三个内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{b}{a} = \sqrt{3}$. ↵

(1) 求 C ; ↵

(2) 如图, 设半径为 R 的圆 O 过 A, B, C 三点, 点 P 位于劣

弧 $\widehat{AC}$ 上, $\angle PAB = \theta$, 求四边形 $APCB$ 面积 $S(\theta)$ 的解析式及

最大值. ↵



解: (1) 由条件得 $\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{\sin B}{\sin A}$, 所以 $\sin 2A = \sin 2B$. ↵

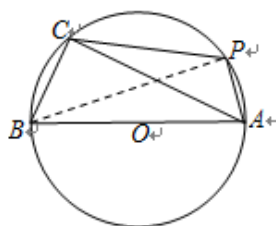
因为 $2A, 2B \in (0, 2\pi)$, 所以 $2A = 2B$ 或 $2A + 2B = \pi$. ↵

即 $A = B$ 或 $A + B = \frac{\pi}{2}$. ↵

因为 $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$, 所以 $A = B$ 舍去, 从而 $C = \frac{\pi}{2}$. ↵

(2) 由条件得 $c = 2R$, $a = R$, $b = \sqrt{3}R$, $\angle BAC = \frac{\pi}{6}$, $\angle CAP = \theta - \frac{\pi}{6}$, $\theta \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$. ↵

$S(\theta) = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle APC} = \frac{\sqrt{3}}{2} R^2 + \frac{1}{2} AC \cdot AP \cdot \sin(\theta - \frac{\pi}{6})$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} R^2 + \frac{1}{2} \sqrt{3} R \cdot 2R \cos \theta \sin(\theta - \frac{\pi}{6})$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} R^2 + \sqrt{3} R^2 \cos \theta (\sin \theta \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos \theta \frac{1}{2})$



$$= \frac{\sqrt{3}}{2}R^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}R^2(\sqrt{3}\sin 2\theta - \cos 2\theta - 1)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}R^2\sin(2\theta - \frac{\pi}{6}), \theta \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}),$$

因为 $2\theta - \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$, 所以当 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时, $S(\theta)_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

【说明】考查解三角形的基本方法, 突出边角互化, 注意角的范围. 考查研究三角形中最值的基本方法.

3. 设 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$, 且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = -2$, $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{c} - \mathbf{b}$ 的夹角为 150° .

(1) 求 $|\mathbf{b}|$;

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解: (1) 因为 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 所以 $\mathbf{b} = -\mathbf{a} - \mathbf{c}$.

由 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ 得: $\mathbf{a} \cdot (-\mathbf{a} - \mathbf{c}) = (-\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{c}$.

所以 $|\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{c}|^2$.

代入得 $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \cdot \cos(\pi - A) = -2$,

即 $|\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \cdot \frac{|\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{a}|^2}{2|\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}|} = 2$, 解得 $|\mathbf{b}| = 2$.

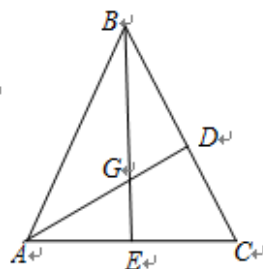
(2) 解法一: 取 BC 中点 D , 连结 AD , 则 $\mathbf{c} - \mathbf{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$.

因为 $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{c} - \mathbf{b}$ 的夹角为 150° , 所以 $\angle CAD = 30^\circ$.

取 AC 中点 E , 连结 BE .

因为 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{c}|$, 所以 $BE \perp AC$.

设 $AD \cap BE = G$, 则 $BE = 3DG$.



在 $\triangle AEG$ 中, $AE = \frac{1}{2}|\mathbf{b}| = 1$, $\angle GAE = 30^\circ$, 所以 $EG = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以 $BE = \sqrt{3}$. 从而 $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$.

解法二: 由 (1) 知 $\triangle ABC$ 为等腰三角形, 以 AC 所在直线为 x 轴,

AC 边上的中线所在直线为 y 轴, 建立直角坐标系, 则 $A(-1, 0)$,

$C(1, 0)$, 设 $B(0, h)$, $\mathbf{b} = (-2, 0)$, $\mathbf{c} - \mathbf{b} = (3, h)$.

因为 $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{c} - \mathbf{b}$ 的夹角为 150° , 所以 $\frac{-6}{2 \times \sqrt{9+h^2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 解得 $h = \sqrt{3}$.

所以 $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$.

【说明】考查向量数量积的几何运算与坐标运算, 向量运算的几何意义, 余弦定理、面积公式. 注意条件的合理转化.

4. 如图, 空间几何体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ABCD$ 是菱形, 直角梯形 $ADFE$ 所在平面与面 $ABCD$ 垂直, 且 $AE \perp AD$, $EF \parallel AD$, 其中 P, Q 分别为棱 BE, DF 的中点.

(1) 求证: $BD \perp CE$;

(2) 求证: $PQ \parallel$ 平面 $ABCD$.

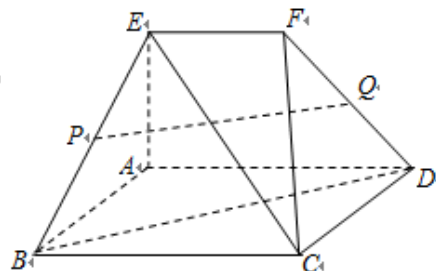
证明: (1) 连接 AC , 在菱形 $ABCD$ 中, $AC \perp BD$.

因为平面 $ADFE \perp$ 平面 $ABCD$, 交线为 AD ,

而 $AE \perp AD$, $AE \subset$ 平面 $ADFE$,

所以 $AE \perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $BD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $AE \perp BD$.



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。
。如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/496022034200011103>