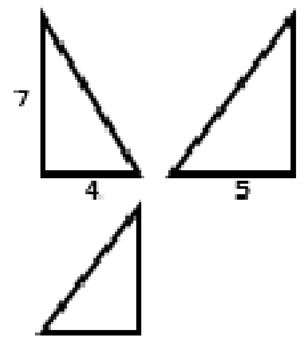
2023年高考数学模拟试卷

注意事项：
1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．我国古代数学名著《九章算术》有一问题：“今有鳖臑(*biē naò*)，下广五尺，无袤；上袤四尺，无广；高七尺.问积几何？”该几何体的三视图如图所示，则此几何体外接球的表面积为(　　)



A．90π 平方尺　　**B**．180π 平方尺

C．360π 平方尺　　**D**．$135\sqrt{10}\pi$ 平方尺

2．复数z满足$z-1=(z+1)i$ (i为虚数单位),则z的值是(　　)

A．$1+i$　　**B**．$1-i$　　**C**．i　　**D**．$-i$

3．已知a，b，c分别是$\triangle ABC$ 三个内角A，B，C的对边，$a\cos C+\sqrt{3}c\sin A=b+c$，则$A=$（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　**B**．$\frac{\pi}{4}$　　**C**．$\frac{\pi}{3}$　　**D**．$\frac{2\pi}{3}$

4．已知m，n是两条不重合的直线，α是一个平面，则下列命题中正确的是（　　）

A．若$m//\alpha$，$n//\alpha$，则$m//n$　　**B**．若$m//\alpha$，$n\subset\alpha$，则$m//n$

C．若$m\perp n$，$m\perp\alpha$，则$n//\alpha$　　**D**．若$m\perp\alpha$，$n//\alpha$，则$m\perp n$

5．已知抛物线$C:y^2=4px(p>0)$的焦点为F，过焦点的直线与抛物线分别交于A、B两点，与y轴的正半轴交于点S，与准线l交于点T，且$|FA|=2|AS|$，则$\frac{|FB|}{|TS|}=$（　　）

A．$\frac{2}{5}$　　**B**．**2**　　**C**．$\frac{7}{2}$　　**D**．**3**

6．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$(S_n+1)(S_{n+2}+1)=(S_{n+1}+1)^2\ (n\in\mathrm{N}^*)$，$a_1=1, a_2=2$，则$S_n=$(　　)

A．$\frac{n(n+1)}{2}$　　**B**．2^{n+1}　　**C**．2^n-1　　**D**．$2^{n+1}+1$

7．已知函数 $f\left(x\right)=3\sin\left(\omega x+\varphi\right)$，$\left(\omega>0,0<\varphi<\pi\right)$，若 $f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$，对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒有 $f\left(x\right)\leq\left|f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right|$，在区间 $\left(\dfrac{\pi}{15},\dfrac{\pi}{5}\right)$ 上有且只有一个 x_1 使 $f\left(x_1\right)=3$，则 ω 的最大值为（　　）

A． $\dfrac{123}{4}$　　**B．** $\dfrac{111}{4}$　　**C．** $\dfrac{105}{4}$　　**D．** $\dfrac{117}{4}$

8．已知无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 **2**，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2n-1}})=\dfrac{2}{3}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_4}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2n}})=$（　　）

A． $\dfrac{1}{3}$　　**B．** $\dfrac{2}{3}$　　**C．** 1　　**D．** $\dfrac{4}{3}$

9．已知函数 $f\left(x\right)=2\sin\left(\omega x+\varphi\right)+b\left(\omega>0\right)$，$f(\dfrac{\pi}{8}+x)=f(\dfrac{\pi}{8}-x)$，且 $f(\dfrac{\pi}{8})=5$，则 $b=$（　　）

A．3　　**B．3 或 7**　　**C．5**　　**D．5 或 8**

10．体育教师指导 **4** 个学生训练转身动作，预备时，**4** 个学生全部面朝正南方向站成一排**.**训练时，每次都让 **3** 个学生“向后转”，若 **4** 个学生全部转到面朝正北方向，则至少需要“向后转”的次数是（　　）

A．3　　**B．4**　　**C．5**　　**D．6**

11．已知函数 $f\left(x\right)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}+x+1$ 且 $f\left(a\right)+f\left(a+1\right)>2$，则实数 a 的取值范围是(　　)

A． $\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$　　**B．** $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$　　**C．** $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　　**D．** $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

12．已知集合 $A=\left\{x\mid x\leq a,a\in R\right\}$，$B=\left\{x\mid 2^x<16\right\}$，若 $A\subsetneqq B$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A． $\varnothing$　　**B．** R　　**C．** $\left(-\infty,4\right]$　　**D．** $\left(-\infty,4\right)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．函数 $f\left(x\right)=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-4\right)+x-1$ 的值域为_____**.**

14．已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_1=1$，对任意 $n\geq 2$ $n\in\mathrm{N}^*$，$\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n-1}}=2^{n-1}$，则数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式 $a_n=$__________**.**

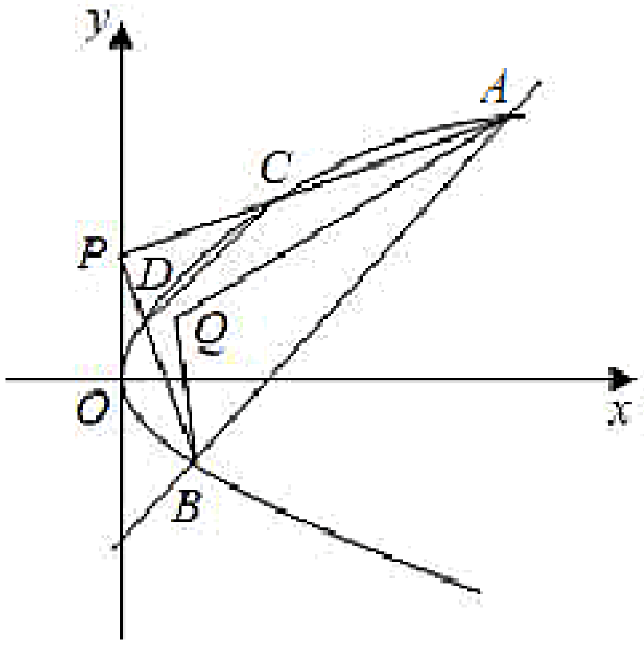
15．已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$），直线 l：$x=4a$ 与双曲线 C 的两条渐近线分别交于 A，B 两点**.** 若 ΔOAB（点 O 为坐标原点）的面积为 **32**，且双曲线 C 的焦距为 $2\sqrt{5}$，则双曲线 C 的离心率为________**.**

16．在二项式 $\left(x^2+2\right)^6$ 的展开式中，x^8 的系数为________**.**

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）已知点 $P\left(0,1\right)$，直线 $y=x+t\left(t<0\right)$ 与抛物线 $y^2=2x$ 交于不同两点 A、B，直线 PA、PB 与抛物线

的另一交点分别为两点C、D，连接CD，点P关于直线CD的对称点为点Q，连接AQ、BQ．



（**1**）证明：$AB//CD$；

（**2**）若ΔQAB的面积$S\geq 1-t$，求t的取值范围．

18．（12 分）设函数$f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})+\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，$x\in R$**.**

(*I*)求$f(x)$的最小正周期；

(*II*)若$\alpha\in(\frac{\pi}{6},\pi)$且$f(\frac{\alpha}{2})=\frac{1}{2}$，求$\sin(2\alpha+\frac{\pi}{6})$的值**.**

19．（12 分）已知变换T将平面上的点$\left(1,\frac{1}{2}\right)$，$(0,1)$分别变换为点$\left(\frac{9}{4},-2\right)$，$\left(-\frac{3}{2},4\right)$．设变换$T$对应的矩阵为$M$．

（**1**）求矩阵M；

（**2**）求矩阵M的特征值．

20．（12 分）已知函数$f\left(x\right)=a\left(x-\ln x\right)+x^2-2x$．

（**1**）当$a=-2e$（e为自然对数的底数）时，求函数$f\left(x\right)$的极值；

（**2**）$f'\left(x\right)$为$y=f\left(x\right)$的导函数，当$a>0$，$x_1>x_2>0$时，求证：$f\left(x_1\right)-f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)x_1<f\left(x_2\right)-f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)x_2$．

21．（12 分）设函数$f(x)=\ln x-ax$，$a\in R$，$a\neq 0$**.**

（**1**）求函数$f(x)$的单调区间；

（**2**）若函数$f(x)=0$有两个零点x_1，x_2($x_1<x_2$)**.**

（***i***）求a的取值范围；

（*ii*）求证：$x_1 \cdot x_2$随着$\frac{x_2}{x_1}$的增大而增大.

22.（10分）对于很多人来说，提前消费的认识首先是源于信用卡，在那个工资不高的年代，信用卡绝对是神器，稍微大件的东西都是可以选择用信用卡来买，甚至于分期买，然后慢慢还！现在银行贷款也是很风靡的，从房贷到车贷到一般的现金贷．信用卡“忽如一夜春风来”，遍布了各大小城市的大街小巷．为了解信用卡在A市的使用情况，某调查机构借助网络进行了问卷调查，并从参与调查的网友中随机抽取了**100**人进行抽样分析，得到如下2×2列联表（单位：人）

	经常使用信用卡	偶尔或不用信用卡	合计
40岁及以下	**15**	**35**	**50**
40岁以上	**20**	**30**	**50**
合计	**35**	**65**	**100**

（**1**）根据以上数据，能否在犯错误的概率不超过**0.10**的前提下认为A市使用信用卡情况与年龄有关？

（**2**）①现从所抽取的**40**岁及以下的网民中，按“经常使用”与“偶尔或不用”这两种类型进行分层抽样抽取**10**人，然后，再从这**10**人中随机选出**4**人赠送积分，求选出的**4**人中至少有**3**人偶尔或不用信用卡的概率；

②将频率视为概率，从A市所有参与调查的**40**岁以上的网民中随机抽取**3**人赠送礼品，记其中经常使用信用卡的人数为X，求随机变量X的分布列、数学期望和方差.

参考公式：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$.

参考数据：

$P\left(K^2\geqslant k_0\right)$	**0.15**	**0.10**	**0.05**	**0.025**	**0.010**
k_0	**2.072**	**2.706**	**3.841**	**5.024**	**6.635**

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．**A**

【解析】

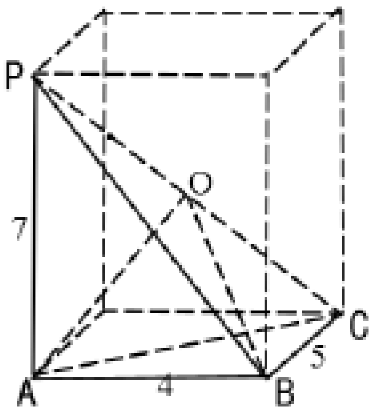
根据三视图得出原几何体的立体图是一个三棱锥，将三棱锥补充成一个长方体，此长方体的外接球就是该三棱锥的外接球，由球的表面积公式计算可得选项.

【详解】

由三视图可得，该几何体是一个如图所示的三棱锥 $P-ABC$，O 为三棱锥外接球的球心，此三棱锥的外接球也是此三棱锥所在的长方体的外接球，所以 O 为 PC 的中点， 设球半径为 R，则

$R^2=\left(\frac{1}{2}PC\right)^2=\frac{1}{4}\left(AB^2+BC^2+PA^2\right)=\frac{1}{4}\left(4^2+5^2+7^2\right)=\frac{45}{2}$,所以外接球的表面积 $S=4\pi R^2=4\pi\times\frac{45}{2}=90\pi$，

故选：**A**.



【点睛】

本题考查求几何体的外接球的表面积，关键在于由几何体的三视图得出几何体的立体图，找出外接球的球心位置和半径，属于中档题.

2．**C**

【解析】

直接利用复数的除法的运算法则化简求解即可.

【详解】

由 $z-1=(z+1)i$ 得：$z=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)}=i$

本题正确选项：C

【点睛】

本题考查复数的除法的运算法则的应用，考查计算能力.

3．**C**

【解析】

原式由正弦定理化简得 $\sqrt{3}\sin C\sin A=\cos A\sin C+\sin C$，由于 $\sin\ C\neq 0$，$0<A<\pi$ 可求 A 的值.

【详解】

解：由 $a\cos C+\sqrt{3}c\sin A=b+c$ 及正弦定理得 $\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin C\sin A=\sin B+\sin C$．

因为 $B=\pi-A-C$，所以 $\sin B=\sin A\cos C+\cos A\sin C$ 代入上式化简得 $\sqrt{3}\sin C\sin A=\cos A\sin C+\sin C$．

由于 $\sin\ C\neq 0$，所以 $\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

又 $0<A<\pi$，故 $A=\frac{\pi}{3}$.

故选：**C.**

【点睛】

本题主要考查正弦定理解三角形，三角函数恒等变换等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力，属于中档题.

4．**D**

【解析】

利用空间位置关系的判断及性质定理进行判断.

【详解】

解：选项 **A** 中直线 m，n 还可能相交或异面，

选项 **B** 中 m，n 还可能异面，

选项 **C**，由条件可得 $n//\alpha$ 或 $n\subset\alpha$.

故选：**D.**

【点睛】

本题主要考查直线与平面平行、垂直的性质与判定等基础知识；考查空间想象能力、推理论证能力，属于基础题.

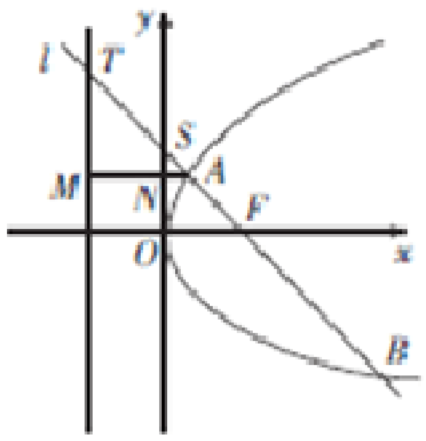
5．**B**

【解析】

过点 A 作准线的垂线，垂足为 M，与 y 轴交于点 N，由 $|FA|=2|AS|$ 和抛物线的定义可求得 $|TS|$，利用抛物线的性质 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{2p}$ 可构造方程求得 $|BF|$，进而求得结果.

【详解】

过点 A 作准线的垂线，垂足为 M，AM 与 y 轴交于点 N，



由抛物线解析式知：$F\left(p,0\right)$，准线方程为 $x=-p$.

$\because\left|FA\right|=2\left|AS\right|$，$\therefore\dfrac{|SA|}{|SF|}=\dfrac{1}{3}$，$\therefore\left|AN\right|=\dfrac{1}{3}\left|OF\right|=\dfrac{p}{3}$，$\therefore\left|AM\right|=\dfrac{4}{3}p$，

由抛物线定义知：$\left|AF\right|=\left|AM\right|=\dfrac{4}{3}p$，$\therefore\left|AS\right|=\dfrac{1}{2}\left|AF\right|=\dfrac{2}{3}p$，$\therefore\left|SF\right|=2p$，

$\therefore\left|TS\right|=\left|SF\right|=2p$.

由抛物线性质 $\dfrac{1}{\left|AF\right|}+\dfrac{1}{\left|BF\right|}=\dfrac{2}{2p}=\dfrac{1}{p}$ 得：$\dfrac{3}{4p}+\dfrac{1}{\left|BF\right|}=\dfrac{1}{p}$，解得：$\left|BF\right|=4p$，

$\therefore\dfrac{\left|FB\right|}{\left|TS\right|}=\dfrac{4p}{2p}=2$.

故选：B.

【点睛】

本题考查抛物线定义与几何性质的应用，关键是熟练掌握抛物线的定义和焦半径所满足的等式.

6．**C**

【解析】

根据已知条件判断出数列 $\left\{S_n+1\right\}$ 是等比数列，求得其通项公式，由此求得 S_n.

【详解】

由于 $\left(S_n+1\right)\left(S_{n+2}+1\right)=\left(S_{n+1}+1\right)^2\ (n\in\mathrm{N}^*)$，所以数列 $\left\{S_n+1\right\}$ 是等比数列，其首项为 $S_1+1=a_1+1=2$，第二项为 $S_2+1=a_1+a_2+1=4$，所以公比为 $\dfrac{4}{2}=2$.所以 $S_n+1=2^n$，所以 $S_n=2^n-1$.

故选：**C**

【点睛】

本小题主要考查等比数列的证明，考查等比数列通项公式，属于基础题.

7．**C**

【解析】

根据$f(x)$的零点和最值点列方程组，求得ω,φ的表达式（用k表示），根据$f(x_1)$在$\left(\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{5}\right)$上有且只有一个最大值，求得$\omega$的取值范围，求得对应$k$的取值范围，由$k$为整数对$k$的取值进行验证，由此求得$\omega$的最大值.

【详解】

由题意知$\begin{cases}-\frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_1\pi,\\ \frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_2\pi+\frac{\pi}{2},\end{cases}$ $k_1,k_2\in Z$，则$\begin{cases}\omega=\frac{3(2k+1)}{4},\\ \varphi=\frac{(2k'+1)\pi}{4},\end{cases}$其中$k=k_1-k_2$，$k'=k_2+k_1$.

又$f(x_1)$在$\left(\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{5}\right)$上有且只有一个最大值，所以$\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{15}=\frac{2\pi}{15}\le 2T$，得$0<\omega\le 30$，即$\frac{3(2k+1)}{4}\le 30$，所以$k\le 19.5$，又$k\in Z$，因此$k\le 19$.

①当$k=19$时，$\omega=\frac{117}{4}$，此时取$\varphi=\frac{3\pi}{4}$可使$\begin{cases}-\frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_1\pi,\\ \frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_2\pi+\frac{\pi}{2},\end{cases}$成立，当$x\in\left(\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{5}\right)$时，

$\frac{117}{4}x+\frac{3\pi}{4}\in(2.7\pi,6.6\pi)$，所以当$\frac{117}{4}x_1+\frac{3\pi}{4}=4.5\pi$或$6.5\pi$时，$f(x_1)=3$都成立，舍去；

②当$k=18$时，$\omega=\frac{111}{4}$，此时取$\varphi=\frac{\pi}{4}$可使$\begin{cases}-\frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_1\pi,\\ \frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_2\pi+\frac{\pi}{2},\end{cases}$成立，当$x\in\left(\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{5}\right)$时，$\frac{111}{4}x+\frac{\pi}{4}\in(2.1\pi,5.8\pi)$，

所以当$\frac{111}{4}x_1+\frac{\pi}{4}=2.5\pi$或$4.5\pi$时，$f(x_1)=3$都成立，舍去；

③当$k=17$时，$\omega=\frac{105}{4}$，此时取$\varphi=\frac{3\pi}{4}$可使$\begin{cases}-\frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_1\pi,\\ \frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_2\pi+\frac{\pi}{2},\end{cases}$成立，当$x\in\left(\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{5}\right)$时，$\frac{105}{4}x+\frac{3\pi}{4}\in(2.5\pi,6\pi)$，

所以当$\frac{105}{4}x_1+\frac{3\pi}{4}=4.5\pi$时，$f(x_1)=3$成立；

综上所得ω的最大值为$\frac{105}{4}$.

故选:**C**

【点睛】

本小题主要考查三角函数的零点和最值，考查三角函数的性质，考查化归与转化的数学思想方法，考查分类讨论的数

学思想方法，属于中档题.

8．**A**

【解析】

依据无穷等比数列求和公式，先求出首项a_1，再求出a_2，利用无穷等比数列求和公式即可求出结果。

【详解】

因为无穷等比数列$\{a_n\}$的公比为**2**，则无穷等比数列$\{\frac{1}{a_n}\}$的公比为$\frac{1}{2}$。

由$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{2n-1}})=\frac{2}{3}$有，$\frac{\frac{1}{a_1}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$，解得$a_1=2$，所以$a_2=4$，

$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_4}+\cdots+\frac{1}{a_{2n}})=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$，故选**A**。

【点睛】

本题主要考查无穷等比数列求和公式的应用。

9．**B**

【解析】

根据函数的对称轴$x=\frac{\pi}{8}$以及函数值，可得结果.

【详解】

函数$f\left(x\right)=2\sin\left(\omega x+\varphi\right)+b\left(\omega>0\right)$，

若$f(\frac{\pi}{8}+x)=f(\frac{\pi}{8}-x)$，则$f\left(x\right)$的图象关于$x=\frac{\pi}{8}$对称，

又$f(\frac{\pi}{8})=5$，所以$2+b=5$或$-2+b=5$，

所以b的值是**7**或**3.**

故选：***B.***

【点睛】

本题考查的是三角函数的概念及性质和函数的对称性问题，属基础题

10．**B**

【解析】

通过列举法，列举出同学的朝向，然后即可求出需要向后转的次数.

【详解】

“正面朝南”“正面朝北”分别用“∧”“∨”表示，

利用列举法，可得下表，

原始状态	第 **1** 次“向后转”	第 **2** 次“向后转”	第 **3** 次“向后转”	第 **4** 次“向后转”
∧∧∧∧	∧∨∨∨	∨∨∧∧	∧∧∧∨	∨∨∨∨

可知需要的次数为 **4** 次**.**

故选：**B.**

【点睛】

本题考查的是求最小推理次数，一般这类题型构造较为巧妙，可通过列举的方法直观感受，属于基础题**.**

11．**B**

【解析】

构造函数 $F\left(x\right)=f\left(x\right)-1$，判断出 $F\left(x\right)$ 的单调性和奇偶性，由此求得不等式 $f\left(a\right)+f\left(a+1\right)>2$ 的解集**.**

【详解】

构造函数 $F\left(x\right)=f\left(x\right)-1=\ln\dfrac{1+x}{1-x}+x$，由 $\dfrac{1+x}{1-x}>0$ 解得 $-1<x<1$，所以 $F\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(-1,1\right)$，且

$F\left(-x\right)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}-x=-\ln\dfrac{1-x}{1+x}-x=-\left(\ln\dfrac{1-x}{1+x}+x\right)=-F\left(x\right)$，所以 $F\left(x\right)$ 为奇函数，而

$F\left(x\right)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}+x=\ln\left(-1+\dfrac{2}{1-x}\right)+x$，所以 $F\left(x\right)$ 在定义域上为增函数，且 $F\left(0\right)=\ln1+0=0$**.**由

$f\left(a\right)+f\left(a+1\right)>2$ 得 $f\left(a\right)-1+f\left(a+1\right)-1>0$，即 $F\left(a\right)+F\left(a+1\right)>0$，所以 $\begin{cases}a+a+1>0\\-1<a<1\\-1<a+1<1\end{cases}\Rightarrow-\dfrac{1}{2}<a<0$**.**

故选：**B**

【点睛】

本小题主要考查利用函数的单调性和奇偶性解不等式，属于中档题**.**

12．**D**

【解析】

先化简 $B=\left\{x\,|\,2^x<16\right\}=\left\{x\,|\,x<4\right\}$，再根据 $A=\left\{x\,|\,x\le a,a\in R\right\}$，且 $A\subsetneqq B$ 求解**.**

【详解】

因为 $B=\left\{x\,|\,2^x<16\right\}=\left\{x\,|\,x<4\right\}$，