专题22　　矩形性质与判定

中考命题解读

矩形是一种特殊的平行四边形,也是中考的必考内容.为考查同学们分析能力、想象能力、探究能力和创新能力,矩形开放题便成了各地中考命题的热点。

考标要求

1.掌握矩形的概念、判定和性质, 会用矩形的性质和判；

2.会运用矩形的知识解决有关矩形定解决简单问题问题。

考点精讲

考点1：矩形的定义

有一个角是直角的平行四边形叫做矩形.

考点2：矩形的性质

矩形是特殊的平行四边形，它具有平行四边形的所有性质， 还具有自己独特的性质：

① 边的性质：对边平行且相等.

② 角的性质：四个角都是直角.

③ 对角线性质：对角线互相平分且相等.

④ 对称性：矩形是中心对称图形，也是轴对称图形.

直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

直角三角形中，$30°$角所对的边等于斜边的一半.

点评：这两条直角三角形的性质在教材上是应用矩形的对角线推得，用三角形知识也可推得.

考点3：矩形的判定

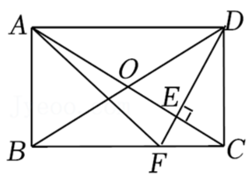
判定①：有一个角是直角的平行四边形是矩形.

判定②：对角线相等的平行四边形是矩形.

判定③：有三个角是直角的四边形是矩形.

母题精讲

【典例1】（2022春•开州区期末）如图，在矩形$ABCD$中，对角线AC、BD相交于点O，DF垂直平分OC，交AC于点E，交BC于点F，连接AF，若$BD=2\sqrt{3}$，$DF=2$，则AF的长为（　　）



A．$\sqrt{6}$　　　B．$2\sqrt{2}$　　　C．$\sqrt{7}$　　　D．3

【答案】C

【解答】解：∵四边形$ABCD$是矩形.

∴$AB=CD$，$OD=\frac{1}{2}BD=\sqrt{3}$.

∵DF垂直平分OC.

∴$CD=OD=\sqrt{3}$.

∴$AB=CD=\sqrt{3}$.

在Rt△BCD中，

$BC=\sqrt{BD^2-CD^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}=3$.

在Rt△DCF中，

$CF=\sqrt{DF^2-DC^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$.

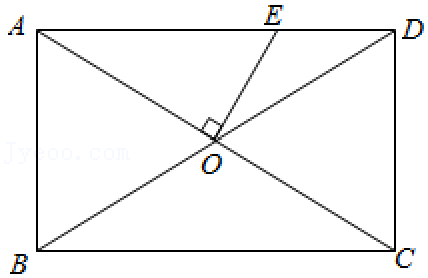
∴$BF=BC-CF=3-1=2$.

在Rt△ABF中，

$AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{7}$.

故选：C.

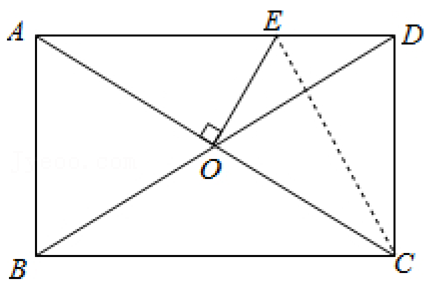
【变式1-1】（2021春•盘龙区期末）如图，在矩形$ABCD$中，$AB=4$，$BC=8$，对角线AC、BD相交于点O，过点O作OE垂直AC交AD于点E，则DE的长是（　　）



A．3　　　　B．5　　　　C．2.4　　　　D．2.5

【答案】A

【解答】解：连接CE，如图：



在矩形$ABCD$中，$AB=4$，$BC=8$，

∴$\angle CDE=90^\circ$，$AD=BC=8$，$AB=DC=4$，$AO=OC$，

∵$OE\perp AC$，

∴$AE=CE$，

设$DE=x$，则$AE=CE=8-x$，

在Rt△CDE中，由勾股定理得：$DE^2+DC^2=CE^2$，

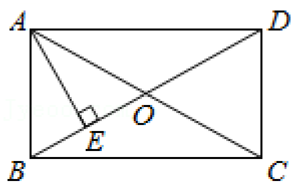
∴$x^2+4^2=(8-x)^2$，

解得$x=3$．

∴DE的长为3．

故选：A．

【变式1-2】（2022•武功县模拟）如图，在矩形$ABCD$中，对角线AC、BD相交于点O，AE垂直平分BO，若$AE=2\sqrt{3}$，则$OD=$（　　）



A．2　　　　B．3　　　　C．4　　　　D．6

【答案】C

【解答】解：∵四边形$ABCD$是矩形，

∴$OB=OD$，$OA=OC$，$AC=BD$，

∴$OA=OB$，

∵AE垂直平分OB，

∴$AB=AO$，

∴$OA=AB=OB$，

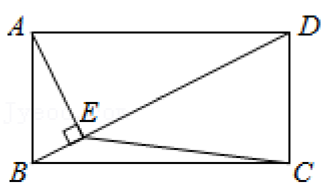
∵$AE=2\sqrt{3}$，

∴$OE=2$，

∴$OD=OB=2OE=4$；

故选：C.

【典例2】（2021•贵港）如图，在矩形$ABCD$中，BD是对角线，$AE\perp BD$，垂足为E，连接CE，若$\tan\angle ADB=\frac{1}{2}$，则$\tan\angle DEC$的值是 ____.



【答案】$\frac{2}{3}$

【解答】解：如图，过点C作$CF\perp BD$于点F，

在△ABE与△CDF中，

$$\begin{cases}\angle AEB=\angle CFD\\ \angle ABE=\angle CDF,\\ AB=CD\end{cases}$$

∴△ABE≌△CDF（AAS），

∴$AE=CF$，$BE=FD$，

∵$AE\perp BD$，$\tan\angle ADB=\frac{AB}{AD}=\frac{1}{2}$，

设$AB=a$，则$AD=2a$，

∴$BD=\sqrt{5}a$，

∵$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}BD\bullet AE=\frac{1}{2}AB\bullet AD$，

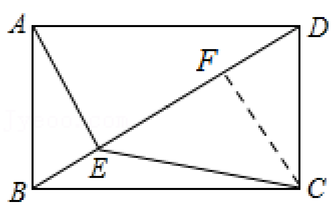
∴$AE=CF=\frac{2\sqrt{5}}{5}a$，

∴$BE=FD=\frac{\sqrt{5}}{5}a$，

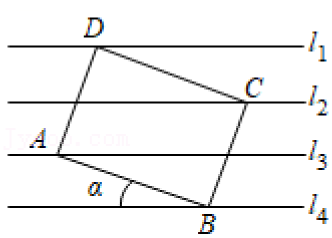
∴$EF=BD-2BE=\sqrt{5}a-\frac{2\sqrt{5}}{5}a=\frac{3\sqrt{5}}{5}a$，

∴$\tan\angle DEC=\frac{CF}{EF}=\frac{2}{3}$，

故答案为：$\frac{2}{3}$.



【变式2-1】（2020•威海）如图，矩形$ABCD$的四个顶点分别在直线l_3，l_4，l_2，l_1上．若直线$l_1/\!/l_2/\!/l_3/\!/l_4$且间距相等，$AB=4$，$BC=3$，则tanα的值为（　　）



A．$\frac{3}{8}$　　　　B．$\frac{3}{4}$　　　　C．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　　　D．$\frac{\sqrt{15}}{15}$

【答案】A

【解答】解：作$CF\perp l_4$于点F，交l_3于点E，设CB交l_3于点G，

由已知可得，

$GE // BF$，$CE=EF$，

∴$\triangle CEG \backsim \triangle CFB$，

∴$\frac{CE}{CF}=\frac{CG}{CB}$，

∵$\frac{CE}{CF}=\frac{1}{2}$，

∴$\frac{CG}{CB}=\frac{1}{2}$，

∵$BC=3$，

∴$GB=\frac{3}{2}$，

∵$l_3 // l_4$，

∴$\angle \alpha=\angle GAB$，

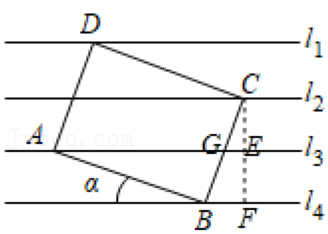
∵四边形$ABCD$是矩形，$AB=4$，

∴$\angle ABG=90°$，

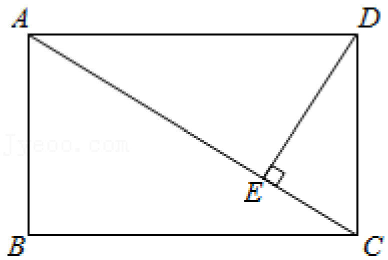
∴$\tan\angle BAG=\frac{BG}{AB}=\frac{\frac{3}{2}}{4}=\frac{3}{8}$，

∴$\tan\alpha$的值为$\frac{3}{8}$，

故选：A．



【变式2-2】（2021•邵阳）如图，在矩形$ABCD$中，$DE \perp AC$，垂足为点E．若$\sin\angle ADE=\frac{4}{5}$，$AD=4$，则$AB$的长为 ____．



【答案】3

【解答】解：∵$DE\perp AC$，

∴$\angle ADE+\angle CAD=90^\circ$，

∵$\angle ACD+\angle CAD=90^\circ$，

∴$\angle ACD=\angle ADE$，

∵矩形$ABCD$的对边$AB\parallel CD$，

∴$\angle BAC=\angle ACD$，

∵$\sin\angle ADE=\frac{4}{5}$，

∴$\frac{BC}{AC}=\frac{4}{5}$，

∴$AC=\frac{BC}{\frac{4}{5}}=\frac{4}{\frac{4}{5}}=5$，

由勾股定理得，$AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

故答案为：3．

∴$S_{平行四边形AGCH}=CG\cdot AB=3\times 2\sqrt{5}=6\sqrt{5}$．

【典例3】（2022•威海）（1）将两张长为8，宽为4的矩形纸片如图1叠放．

①判断四边形$AGCH$的形状，并说明理由；

②求四边形$AGCH$的面积．

（2）如图2，在矩形$ABCD$和矩形$AFCE$中，$AB=2\sqrt{5}$，$BC=7$，$CF=\sqrt{5}$，求四边形$AGCH$的面积．

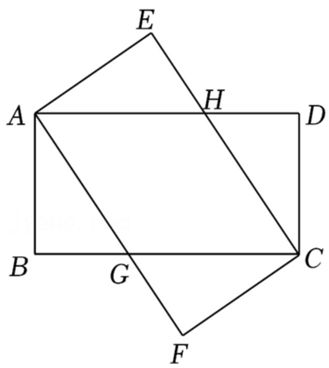


图1

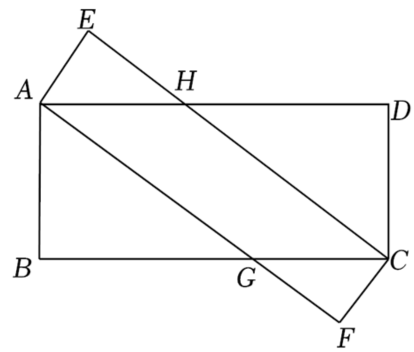


图2

【解答】解：（1）①四边形$AGCH$是菱形，理由如下：

∵四边形$ABCD$和四边形$AFCE$是矩形，

∴$\angle B=\angle F=90^\circ$，$AD\parallel BC$，$AF\parallel CE$，

∴四边形$AGCH$是平行四边形，

∵$S_{平行四边形AGCH}=GC\cdot AB=AG\cdot CF$，$AB=CF$，

∴$GC=AG$，

∴平行四边形$AGCH$是菱形；

②由①可知，$GC=AG$，

设$GC=AG=x$，则$BG=8-x$，

在Rt△ABG中，$AB=4$，

由勾股定理得：$4^2+(8-x)^2=x^2$，

解得：$x=5$，

∴$GC=5$，

∴$S_{菱形AGCH}=GC\cdot AB=5\times4=20$；

（2）设$GC=a$，则$BG=7-a$，

∵四边形$ABCD$和四边形$AFCE$是矩形，

∴$\angle B=\angle F=90^\circ$，$AD\parallel BC$，$AF\parallel CE$，

∴四边形$AGCH$是平行四边形，

∵$\angle AGB=\angle CGF$，$\angle B=\angle F$，

∴$\triangle ABG\backsim\triangle CFG$，

$\therefore \frac{AB}{CF}=\frac{AG}{CG}$,

即$\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{AG}{a}$,

解得：$AG=2a$，

在Rt△ABG中，由勾股定理得：$(2\sqrt{5})^2+(7-a)^2=(2a)^2$，

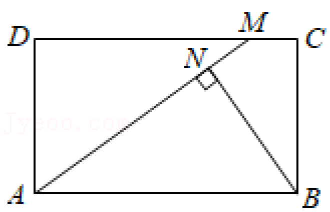
解得：$a=3$或$a=-\frac{23}{3}$（不合题意舍去），

$\therefore CG=3$

【变式3】（2021•安顺）如图，在矩形$ABCD$中，点M在DC上，$AM=AB$，且$BN\perp AM$，垂足为N.

（1）求证：$\triangle ABN\cong\triangle MAD$；

（2）若$AD=2$，$AN=4$，求四边形$BCMN$的面积.



【解答】（1）证明：在矩形$ABCD$中，$\angle D=90°$，$DC\parallel AB$，

$\therefore \angle BAN=\angle AMD$，

$\because BN\perp AM$，

$\therefore \angle BNA=90°$，

在$\triangle ABN$和$\triangle MAD$中，

$$\begin{cases}\angle BAN=\angle AMD\\ \angle BNA=\angle D=90°\\ AB=AM\end{cases}$$，

$\therefore \triangle ABN\cong\triangle MAD$（$AAS$）；

（2）解：$\because \triangle ABN\cong\triangle MAD$，

$\therefore BN=AD$，

$\because AD=2$，

$\therefore BN=2$，

又∵$AN=4$，

在Rt△ABN中，$AB=\sqrt{AN^2+BN^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，

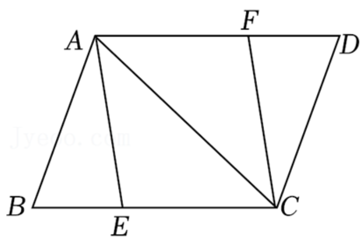
∴$S_{矩形ABCD}=2\times2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$，$S_{\triangle ABN}=S_{\triangle MAD}=\frac{1}{2}\times2\times4=4$，

∴$S_{四边形BCMN}=S_{矩形ABCD}-S_{\triangle ABN}-S_{\triangle MAD}=4\sqrt{5}-8$．

【典例4】（2022•六盘水）如图，在平行四边形$ABCD$中，AE平分∠BAC，CF平分∠ACD．

（1）求证：△ABE≌△CDF；

（2）当△ABC满足什么条件时，四边形$AECF$是矩形？请写出证明过程．



【解答】（1）证明：∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$AB=CD$，$\angle B=\angle D$，$AB\parallel CD$，

∴$\angle BAC=\angle ACD$，

∵AE平分$\angle BAC$、CF平分$\angle ACD$，

∴$\angle BAE=\angle CAE=\frac{1}{2}\angle BAC$，$\angle DCF=\angle ACF=\frac{1}{2}\angle ACD$，

∴$\angle BAE=\angle DCF$，

在△ABE和△CDF中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle D\\AB=CD\\\angle BAE=\angle DCF\end{cases}，$$

∴△ABE≌△CDF（ASA）；

（2）解：当△ABC满足$AB=AC$时，四边形$AECF$是矩形，理由如下：

由（1）可知，$\angle CAE=\angle ACF$，

∴$AE\parallel CF$，

∵△ABE≌△CDF，

∴$AE=CF$，

∴四边形$AECF$是平行四边形，

又∵$AB=AC$，AE平分$\angle BAC$，

∴$AE\perp BC$，

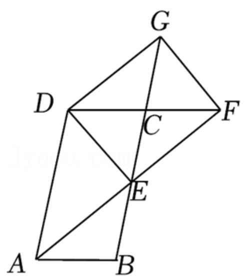
∴$\angle AEC=90°$，

∴平行四边形$AECF$是矩形.

【变式4-1】（2022•巴中）如图，▱$ABCD$中，E为BC边的中点，连接AE并延长交DC的延长线于点F，延长EC至点G，使$CG=CE$，连接DG、DE、FG.

（1）求证：$\triangle ABE\cong\triangle FCE$；

（2）若$AD=2AB$，求证：四边形$DEFG$是矩形.



【解答】证明：（1）∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$AB\parallel CD$，

∴$\angle EAB=\angle CFE$，

又∵E为BC的中点，

∴$EC=EB$，

在$\triangle ABE$和$\triangle FCE$中，

$$\begin{cases}\angle EAB=\angle CFE\\ \angle BEA=\angle CEF,\\ EC=EB\end{cases}$$

∴$\triangle ABE\cong\triangle FCE$（$AAS$）；

（2）∵$\triangle ABE\cong\triangle FCE$，

∴$AB=CF$，

∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$AB=DC$，

∴$DC=CF$，

又∵$CE=CG$，

∴四边形$DEFG$是平行四边形，

∵E为BC的中点，$CE=CG$，

∴$BC=EG$，

又∵$AD=BC=EG=2AB$，$DF=CD+CF=2CD=2AB$，

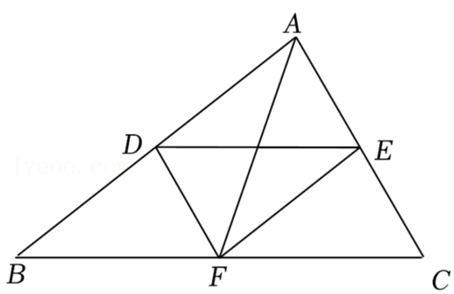
∴$DF=EG$，

∴平行四边形$DEFG$是矩形．

【变式4-2】（2022•泰州）如图，线段DE与AF分别为△ABC的中位线与中线．

（1）求证：AF与DE互相平分；

（2）当线段AF与BC满足怎样的数量关系时，四边形$ADFE$为矩形？请说明理由．



【解答】（1）证明：∵点D是AB的中点，

∴$AD=\frac{1}{2}AB$，

∵点E是AC的中点，点F是BC的中点，

∴EF是△ABC的中位线，

∴$EF\parallel AB$，$EF=\frac{1}{2}AB$，

∴$EF=AD$，

∴四边形$ADFE$是平行四边形，

∴AF与DE互相平分；

（2）解：当$AF=\frac{1}{2}BC$时，四边形$ADFE$为矩形，

理由：∵线段DE为△ABC的中位线，

∴$DE=\frac{1}{2}BC$，

∵$AF=\frac{1}{2}BC$，

∴$AF=DE$，

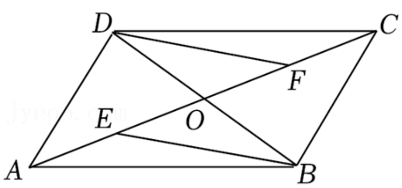
由（1）得：四边形$ADFE$是平行四边形，

∴四边形$ADFE$为矩形．

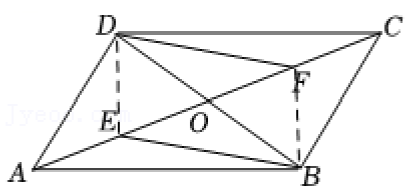
【变式4-3】（2022•十堰）如图，▱$ABCD$中，AC，BD相交于点O，E，F分别是OA，OC的中点．

（1）求证：$BE=DF$；

（2）设$\frac{AC}{BD}=k$，当k为何值时，四边形$DEBF$是矩形？请说明理由．



【解答】（1）证明：如图，连接DE，BF，



∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$BO=OD$，$AO=OC$，

∵E，F分别为AO，OC的中点，

∴$EO=\frac{1}{2}OA$，$OF=\frac{1}{2}OC$，

∴$EO=FO$，

∵$BO=OD$，$EO=FO$，

∴四边形$BFDE$是平行四边形，

∴$BE=DF$；

（2）解：当$k=2$时，四边形$DEBF$是矩形；理由如下：

当$BD=EF$时，四边形$DEBF$是矩形，

∴当$OD=OE$时，四边形$DEBF$是矩形，

∵$AE=OE$，

∴$AC=2BD$，

∴当$k=2$时，四边形$DEBF$是矩形.

真题精选

命题点1　矩形的判定

1．（2022•陕西）在下列条件中，能够判定▱$ABCD$为矩形的是（　　）

A．$AB=AD$　　B．$AC\perp BD$　　C．$AB=AC$　　D．$AC=BD$

【答案】D

【解答】解：A．∵▱$ABCD$中，$AB=AD$，

∴▱$ABCD$是菱形，故选项A不符合题意；

B．∵▱$ABCD$中，$AC\perp BD$，

∴▱$ABCD$是菱形，故选项B不符合题意；

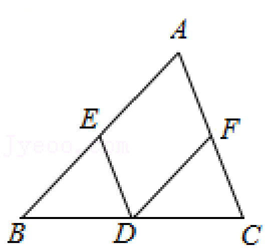
C．▱$ABCD$中，$AB=AC$，不能判定▱$ABCD$是矩形，故选项C不符合题意；

D．∵▱$ABCD$中，$AC=BD$，

∴▱$ABCD$是矩形，故选项D符合题意；

故选：D．

2．（2021•无锡）如图，D、E、F分别是△ABC各边中点，则以下说法错误的是（　　）



A．△BDE和△DCF的面积相等

B．四边形$AEDF$是平行四边形

C．若$AB=BC$，则四边形$AEDF$是菱形