几何-直线型几何-等积变形-3 星题

课程目标

知识点	考试要求	具体要求	考察频率
等积变形	B	1.了解等积变形的概念 2.能够熟练的应用等积变形来解决有关的几何题目	少考

知识提要

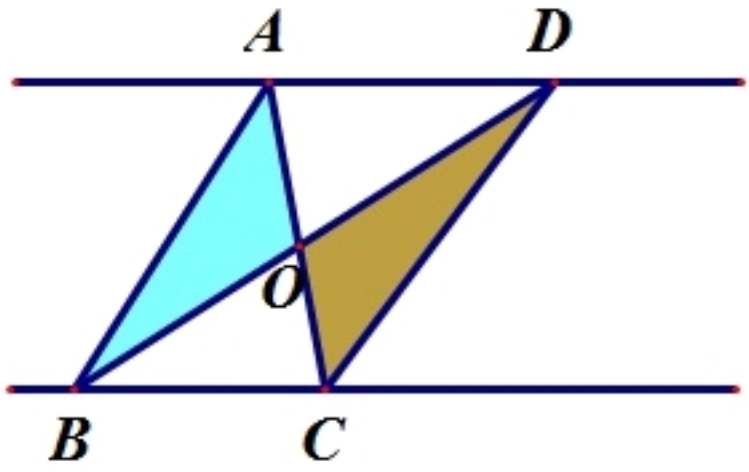
等积变形

- 概念

  等积变形：如果两个三角形同底等高，那么他们的面积相等.

- 夹在一组平行线之间的等积变形

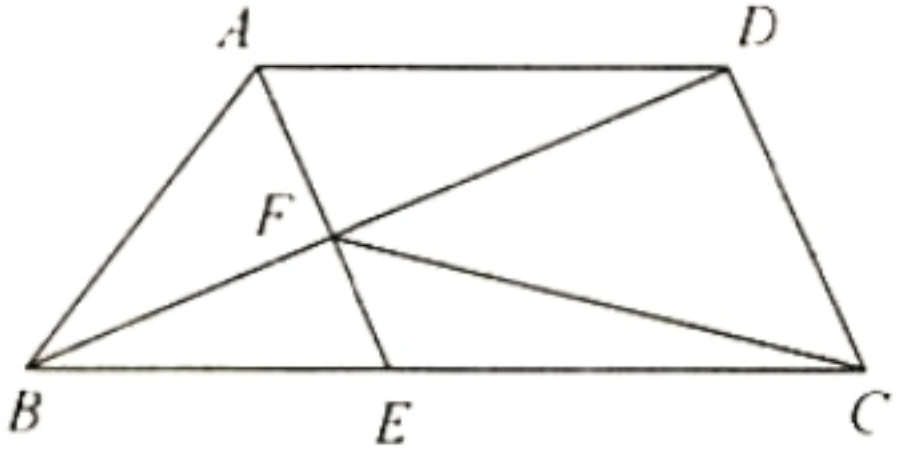
  $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCD}$



精选例题

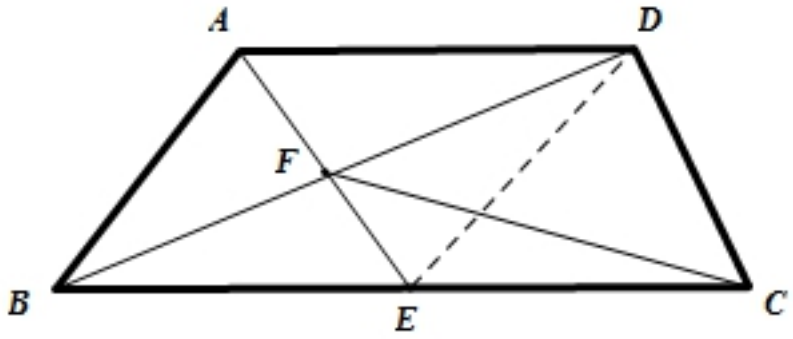
等积变形

1. 梯形 $ABCD$ 中，AE 与 DC 平行，$S_{\triangle ABE}=15$，$S_{\triangle BCF}=$_____.

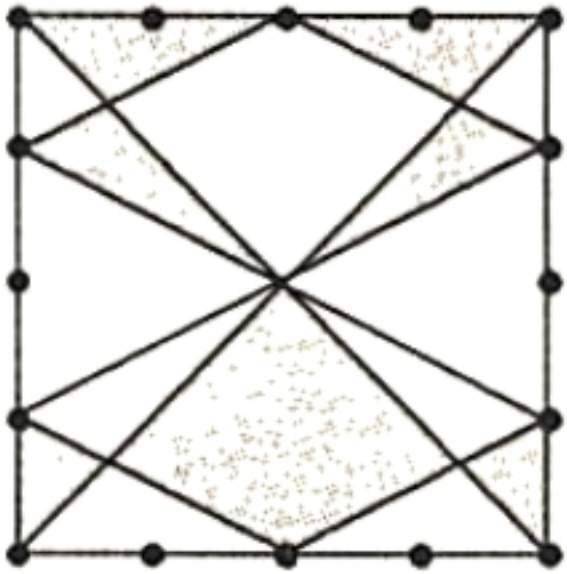


【答案】 15

【分析】 如下图所示，连接 DE，三角形 ABF 的面积和三角形 DEF 的面积相等，三角形 DEF 的面积和三角形 CEF 的面积相等，所以三角形 ABE 的面积和三角形 BCF 的面积相等.



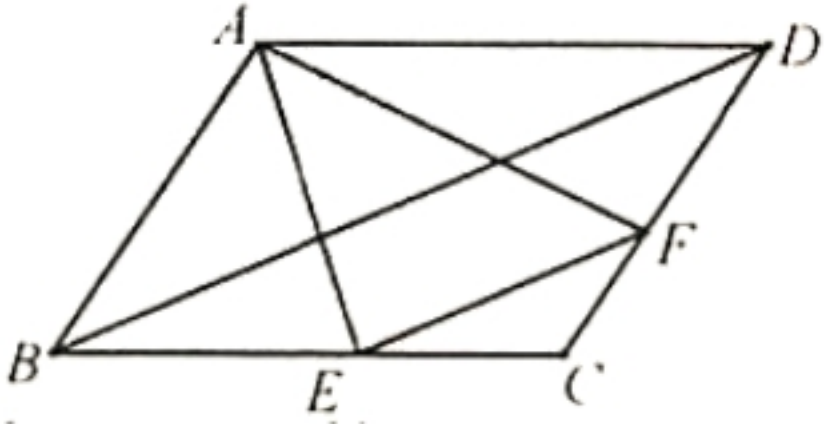
2. 如下图所示，正方形每条边上的三个点（端点除外）都是这条边的四等分点，则阴影部分的面积是正方形面积的_____.



【答案】 $\frac{3}{8}$

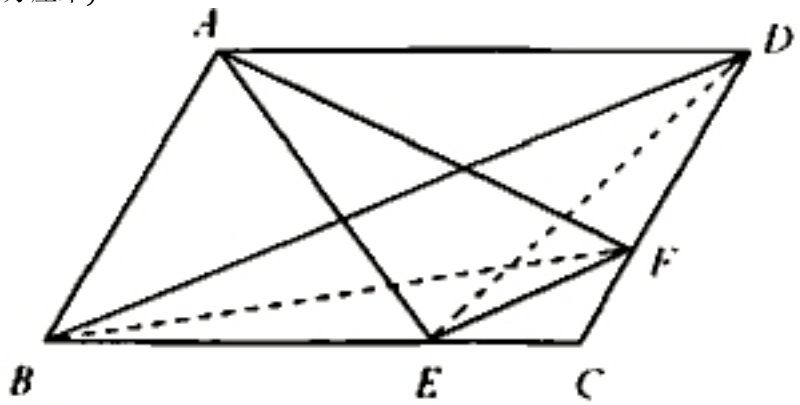
【分析】 将阴影部分的上半部分翻下来，根据四等分点的条件，不难算出阴影是大正方形面积的$\frac{3}{8}$.

3. 如下图所示，BD 是平行四边形 $ABCD$ 的对角线，EF 平行于 BD，如果三角形 ABE 的面积是 12 平方厘米，那么三角形 AFD 的面积是_____平方厘米.

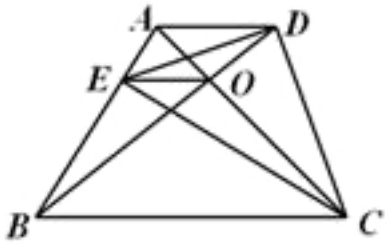


【答案】 12

【分析】　如下图所示，连接 DE、BF，等积变形，$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle BED}=S_{\triangle BFD}=S_{\triangle AFD}=12$(平方厘米).



4. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$OE \parallel AD$．如果三角形 AOB 的面积是 7 平方厘米，则三角形 DEC 的面积是_____平方厘米.



【答案】　14

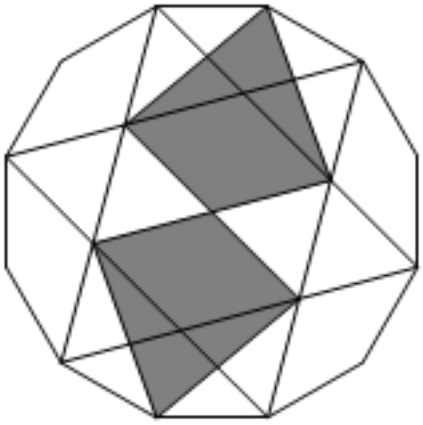
【分析】　由平行线间的等积变形可知，

$$S_{\triangle AEO}=S_{\triangle DEO},S_{\triangle BEO}=S_{\triangle CEO},$$

所以

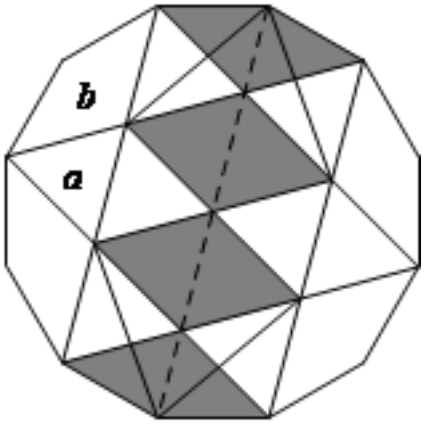
$$\begin{aligned} S_{\triangle DEC} &= S_{\triangle DEO}+S_{\triangle CEO}+S_{\triangle CDO} \\ &= 2S_{\triangle AOB} \\ &= 7\times 2 \\ &= 14\text{(平方厘米)}. \end{aligned}$$

5. 如图，正十二边形的面积是 2016 平方厘米，那么图中阴影部分的面积是_____平方厘米.

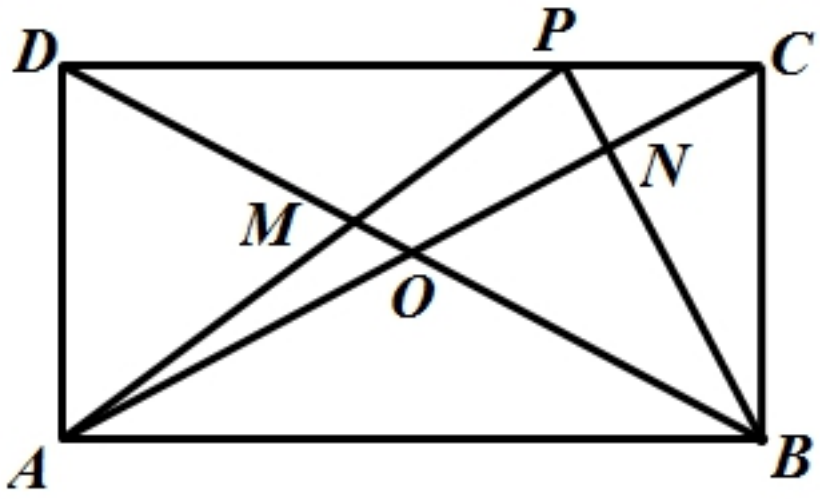


【答案】 672

【分析】 如下图所示，阴影部分可以等积变形成下图形状，并设正三角形面积为 a，四边形面积为 b．则整个正十二边形是由 12 个 a 和 6 个 b 组成，而阴影部分由 4 个 a 和 2 个 b 组成，所以阴影部分面积为 672 平方厘米．



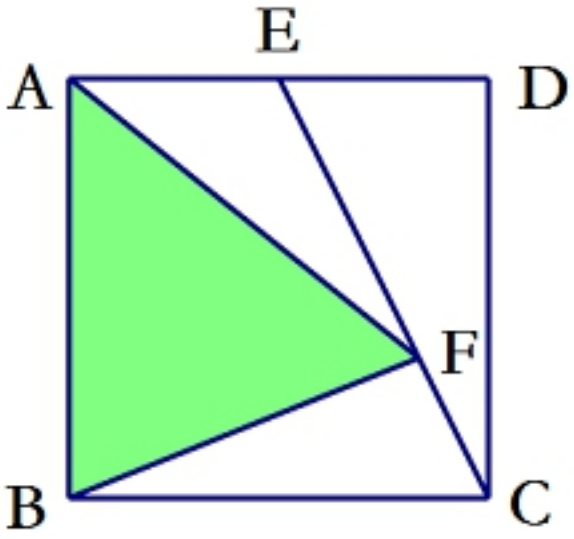
6. 如下图所示，矩形 $ABCD$ 的面积是 24 平方厘米，三角形 ADM 与三角形 BCN 的面积之和是 7.8 平方厘米，则四边形 $PMON$ 的面积是_____平方厘米．



【答案】 1.8

【分析】 $S_{\triangle ADM}+S_{\triangle BCN}=S_{\triangle MPB}+S_{\triangle BCN}=S_{\triangle COB}+S_{PMON}$，$S_{\triangle COB}=\frac{1}{4}S_{\text{长方形 }ABCD}$，所以 $S_{PMON}=7.8-24\div 4=1.8$(平方厘米).

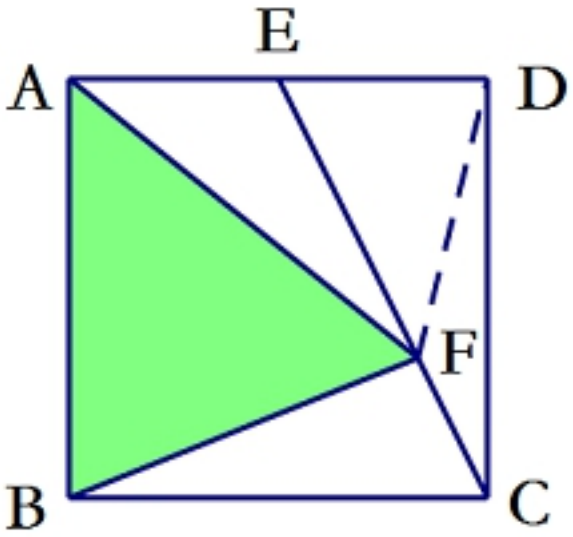
7. 如下图所示，正方形 $ABCD$ 的面积为 12，$AE=ED$，且 $EF=2FC$，则三角形 ABF 的面积等于_____.



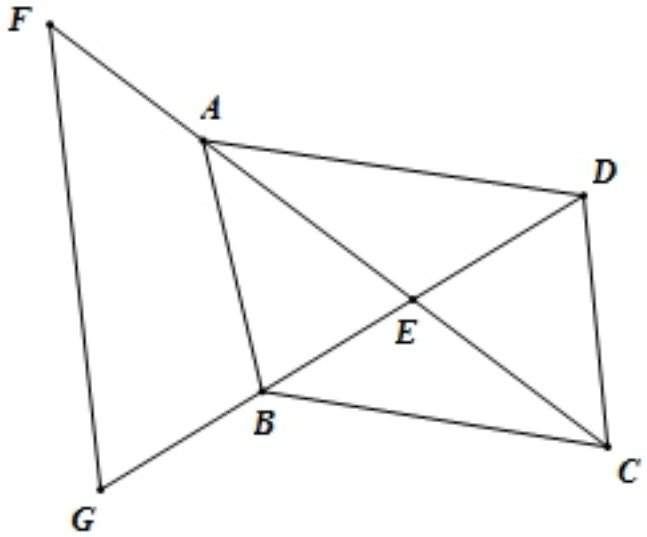
【答案】 5

【分析】 如下图所示，连接 DF，容易得到 $S_{\triangle ABF}+S_{\triangle CDF}=\frac{1}{2}S_{\text{正方形 }ABCD}=6$.

因为 $AE=ED$，所以 $S_{\triangle ECD}=\frac{1}{4}S_{\text{正方形 }ABCD}=3$.
又因为 $EF=2FC$，所以 $S_{\triangle CDF}=\frac{1}{3}S_{\triangle ECD}=1$.
所以 $S_{\triangle ABF}=6-S_{\triangle CDF}=5$.



8. 如下图所示，四边形 $ABCD$ 的面积是 10，对角线 AC、BD 交于 E．已知 $AF=CE$，$BG=DE$．则 $\triangle EFG$ 的面积是_____.



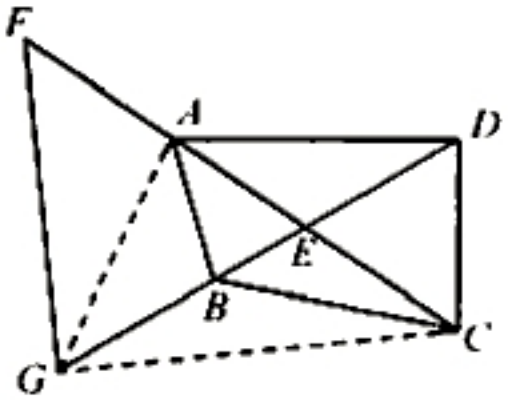
【答案】

【分析】　如下图所示，连接 AG、CG，由“等底等高的三角形面积相等”可得 $S_{\triangle GFA}=S_{\triangle GEC}$，$S_{\triangle AED}=S_{\triangle ABG}$，$S_{\triangle CDE}=S_{\triangle CBG}$.

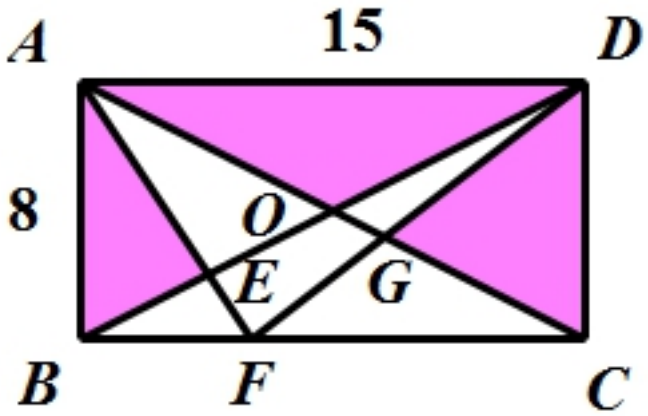
所以

$$\begin{aligned} S_{\triangle EFG} &= S_{\triangle AFG} + S_{\triangle ABG} + S_{\triangle ABE} \\ &= S_{\triangle GEC} + S_{\triangle AED} + S_{\triangle ABE} \\ &= S_{\triangle DBC} + S_{\triangle DAB} \\ &= S_{\text{四边形 } ABCD} \end{aligned}$$

所以 $\triangle EFG$ 的面积等于 10.



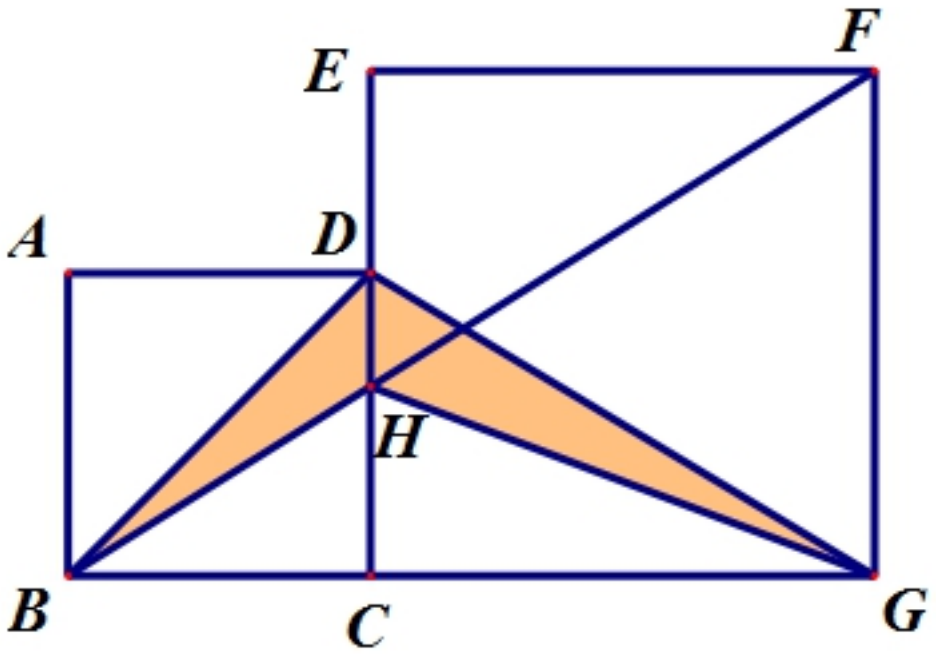
9. 如下图所示，长方形 $ABCD$ 内的阴影部分的面积之和为 70，$AB=8$，$AD=15$．四边形 $EFGO$ 面积为_____.



【答案】 10

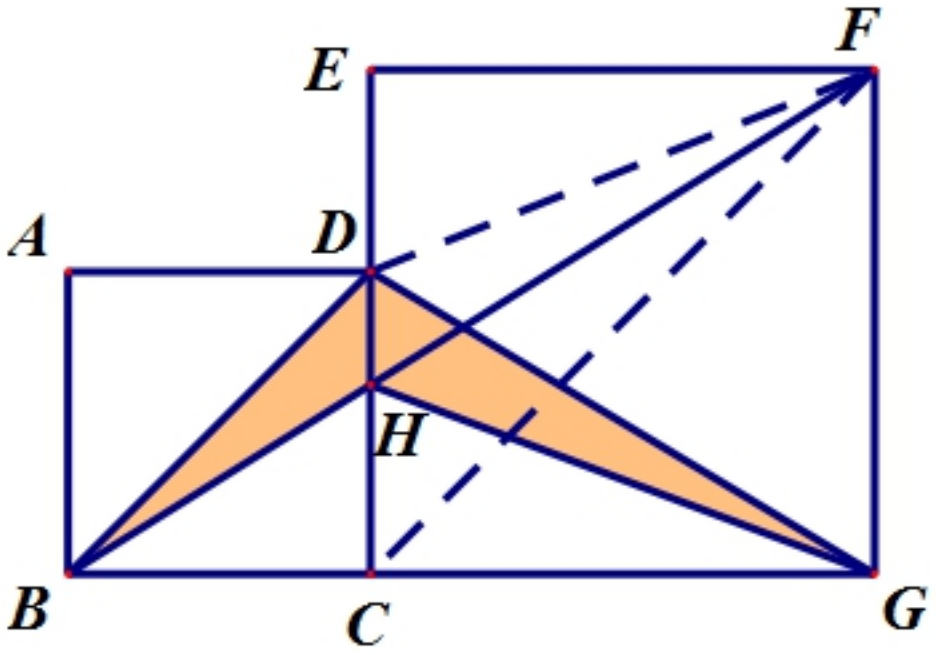
【分析】 $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle EFD}$，所以阴影部分面积等于长方形面积的一半加四边形 $EFGO$ 的面积，故四边形 $EFGO$ 面积等于 $70-15\times 8\div 2=10$.

10. 如下图所示，正方形 $ABCD$ 和正方形 $ECGF$ 并排放置 BF 与 CD 相交于点 H，已知 $AB=6$ 厘米，则阴影部分的面积是_____平方厘米.



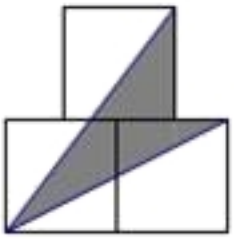
【答案】 18

【分析】 如下图所示，连接 DF、CF，



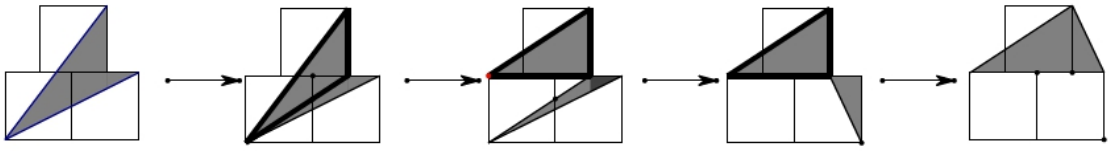
那么显然 $\triangle DHG$ 与 $\triangle DHF$ 同底等高，两者面积相等，我们容易知道 $BD \parallel CF$，可知 $\triangle DHF$ 与 $\triangle BHC$ 面积相等，那么阴影部分的面积等于 $\triangle BCD$ 的面积，恰好为正方形 $ABCD$ 的一半．即 $6 \times 6 \div 2 = 18$(平方厘米)．

11. 图中由 3 个边长是 6 的正方形组成，则图中阴影部分的面积是_____.



【答案】 36

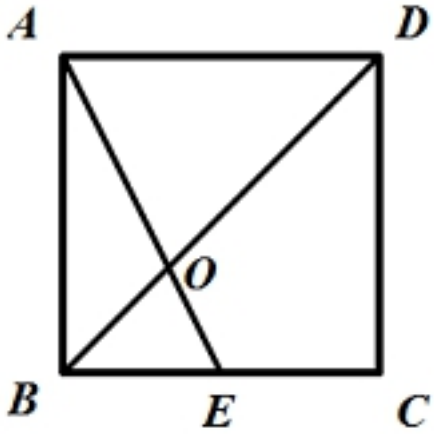
【分析】 等积变形如下：



阴影部分面积：

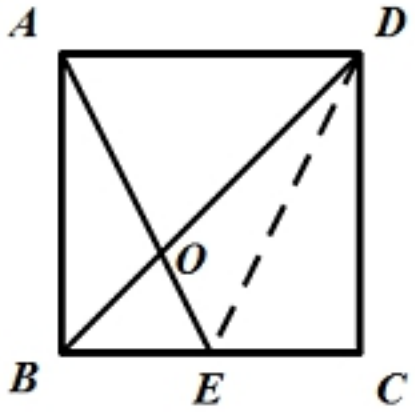
$$(6 \times 2) \times 6 \div 2 = 36.$$

12. 正方形 $ABCD$ 的边长为 6 米，E 是 BC 的中点（见下图）．四边形 $OECD$ 的面积为_____ 平方米.

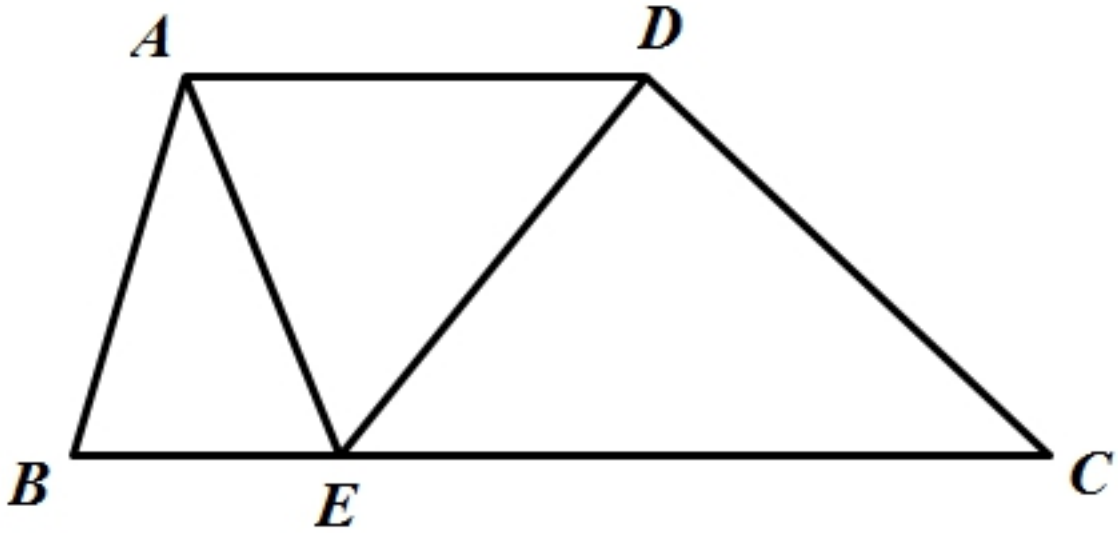


【答案】 15

【分析】 如下图所示，连接 DE，根据等积变形，设 $S_{\triangle BEO}=1$ 份，那么 $S_{\triangle ABO}=S_{\triangle DEO}=2$ 份，$S_{\triangle ADO}=4$ 份，所以 $S_{\triangle DCE}=S_{\triangle DBE}=3$ 份，正方形 $ABCD$ 共为 $1+2+2+4+3=12$（份），四边形 $OECD$ 的面积为 $6\times6\div12\times(2+3)=15$（平方米）.



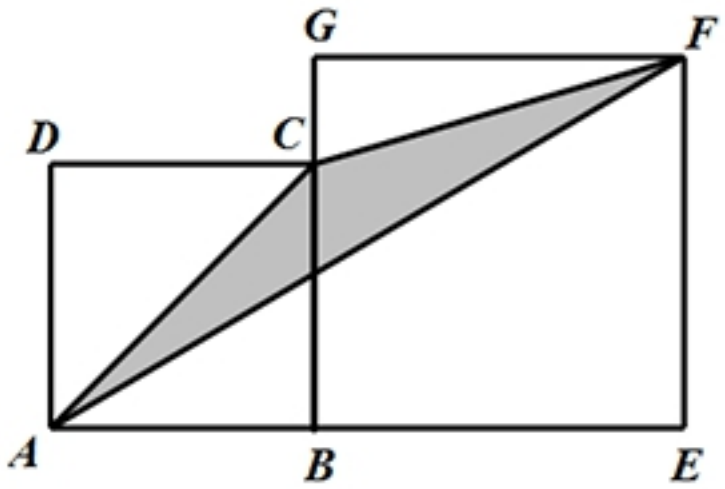
13. 如下图所示，四边形 $ABCD$ 是梯形，上底是 8 厘米，下底是 16 厘米，点 E 是 BC 边上任意一点，如果 $\triangle AED$ 的面积是 30 平方厘米，那么梯形 $ABCD$ 的面积是_____ 平方厘米.



【答案】 90

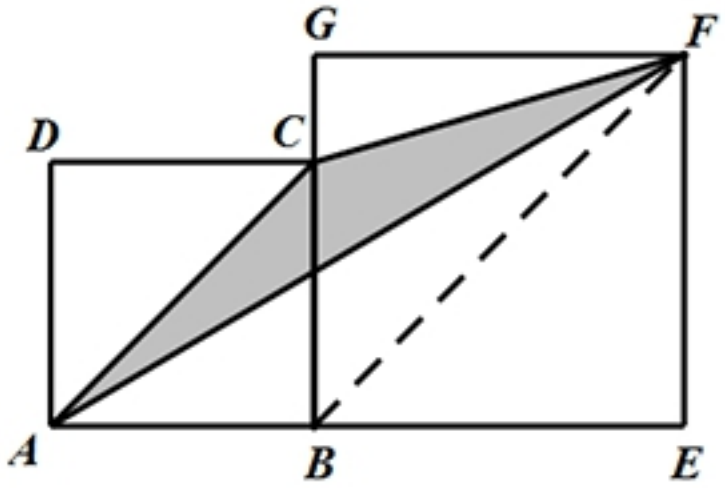
【分析】 方法一：三角形 ADE 的高为 $30\times2\div8=7.5$（厘米），那么梯形面积为 $(8+16)\times7.5\div2=90$（平方厘米）.
方法二：由于 $BC=2AD$, $\triangle AEB$ 与 $\triangle ECD$ 的面积和是 $\triangle AED$ 面积的 2 倍，所以梯形的面积是 $30\times(1+2)=90$（平方厘米）.

14. 如下图所示，一大一小两个正方形拼在一起，若阴影部分的面积是 10 平方米，小正方形的面积是_____ 平方米.

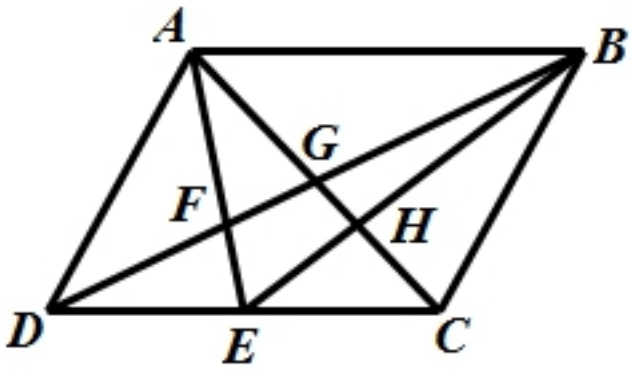


【答案】 20

【分析】 如下图所示，连接 BF,BF 和 AC 平行，阴影部分面积等于三角形 ABC 的面积，而三角形 ABC 的面积是小正方形面积的一半，所以小正方形的面积是阴影部分面积的 2 倍，为 20 平方米.



15. 下图中，$ABCD$ 是平行四边形，E 为 CD 的中点，AE 和 BD 的交点为 F，AC 和 BE 的交点为 H，AC 和 BD 的交点为 G，四边形 $EHGF$ 的面积是 15 平方厘米，则 $ABCD$ 的面积是_____平方厘米.



【答案】 180

【分析】 解法一：蝴蝶模型与一半模型．

（1）E 是 CD 的中点，$DE:AB=1:2$，所以

$$S_{\triangle DEF}:S_{\triangle DAF}:S_{\triangle BEF}:S_{\triangle ABF}=1:2:2:4.$$

（2）设平行四边形面积为“1”．E 是 CD 的中点，所以 $S_{\triangle ABG}$、$S_{\triangle ADG}$、$S_{\triangle BEC}$ 占平行四边形面积的 $\frac{1}{4}$，梯形 S_{ABED} 占平行四边形面积的 $\frac{3}{4}$；

（3）所以

$$S_{\triangle DAF}=\frac{3}{4}\times\frac{2}{1+2+2+4}=\frac{1}{6},$$

$$S_{\triangle GAF}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12},$$

同理可知 $S_{\triangle GHB}=\frac{1}{12}$.

（4）根据一半模型，$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}$，

$$S_{\text{四边形 }EHGF}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12};$$

（5）$ABCD$ 的面积是

$$15\div\frac{1}{12}=180(cm^2).$$

解法二：相似模型、等积变形与一半模型．

（1）E 是 CD 的中点，$DE:AB=1:2$，所以 $DF:FB=1:2$，而 $DG=GB$，

$$DF:FG=\frac{1}{1+2}:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1+2}\right)=2:1;$$

（2）设平行四边形面积为“1”．E 是 CD 的中点，所以 $S_{\triangle ABG}$、$S_{\triangle ADG}$ 占平行四边形面积的 $\frac{1}{4}$，所以

$$S_{\triangle GAF}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2+1}=\frac{1}{12},$$

同理可知 $S_{\triangle GHB}=\frac{1}{12}$.

（3）根据一半模型，$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}$，

$$S_{四边形\ EHGF}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12};$$

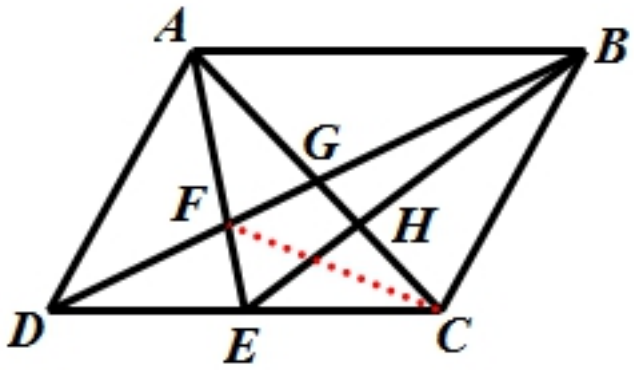
（4）$ABCD$ 的面积是

$$15\div\frac{1}{12}=180(cm^2).$$

解法三：燕尾模型与一半模型.

（1）设平行四边形面积为“1”．$S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}$.

（2）E 是 CD 的中点，G 为 AC 的中点，连接 FC，



设 $S_{\triangle DEF}$ 为 1 份，$S_{\triangle ECF}$ 也为 1 份，根据燕尾 $S_{\triangle ADF}$ 为 2 份，再根据燕尾 $S_{\triangle ACF}$ 也为 2 份，根据按比例分配，$S_{\triangle AGF}$、$S_{\triangle GCF}$ 都为 1 份，所以

$$S_{\triangle GAF}=\frac{1}{2}\div(2+1+1+1+1)=\frac{1}{12},$$

同理可知 $S_{\triangle GHB}=\frac{1}{12}$.

（3）根据一半模型，$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}$，

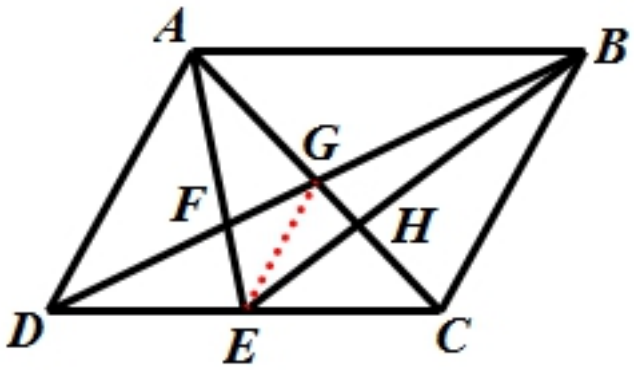
$$S_{四边形\ EHGF}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12};$$

（4）$ABCD$ 的面积是

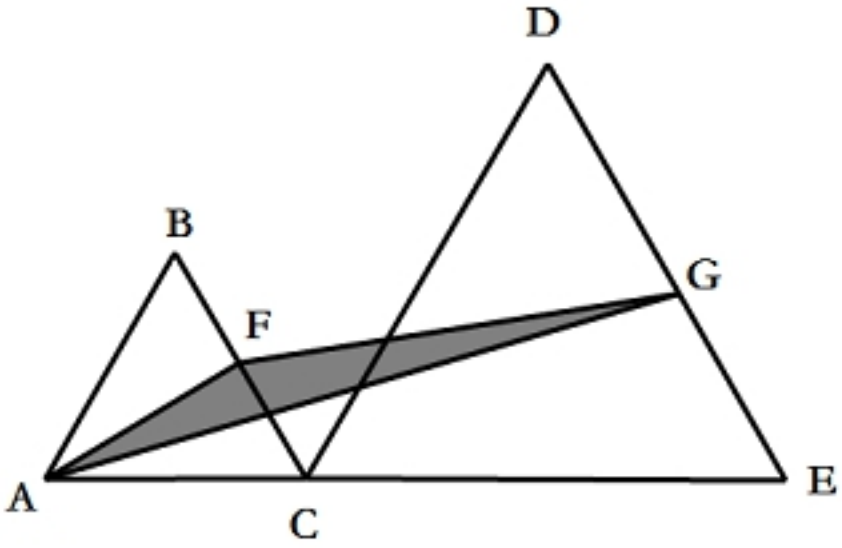
$$15\div\frac{1}{12}=180(cm^2).$$

解法四：风筝模型与一半模型.

连接 EG 同样可解.



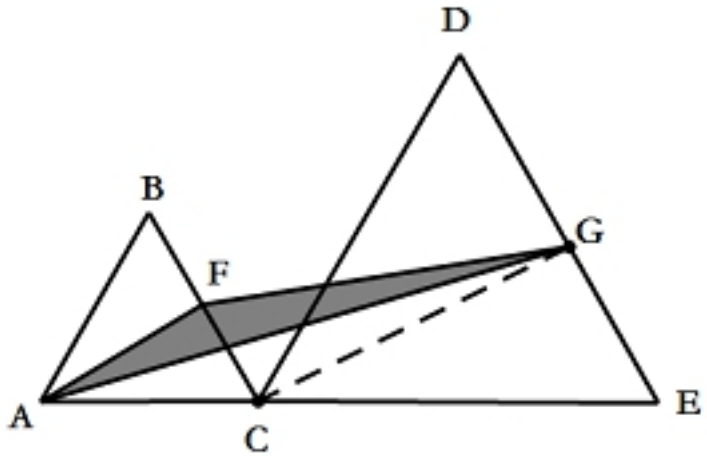
16. 如下图所示，点 C 在线段 AE 上，三角形 ABC 和三角形 CDE 都是正三角形，且 F 是线段 BC 的中点，G 是线段 DE 的中点．若三角形 ABC 的面积为 27，三角形 AFG（阴影部分）的面积是_____.



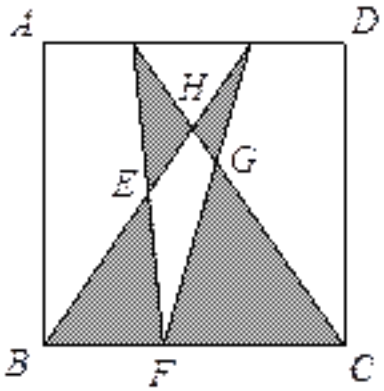
【答案】 13.5

【分析】 如下图所示，连接 CG，那么 $AF \parallel CG$，根据梯形蝴蝶模型，得到

$$S_{\triangle AFG} = S_{\triangle AFC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 27 = 13.5.$$

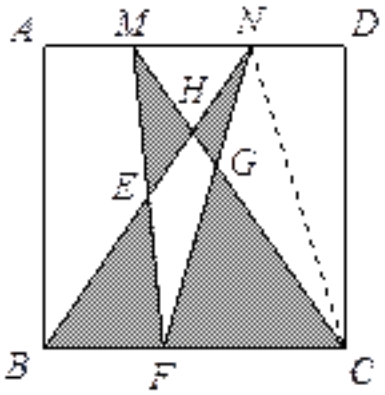


17. 如图，正方形的边长为 12，阴影部分的面积为 60，那么四边形 $EFGH$ 的面积是_____.



【答案】 6

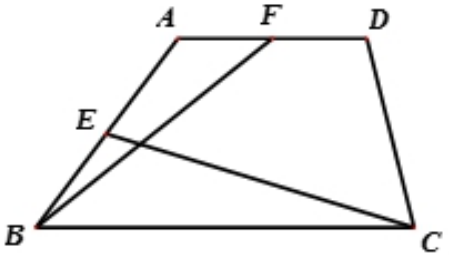
【分析】 如图所示，设 AD 上的两个点分别为 M、N．连接 CN．

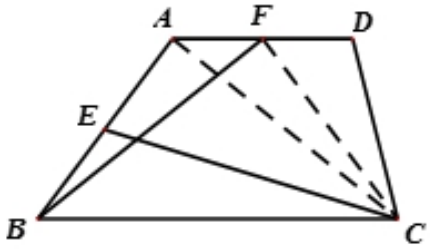


根据面积比例模型，△ CMF 与 △ CNF 的面积是相等的，那么 △ CMF 与 △ BNF 的面积之和，等于 △ CNF 与 △ BNF 的面积之和，即等于 △ BCN 的面积．而 △ BCN 的面积为正方形 $ABCD$ 面积的一半，为 $12^2 \times \frac{1}{2} = 72$．

又 △ CMF 与 △ BNF 的面积之和与阴影部分的面积相比较，多了 2 个四边形 $EFGH$ 的面积，所以四边形 $EFGH$ 的面积为：$(72 - 60) \div 2 = 6$．

18. 在梯形 $ABCD$ 中，E 是 $ABDE$ 的中点，F 是 AD 的中点，已知 $S_{\triangle BCE} = 6$ 平方厘米，$S_{\triangle ABF} = 4$ 平方厘米，则梯形 $ABDC$ 的面积是多少平方厘米？





【答案】 20 平方厘米

【分析】 连结 AC、FC．因为 E 是 AB 的中点，所以

$$S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle BCE} = 2 \times 6 = 12(\text{平方厘米}),$$

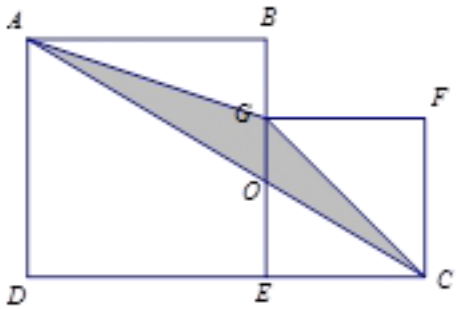
因为 △ ACF 与 △ ABF 同底同高，面积相等，因为 F 是 AD 的中点，所以

$$S_{\triangle ADC} = 2S_{\triangle ACF} = 2 \times 4 = 8(\text{平方厘米}).$$

那么梯形 $ABCD$ 的面积是

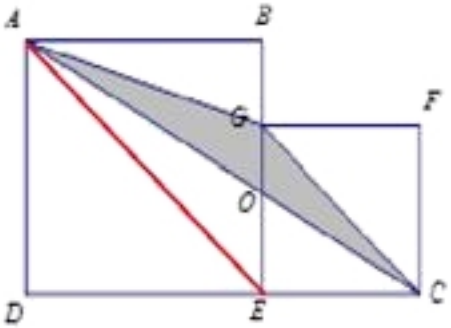
$$12 + 8 = 20(\text{平方厘米}).$$

19. 在图中，正方形 $ADEB$ 和正方形 $ECFG$ 底边对齐，两个正方形边长分别为 6 和 4．阴影三角形 ACG 的面积是多少？

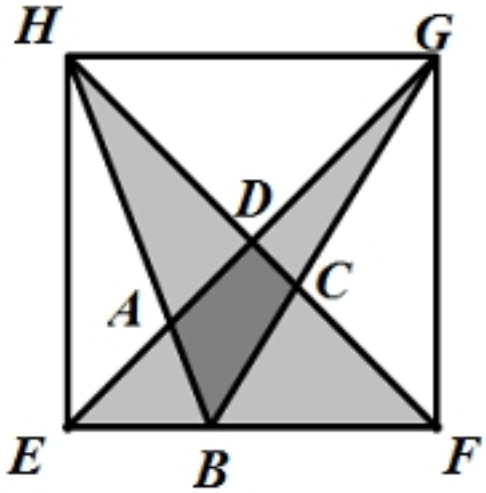


【答案】 8

【分析】 根据题意，连接 EA，则根据等积变形，三角形 AGO 的面积与三角形 EOC 的面积相等，所以阴影部分面积为正方形 $GFCE$ 的一半，即为：$4\times4\div2=8$.

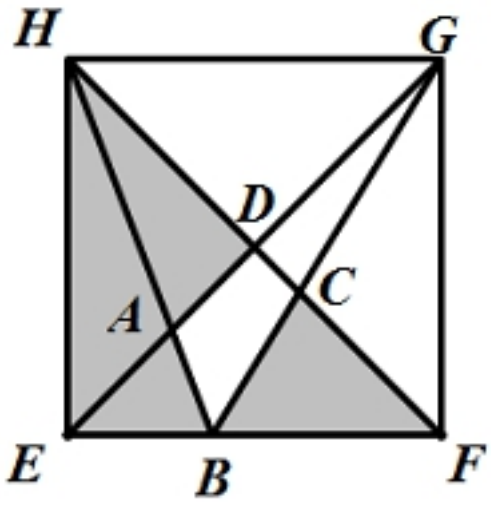


20. 如图，正方形 $HEFG$ 的边长是 10 厘米，四边形 $ABCD$ 的面积是 6 平方厘米．那么，阴影的面积是多少平方厘米？



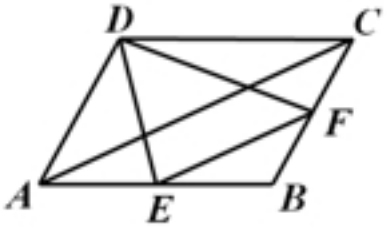
【答案】 44 平方厘米

【分析】



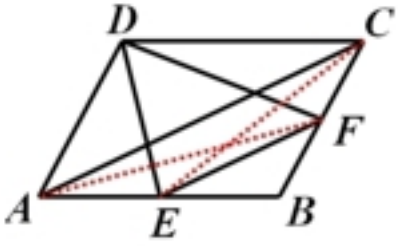
因为 $S_{\triangle GEB}=S_{\triangle HEB}$，所以 $S_{\triangle GAB}=S_{\triangle HEA}$．经过移补，原阴影面积等于右图阴影面积，是 $10\times10\div2-6=44$(平方厘米).

21. 如图，$ABCD$ 为平行四边形，$EF\parallel AC$，如果 $\triangle ADE$ 的面积为 4 平方厘米．求三角形 CDF 的面积．



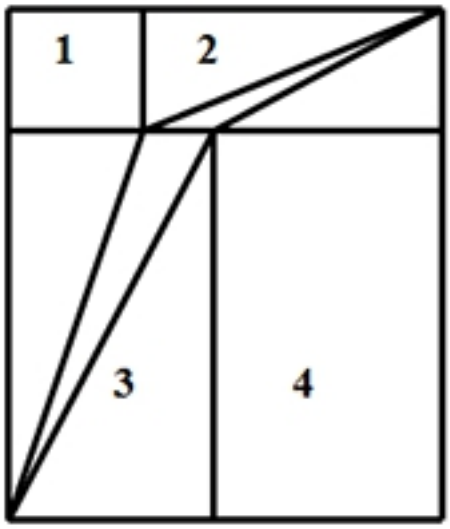
【答案】 4 平方厘米

【分析】



连结 AF、CE．因为 $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle ACE}$，$S_{\triangle CDF}=S_{\triangle ACF}$，又因为 AC 与 EF 平行，所以，$S_{\triangle ACE}=S_{\triangle ACF}$，$S_{\triangle ADE}=S_{\triangle CDF}=4$(平方厘米)．

22. 用面积为 1、2、3、4 的 4 张长方形纸片拼成如图所示的一个大长方形．问：图中阴影部分面积是多少？



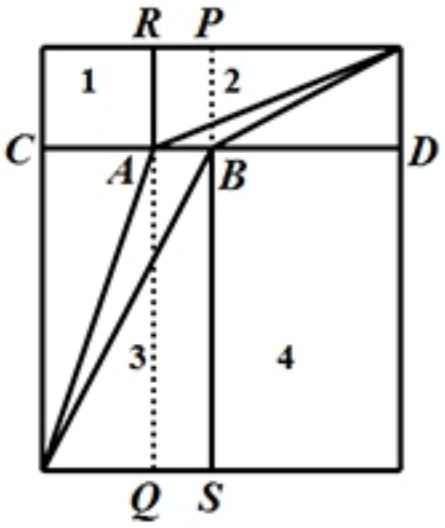
【答案】 $\frac{10}{21}$

【分析】 如下图所示，大长方形面积为 $1+2+3+4=10$，延长 RA 交底边于 Q，延长 SB 交底边于 P，矩形 $ABPR$ 面积是上部阴影三角形面积的 2 倍，矩形 $ABSQ$ 是下部阴影三角形面积的 2 倍，所以矩形 $RQSP$ 的面积是阴影部分面积的 2 倍．

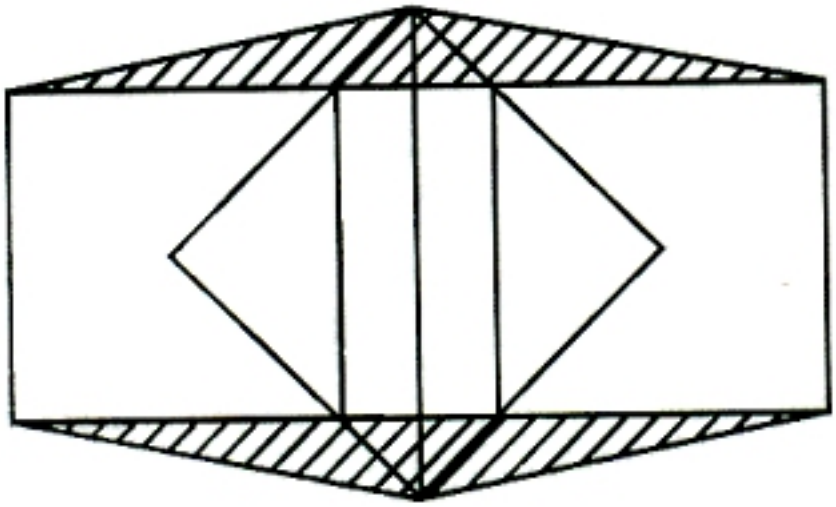
易知 $CA=\frac{1}{3}CD$，$CB=\frac{3}{7}CD$．

所以 $AB=CB-CA=\frac{3}{7}CD-\frac{1}{3}CD=\frac{2}{21}CD$．

因此矩形 $RQSP$ 的面积是大矩形面积的 $\frac{2}{21}$，阴影部分面积是大矩 形面积的 $\frac{1}{21}$，阴影部分面积 $=\frac{1}{21}\times 10=\frac{10}{21}$.

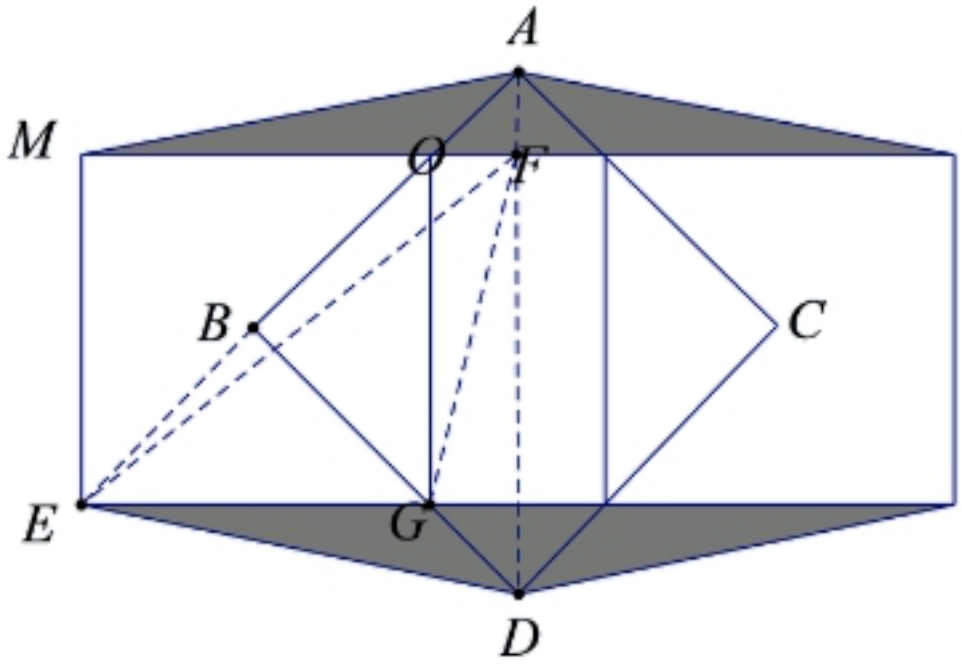


23. 如图，将三个边长为 1 的正方形组合在一起，中间的正方形的两个顶点恰好是另外两个正方形的中心．请问：图中阴影部分的面积是多少？

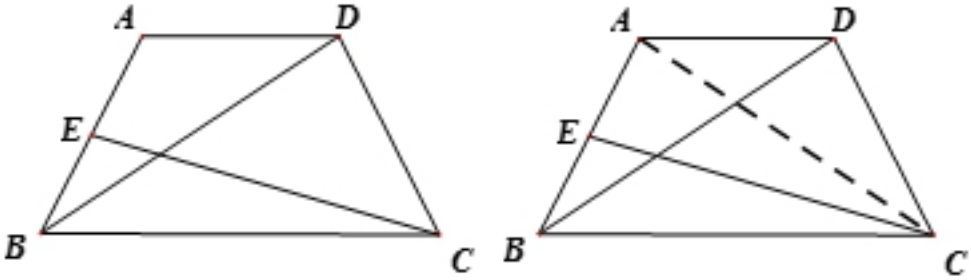


【答案】 $\frac{1}{2}$

【分析】 如下图所示，连接 BE、FE、FG、AD．由于四边形 $AMEF$ 为梯形，则三角形 AMO 的面积与三角形 OFE 的面积相等．而三角形 OFE 的面又与三角形 OFG 的面积相等．所以三角形 AMF 的面积与四边形 $AOGF$ 的面积相等．由于三角形 OBG 的面积为：$\frac{1}{4}$；三角形 ABD 的面积为：$\frac{1}{2}$，所以四边形 $AOGF$ 的面积为：$\frac{1}{8}$．所以所有阴影部分面积之和为：$\frac{1}{8}\times 4=\frac{1}{2}$.



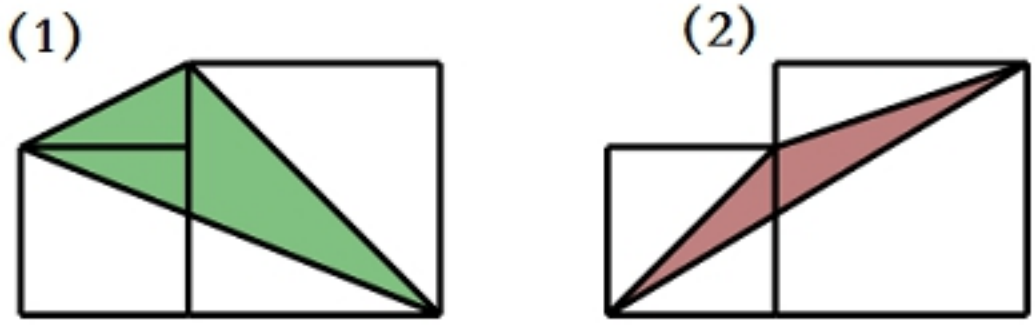
24. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，E 是 AB 的中点．已知梯形 $ABCD$ 的面积为 35 平方厘米，三角形 ABD 的面积为 13 平方厘米．三角形 BCE 的面积为多少平方厘米？



【答案】 11 平方厘米

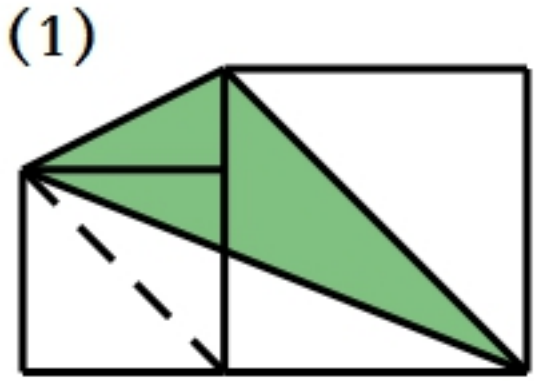
【分析】 如图，连接 AC，根据题意，由于梯形的面积为 35 平方厘米，而三角形 ABD 的面积为 13 平方厘米，所以三角形 DBC 的面积也为 22 平方厘米．所以三角形 ABC 的面积也为 22 平方理米，则三角形 BCE 的面积为 11 平方厘米．

25. 如图所示，大正方形的边长是 10 厘米，小正方形的边长是 8 厘米．求阴影部分的面积．

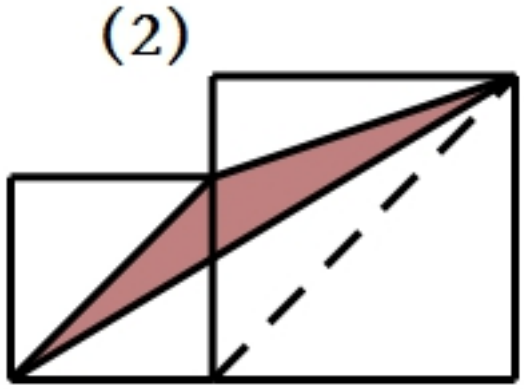


【答案】　（1）50 平方厘米；（2）32 平方厘米.

【分析】　（1）如图，连小正方形对角线，两个正方形对角线平行，所以阴影三角形与大正方形左半个等腰直角三角形同底（共同的底为大正方形对角线）等高、面积相等，等于大正方形面积的一半，为 50 平方厘米.



（2）如图，连大正方形对角线，两个正方形对角线平行，所以阴影三角形与小正方形右半个等腰直角三角形同底（共同的底为小正方形对角线）等高、面积相等，等于小正方形面积的一半，为 32 平方厘米.

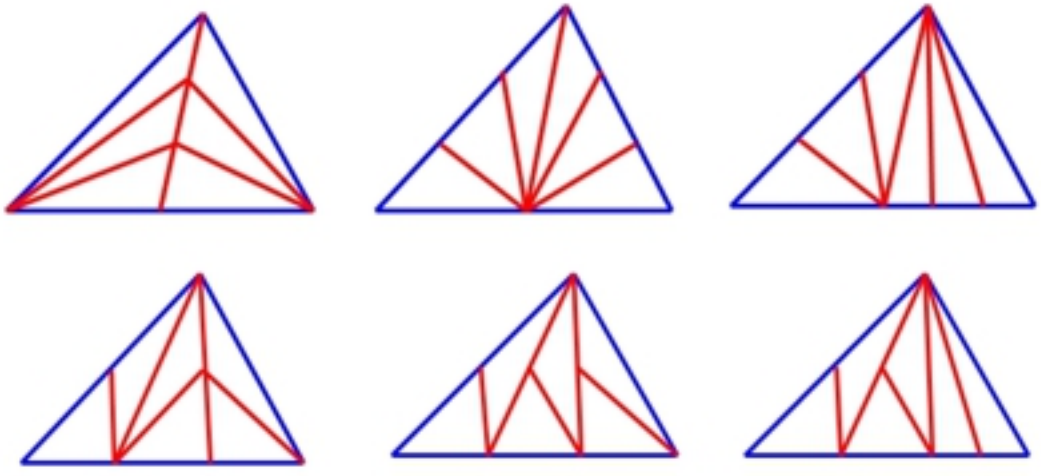


26. 你有什么方法将任意一个三角形分成 6 个面积相等的三角形？

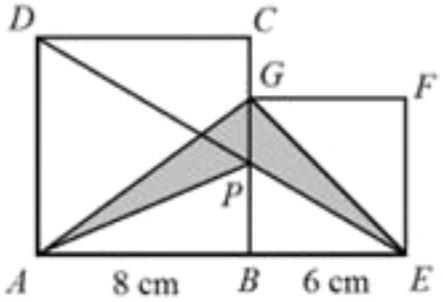


【答案】　见解析.

【分析】

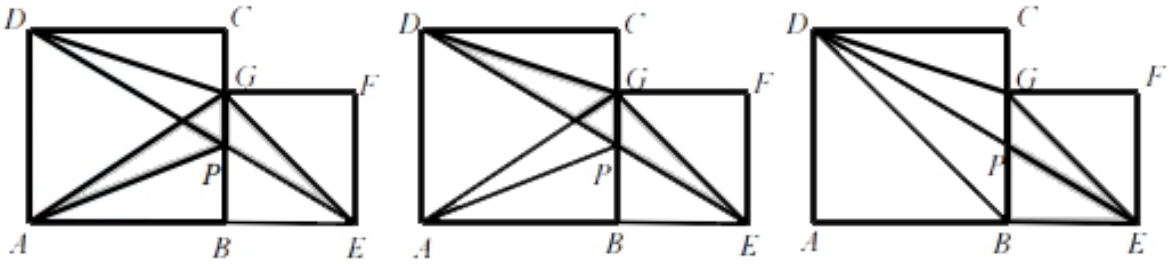


27. 边长分别为 $8cm$ 和 $6cm$ 的两个正方形 $ABCD$ 与 $BEFG$ 如下图并排放在一起．连接 DE 交 BG 于 P，则图中阴影部分 $APEG$ 的面积是多少？

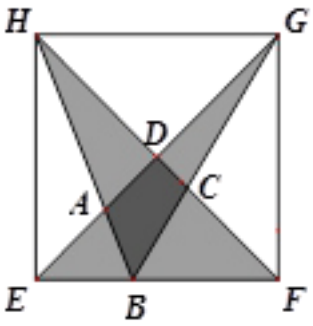


【答案】 18

【分析】 将 $\triangle APG$ 移到 $\triangle DPG$（如下面中图），连接 DB，DB 与 GE 平行．$\triangle DGE$ 等于 $\triangle BGE$ 的面积（如下面右图）．$6 \times 6 \div 2 = 18$．



28. 如图，正方形的边长是 10 厘米，图中阴影部分的面积是 40 平方厘米，四边形 $ABCD$ 的面积是多少平方厘米？



【答案】 10

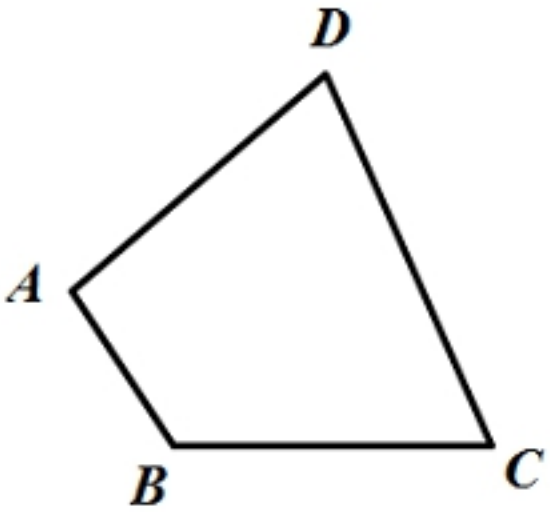
【分析】 根据等积变形有

$$S_{\triangle GEB}=S_{\triangle HEB},S_{\triangle HFB}+S_{\triangle HEB}=10\times10\div2=50(\text{平方厘米}),$$

而 $S_{\triangle HFB}+S_{\triangle HEB}$ 与阴影部分面积相比多了中间四边形的面积，所以

$$S_{ABCD}=50-40=10(\text{平方厘米}).$$

29. 如图，把四边形 $ABCD$ 改成一个等积的三角形．



【答案】 见解析．

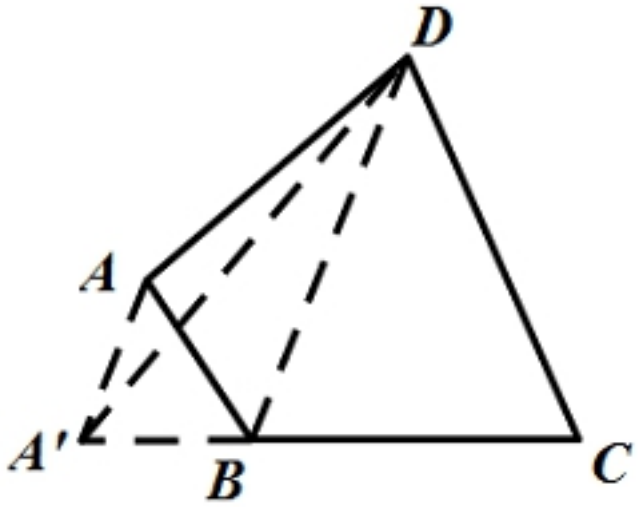
【分析】 本题有两点要求，一是把四边形改成一个三角形，二是改成的三角形与原四边形面积相等．我们可以利用三角形等积变形的方法，如图把顶点 A 移到 CB 的延长线上的 A' 处，$\triangle A'BD$ 与 $\triangle ABD$ 面积相等，从而 $\triangle A'DC$ 面积与原四边形 $ABCD$ 面积也相等．这样就把四边形 $ABCD$ 等积地改成了三角形 $\triangle A'DC$．问题是 A' 位置的选择是依据三角形等积变形原则，过 A 作一条和 DB 平行的直线与 CB 的延长线交于 A' 点．

具体做法：

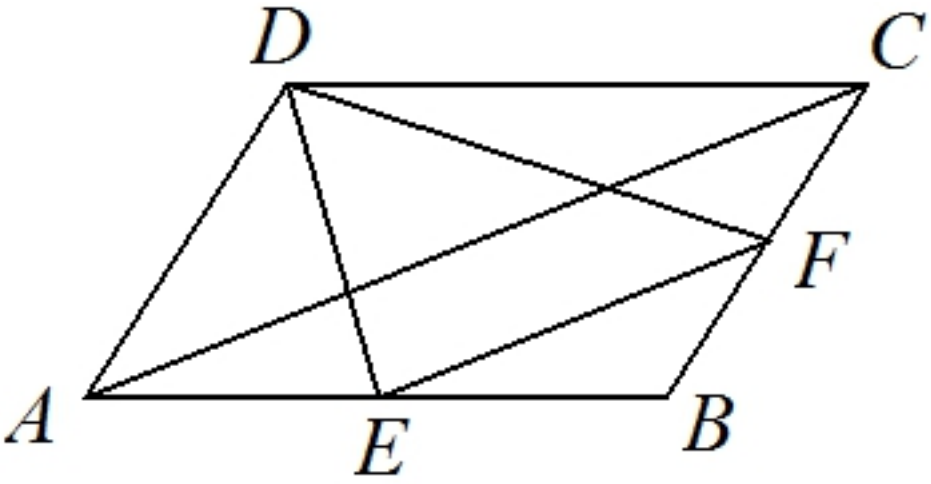
（1）连接 BD；

（2）过 A 作 BD 的平行线，与 CB 的延长线交于 A'；

（3）连接 $A'D$，则 $\triangle A'CD$ 与四边形 $ABCD$ 等积．

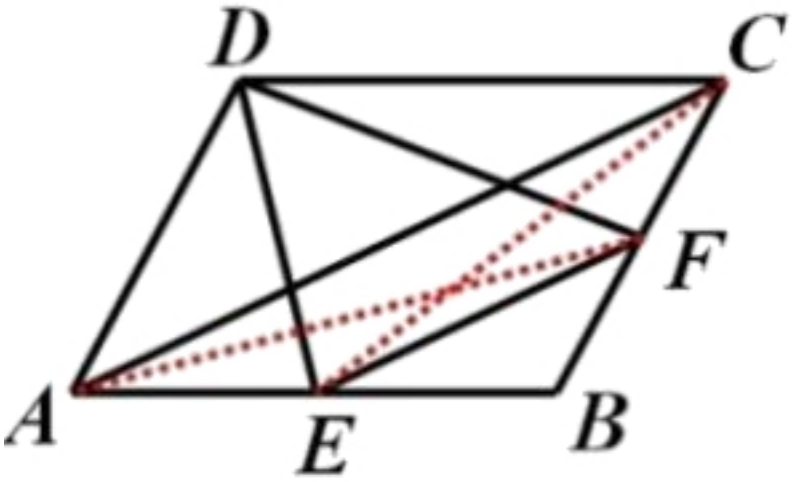


30. 如图，$ABCD$ 为平行四边形，EF 平行 AC，如果 $\triangle ADE$ 的面积为 4 平方厘米．求三角形 CDF 的面积．



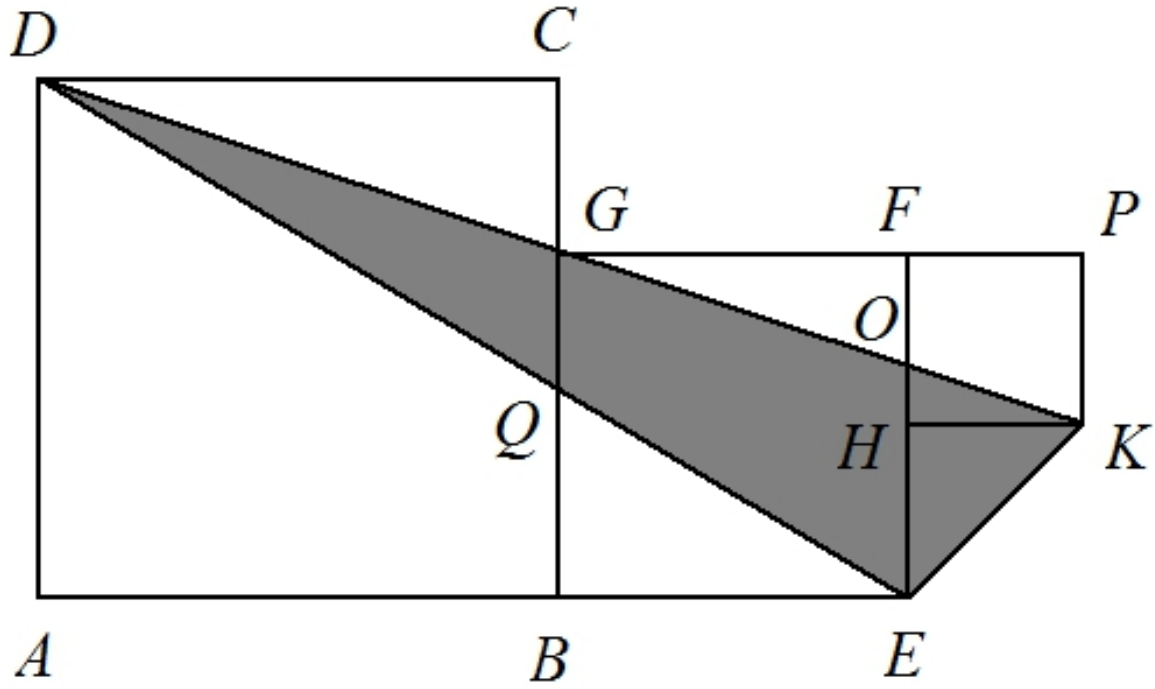
【答案】 4 平方厘米

【分析】



连结 AF、CE．因为 $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle ACE}$；$S_{\triangle CDF}=S_{\triangle ACF}$，
又因为 AC 与 EF 平行，所以，$S_{\triangle ACE}=S_{\triangle ACF}$；$S_{\triangle ADE}=S_{\triangle CDF}=4$(平方厘米)．

31. 如图，有三个正方形的顶点 D、G、K 恰好在同一条直线上，其中正方形 $GFEB$ 的边长为 10 厘米，求阴影部分的面积．



【答案】 100 平方厘米

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/496151223212011050