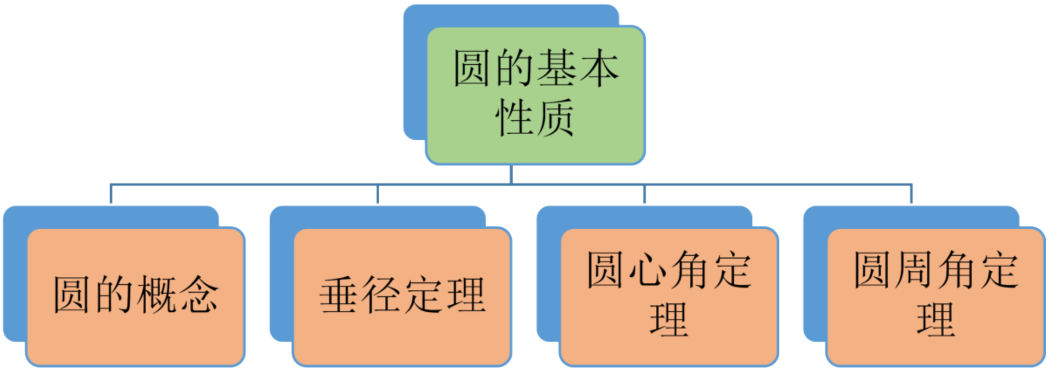
第 24 章圆（1）——重难点

内容范围：24.1.1-24.1.4

重难点知识导航



重难点知识剖析

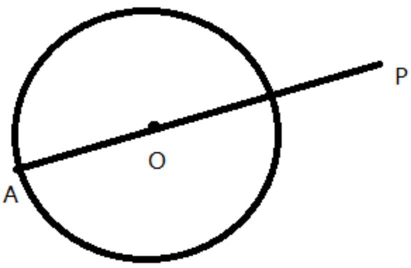
知识点一：圆的概念

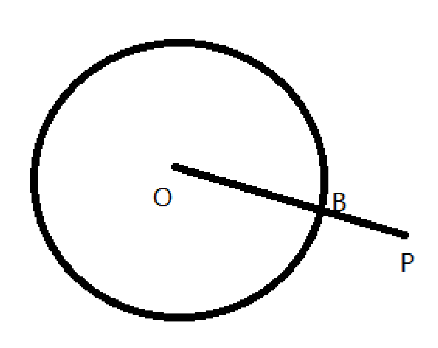
重点

1．圆：平面上到_的距离等于_的所有点组成的图形．

圆的两要素：（1）_________；（2）_________；

2.与圆上的点的距离的最值模型

模型	图形	最值
最大值		PA

最小值		PB

典例精讲

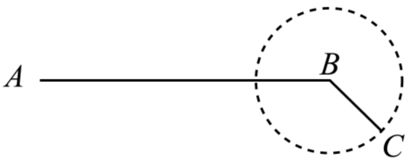
例 1.

1．下列说法：①直径是弦；②半圆是弧；③半径相等的两个圆是等圆；④长度相等的两条弧是等弧；⑤在同圆中任意两条直径都互相平分．其中正确的个数为（　　）

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

例 2.

2．如图，已知空间站 A 与星球 B 距离为 a，信号飞船 C 在星球 B 附近沿圆形轨道行驶，B，C 之间的距离为 b．数据 S 表示飞船 C 与空间站 A 的实时距离，那么 S 的最小值是（　　）



A．a　　B．$a-b$　　C．$a+b$　　D．b

变式训练

变式 1.

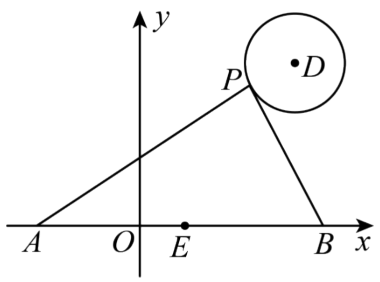
3．下列说法正确的有（　　）

A．经过圆心的线段是直径　　B．直径是同一个圆中最长的弦

C．长度相等的两条弧是等弧　　D．弧分为优弧和劣弧

变式 2.

4．如图，在平面直角坐标系中，已知点 $E(1,0)$，$A(1-m,0)$，$B(1+m,0)(m>0)$，点 P 在以 $D(4,4)$ 为圆心，1 为半径的圆上运动，且始终满足 $\angle APB=90°$，则 m 的取值范围是（　　）



A．$3 \le m \le 5.5$　　B．$3 \le m \le 6$　　C．$4 \le m \le 6$　　D．$5 \le m \le 7$

知识点二：垂径定理

重点

1.垂径定理及推论

一条直线，在下列 5 条中只要具备其中任意两条作为条件，就可以推出其他三条结论．称为知二得三（知二推三）．

①平分弦所对的优弧

②平分弦所对的劣弧（前两条合起来就是：平分弦所对的两条弧）

③平分弦

④垂直于弦

⑤过圆心（或是直径）

2．常用的辅助线

作垂直于弦的直径，或只画弦心距．

3．垂径定理的应用：

①计算半径、弦心距、弦长、弓形高、角、平行弦的距离；

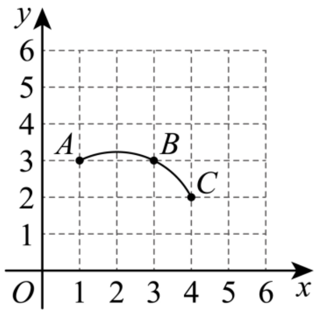
②证明线段相等、角相等、弧相等；

③解决实际问题，构造直角三角形

典例精讲

例 1.

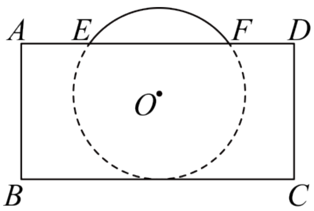
5．如图，在平面直角坐标系中，点 A，B，C 都在格点上，过 A，B，C 三点作一圆弧，则圆心的坐标是（　　）



A．$(2,1)$　　B．$(1,0)$　　C．$(2,0)$　　D．$(1,1)$

例 2．

6．把球放在长方体纸盒内，球的一部分露出盒外，其截面如图所示，已知 $EF=CD=12\text{cm}$，则球的直径长是（　　）



A．$15cm$　　B．$16cm$　　C．$18cm$　　D．$20cm$

变式训练

变式 1．

7．已知$\odot O$的半径是5cm，弦AB平行于弦CD，$AB=6\text{cm}$，$CD=8\text{cm}$，则AB与CD之间的距离是（　　）

A．7cm　　B．7cm或1cm　　C．5cm或2cm　　D．7cm或2cm

变式 2.

8．问题情境：如图 1，筒车是我国古代发明的一种水利灌溉工具，利用水的冲力旋转，当转过一定角度，原先浸在水里的竹筒将提升到一定高度，从而使水流入木槽．假定在水流量稳定的情况下，筒车上的每一个盛水筒都按逆时针做匀速圆周运动，每旋转一周用时120s．

问题设置：如图 2，把筒车抽象为一个半径为r的$\odot O$．筒车涉水宽度$AB=3.6\text{m}$，筒车涉水深度（劣弧AB中点到水面的距离）是0.6m．筒车开始工作时，$\odot O$上 C 处的某盛水筒到水面AB的距离是0.9m，经过85s后，该盛水筒旋转到点D处．

图1

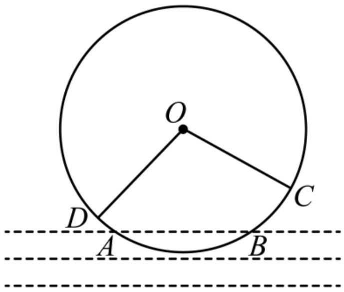


图2

问题解决：

(1)求该筒车半径 r .

(2)当盛水筒旋转至 D 处时，求它到水面 AB 的距离.

知识点三：圆心角定理

重点

1.定理：在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的_相等，所对的_相等.

2.推论：在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等.

圆的旋转对称性：
圆的旋转中心是__________，对称中心是____________；
弧、弦、圆心角之间的关系就是应用了圆的__________性；

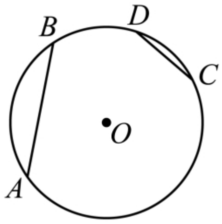
3.转化的数学思想

要证的要素	可证的要素
弧相等	圆心角相等，弦相等，弦心距相等
圆心角相等	弧相等，弦相等，弦心距相等
弦相等	圆心角相等，弧相等，弦心距相等
弦心距相等	圆心角相等，弦相等，弧相等

典例精讲

例 1

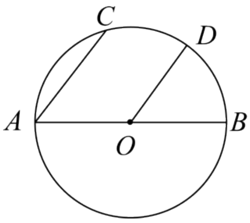
9．如图， 在⊙O 中， 满足 $\overset{\frown}{AB=2CD}$，若 $AB=6$， 则 CD 长可能是（　）



A．1　　B．2　　C．3　　D．4

例 2

10. 如图，在$\odot O$中，弦AB是直径，点C，D是$\odot O$上的两点，连接AC，OD，且满足$AC\parallel OD$.



(1)若$\overset{\frown}{AC}$的度数为80°，求$\angle A$的度数.

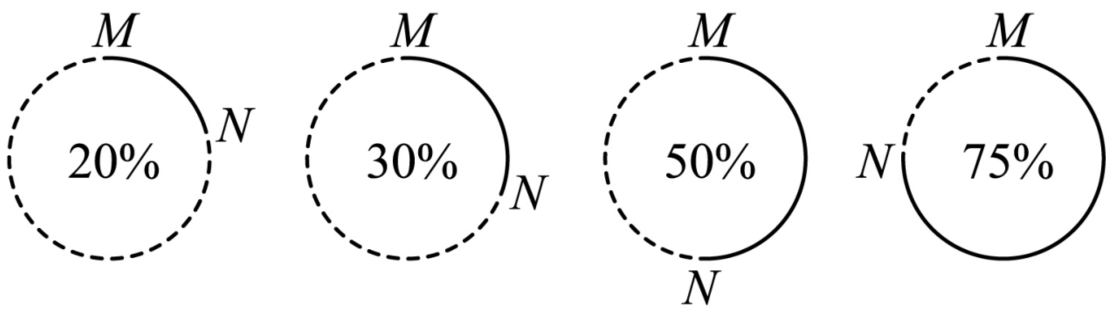
(2)求证：$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BD}$.

(3)连接BD，若$AC=6$，$AB=10$，求BD的长.

变式训练

变式 1.

11．计算机处理任务时，经常会以圆形进度条的形式显示任务完成的百分比，下面是同一个任务进行到不同阶段时进度条的示意图：



当任务完成的百分比为x时，线段MN的长度记为$d(x)$．下列描述正确的是（　）

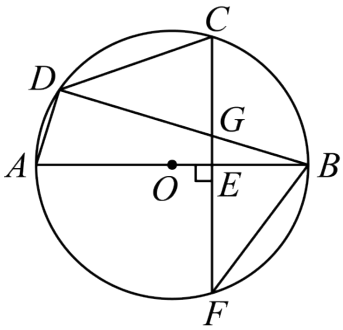
A．当$x_1<x_2$时，$d(x_1)<d(x_2)$　　B．当$d(x_1)<d(x_2)$时，$x_1<x_2$

C．当$x_1=2x_2$时，$d(x_1)=2d(x_2)$　　D．当$x_1+x_2=1$时，$d(x_1)=d(x_2)$

变式 2.

12．如图，AB是$\odot O$的直径，点C为$\overset{\frown}{BD}$的中点，CP为$\odot O$的弦，且$CF\perp AB$，垂足为点

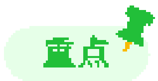
E．连接BD交CF于点G，连接CD，AD，BF．



(1)求证：$CF=BD$；

(2)若$AD=10$，$EF=15$，求$\odot O$的半径及BE的长．

知识点四：圆周角定理



1.圆周角定理及推论

①在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于它所对弧上的圆心角度数的一半；

②相等的圆周角所对的弧也相等，即同弧或等弧；

③半圆（直径）所对的圆周角是直角；90°的圆周角所对的弦是直径；

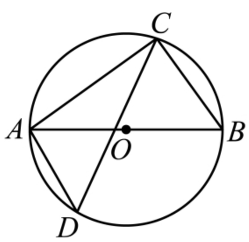
① 圆的内接四边形的对角互补，并且任何一个外角都等于它的内对角；

2.一条弧的度数=这条弧所对的圆心角的度数=这条弧所对的圆周角的度数的2倍；

典例精讲

例1．

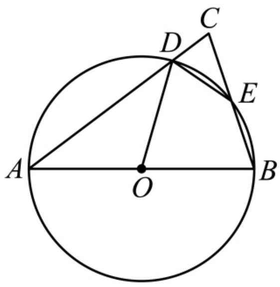
13．如图，在$\odot O$中，AB为直径，点C，D是圆上的点，且$\angle ADC=50^{\circ}$，则$\angle CAB$的度数为（　）



A．50°　　B．80°　　C．40°　　D．30°

例2．

14．如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，以AB为直径的$\odot O$分别交AC、BC于点D、E．



(1)求证：点E是BC的中点；

(2)若$\angle C=70^{\circ}$，求$\angle BOD$的度数．

变式训练

变式1．

15．若等腰$\triangle ABC$内接于$\odot O$，$AB=AC$，$\angle BOC=100^{\circ}$，则$\triangle ABC$底角的度数为（　　）

A．65°　　B．25°　　C．65°或25°　　D．65°或35°

变式2.

16．已知四边形$ABCD$内接于$\odot O$，$\angle DAB=90^{\circ}$．

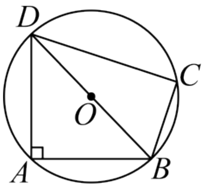


图1

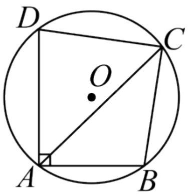


图2

(1)如图1，连接BD，若$\odot O$的半径为6，$AD=AB$，求AB的长；

(2)如图2，连接AC，若$AD=5$，$AB=3$，对角线AC平分$\angle DAB$，求AC的长．

1．D

【分析】本题主要考查圆的相关知识点，利用圆的有关定义及性质分别判断后即可确定正确的选项．

【详解】解：①根据弦的概念，直径是一条线段，且两个端点在圆上，满足弦是连接圆上两点的线段这一概念，所以①正确；

②圆的任意一条直径的两个端点把圆分成两条弧，每一条弧都叫半圆，所以半圆是弧．所以②正确；

③半径相等的两个圆是等圆；正确；

④能够完全重合的两条弧是等弧，长度相等的两条弧不一定是等弧，所以④错误；

⑤在同圆中任意两条直径都互相平分，所以⑤正确；

∴符合题意的是①②③⑤，共 4 个．

故选：D．

2．B

【分析】此题主要考查线段长度的最值，

只有空间站 A 与星球 B、飞船 C 在同一直线上，且点 C 在AB之间时，S 取到最小值，据此求解即可．

【详解】解：空间站 A 与星球 B、飞船 C 在同一直线上时，S 取到最小值 $a-b$．

故选：B．

3．B

【分析】本题考查了圆的相关概念，解题的关键是掌握直径的定义，弧的定义，弧的分类，根据相关概念，逐个判断即可．

【详解】解：A、经过圆心，且两端点在圆上的线段是直径，故 A 不正确，不符合题意；

B、直径是同一个圆中最长的弦，故 B 正确，符合题意；

C、在同圆或等圆中，长度相等的两条弧是等弧，故 C 不正确，不符合题意；

D、弧分为优弧、劣弧和半圆，故 D 不正确，不符合题意；

故选：B．

4．C

【分析】本题考查圆、最值问题、直角三角形性质等知识，首先证明 $AE=BE=m$，根据条件可知 $PE=AE=BE=m$，求出$\odot D$ 上到点 E 的最大距离与最小距离即可解决问题．解题的关键是发现 $PA=AB=AC=a$，求出点 P 到点 A 的最大距离即可解决问题．

【详解】解：$\because E(1,0)$，$A(1-m,0)$，$B(1+m,0)$（$m>0$）

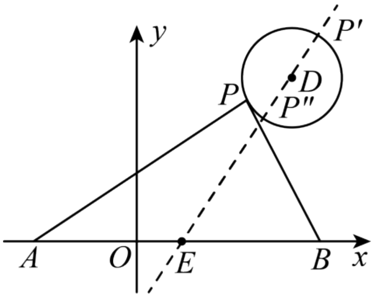
$\therefore AE=1-(1-m)=m$，$BE=m+1-1=m$，

$\therefore AE=BE=m$，

$\because \angle APB=90^{\circ}$，

$\therefore PE=AE=BE=m$，

如图连接DE交$\odot D$于点P''，延长ED交$\odot D$于P'，此时EP'最大，EP''最小



$\because A(1,0)$，$D(4,4)$，

$\therefore ED=5$，

$\therefore EP'=5+1=6$，$EP''=5-1=4$，

$\therefore m$的最大值为6，最小值为4，

$\therefore 4\le m\le 6$.

故选：C.

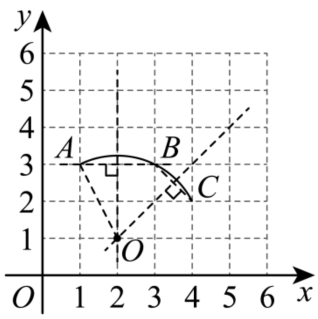
5．A

【分析】本题考查坐标与图形，垂径定理的应用，解答此题的关键是熟知垂径定理，即“垂直于弦的直径平分弦”.根据垂径定理的推论：弦的垂直平分线必过圆心，可以作弦AB和BC的垂直平分线，交点即为圆心.

【详解】解：根据垂径定理的推论：弦的垂直平分线必过圆心，

可以作弦AB和BC的垂直平分线，交点即为圆心.

如图所示，圆心的坐标是(2,1)，



故选：A.

6．A