

第 21 课 圆内接正多边形

3.8



课后培优练



培优第一阶——基础过关练

一、单选题

1. 一个正多边形的半径与边长相等，则这个正多边形的边数为 ()

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 8

【答案】C

【分析】如图（见解析），先根据等边三角形的判定与性质可得 $\angle AOB = 60^\circ$ ，再根据正多边形的中心角与边数的关系即可得.

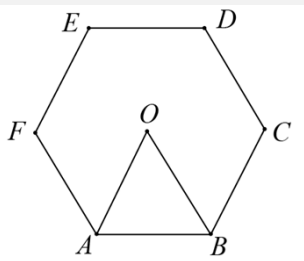
【解析】解：如图，由题意得： $OA = OB = AB$ ，

$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形，

$\therefore \angle AOB = 60^\circ$ ，

则这个正多边形的边数为 $360^\circ \div 60^\circ = 6$ ，

故选：C.



【点睛】本题考查了正多边形，熟练掌握正多边形的中心角与边数的关系是解题关键.

2. 正十边形的中心角是 ()

- A. 18° B. 36° C. 72° D. 144°

【答案】B

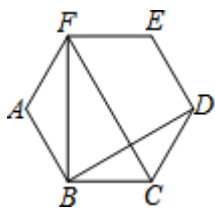
【分析】正多边形的每个中心角相等，且其和是 360° ，故一个中心角的度数为 360° 除以正多边形的边数.

【解析】正十边形的每个中心角相等，且其和是 360° ，故一个中心角的度数为： $360^\circ \div 10 = 36^\circ$

故选：B

【点睛】本题考查了求正多边形中心角，这时要清楚正多边形的中心角都相等且它们的和组成一个周角.

3. 如图，在正六边形 ABCDEF 中， $\triangle BCD$ 的面积为 4，则 $\triangle BCF$ 的面积为 ()



- A. 16 B. 12 C. 8 D. 6

【答案】C

【分析】利用正六边形的性质可得出： $\triangle BCD$ 与 $\triangle BCF$ 同底，其高的比为：2：1，即可得出答案.

【解析】解： $\triangle BCD$ 与 $\triangle BCF$ 同底，其高的比为：2：1，

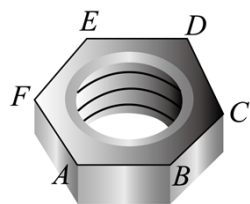
$\therefore \triangle BCD$ 的面积为 4，

$\therefore \triangle BCF$ 的面积为：8.

故选 C.

【点睛】此题考查的是正多边形和圆的题目，利用正六边形的性质，得出 $\triangle BCD$ 与 $\triangle BCF$ 高的比是解题关键.

4. 如图，螺母的外围可以看作是正六边形 ABCDEF，已知这个正六边形的半径是 2，则它的周长是（ ）



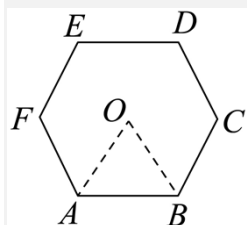
- A. $6\sqrt{3}$ B. $12\sqrt{3}$ C. 12 D. 24

【答案】C

【分析】如图，先求解正六边形的中心角 $\angle AOB$ ，再证明 $\triangle AOB$ 是等边三角形，从而可得答案.

【解析】解：如图， O 为正六边形的中心， OA, OB 为正六边形的半径，

$$\therefore \angle AOB = \frac{1}{6} \times 360^\circ = 60^\circ,$$



$$\therefore OA = OB = 2,$$

$\therefore \triangle AOB$ 为等边三角形，

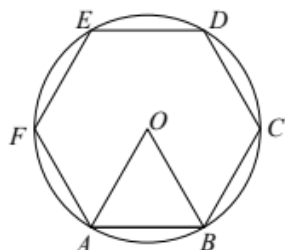
$$\therefore AB = 2,$$

$\therefore$ 正六边形 ABCDEF 的周长为 $6 \times 2 = 12$.

故选：C.

【点睛】本题考查的是正多边形与圆，正多边形的半径，中心角，周长，掌握以上知识是解题的关键.

5. 如图，正六边形 $ABCDEF$ 内接于 $\odot O$ ，已知 $\odot O$ 的半径为 2，则圆心 O 到边 AB 的距离是（ ）

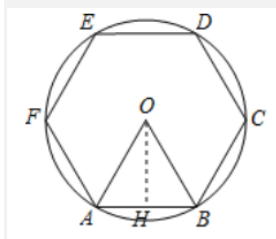


- A. 2 B. 1 C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】C

【分析】过 O 作 $OH \perp AB$ 于 H ，根据正六边形 $ABCDEF$ 的性质得到 $\angle AOB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ ，根据等腰三角形的性质得到 $\angle AOH = 30^\circ$ ， $AH = \frac{1}{2} AB = 1$ ，于是得到结论.

【解析】解：过 O 作 $OH \perp AB$ 于 H ，



在正六边形 $ABCDEF$ 中， $\angle AOB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ ，

$\because OA = OB$ ，

$\therefore \angle AOH = 30^\circ$ ， $AH = \frac{1}{2} AB = 1$ ，

$\therefore OH = \sqrt{3} AH = \sqrt{3}$ ，

故选 C.

【点睛】本题主要考查了正多边形和圆，等腰三角形的性质，含 30° 角直角三角形的性质和勾股定理，解决本题的关键是要正确的作出辅助线和熟练掌握含 30° 角直角三角形的性质和勾股定理.

6. 若一个正多边形的中心角为 40° ，则这个多边形的边数是（ ）

- A. 9 B. 8 C. 7 D. 6

【答案】A

【分析】根据正 n 边形的中心角的度数为 $\frac{360^\circ}{n}$ ，即可求解.

【解析】解：设这个正多边形的边数是 n ，

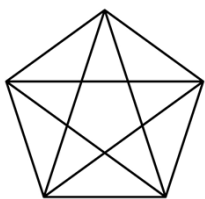
由题意得： $\frac{360^\circ}{n} = 40^\circ$ ，

解得： $n = 9$ ，

故选 A.

【点睛】本题考查正多边形的中心角与边数的关系，解题的关键是掌握“正 n 边形的中心角的度数为 $\frac{360^\circ}{n}$ ”.

7. 如图所示的图案，其外轮廓是一个正五边形，绕它的中心旋转一定的角度后能够与自身重合，则这个旋转角可能是（ ）



A. 90°

B. 72°

C. 60°

D. 36°

【答案】B

【分析】求出正五边形的中心角即可解决问题；

【解析】解： $\because$ 正五边形的中心角 $= \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ ，

$\therefore$ 绕它的中心旋转 72° 角度后能够与自身重合，

故选：B.

【点睛】本题考查旋转对称图形，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型.

8. 我国魏晋时期的数学家刘徽首创“割圆术”：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣”，即通过圆内接正多边形割圆，从正六边形开始，每次边数成倍增加，依次可得圆内接正十二边形，内接正二十四边形，.... 边数越多割得越细，正多边形的周长就越接近圆的周长. 再根据“圆周率等于圆周长与该圆直径的比”来计算圆周率. 设圆的半径为 R ，图 1 中圆内接正六边形的周长 $l_6 = 6R$ ，则

$\pi \approx \frac{l_6}{2R} = 3$. 再利用图 2 圆的内接正十二边形计算圆周率，首先要计算它的周长，下列结果正确的是（ ）



刘徽

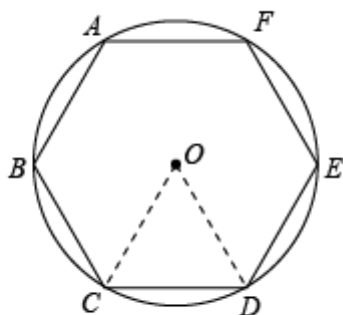


图1

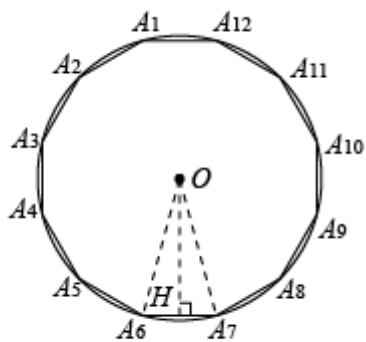


图2

A. $l_{12} = 24R \sin 15^\circ$

B. $l_{12} = 24R \cos 15^\circ$

C. $l_{12} = 24R \sin 30^\circ$

D. $l_{12} = 24R \cos 30^\circ$

【答案】 A

【分析】 求出正多边形的中心角，利用三角形周长公式求解即可．

【解析】 解：∵十二边形 $A_1A_2 \cdots A_{12}$ 是正十二边形，

$$\therefore \angle A_6OA_7 = 30^\circ,$$

$$\because OM \perp A_1A_2 \text{ 于 } M, \text{ 又 } OA_6 = OA_7,$$

$$\therefore \angle A_6OM = 15^\circ,$$

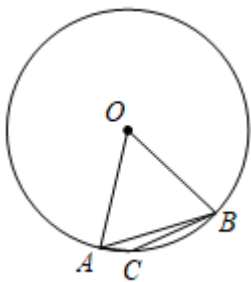
$$\because \text{正 } n \text{ 边形的周长} = n \cdot 2R \sin \frac{180^\circ}{n},$$

$$\therefore \text{圆内接正十二边形的周长 } l_{12} = 24R \sin 15^\circ,$$

故选：A．

【点睛】 本题考查的是正多边形和圆、等腰三角形的性质，求出正十二边形的周长是解题的关键．

9. 如图，边 AB 是 $\odot O$ 内接正六边形的一边，点 C 在 $\widehat{AB}$ 上，且 BC 是 $\odot O$ 内接正八边形的一边，若 AC 是 $\odot O$ 内接正 n 边形的一边，则 n 的值是（ ）



A. 6

B. 12

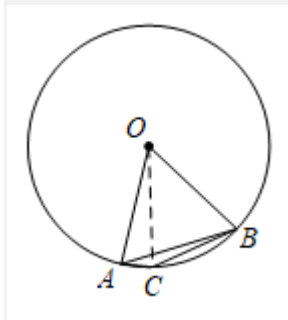
C. 24

D. 48

【答案】C

【分析】根据中心角的度数 $=360^\circ \div$ 边数，列式计算分别求出 $\angle AOB$ ， $\angle BOC$ 的度数，可得 $\angle AOC=15^\circ$ ，然后根据边数 $n=360^\circ \div$ 中心角即可求得答案．

【解析】解：连接 OC ，



$\because AB$ 是 $\odot O$ 内接正六边形的一边，

$$\therefore \angle AOB = 360^\circ \div 6 = 60^\circ,$$

$\because BC$ 是 $\odot O$ 内接正八边形的一边，

$$\therefore \angle BOC = 360^\circ \div 8 = 45^\circ,$$

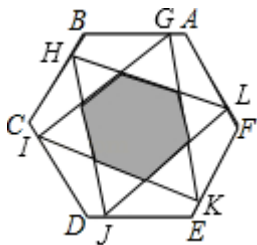
$$\therefore \angle AOC = \angle AOB - \angle BOC = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$$

$$\therefore n = 360^\circ \div 15^\circ = 24.$$

故选：C．

【点睛】本题考查了正多边形和圆、正六边形的性质、正八边形、正二十四边形的性质；根据题意求出中心角的度数是解题的关键．

10. 如图，已知正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 $\sqrt{3}$ ，点 G, H, I, J, K, L 依次在正六边形的六条边上，且 $AG=BH=CI=DJ=EK=FL$ ，顺次连结 G, I, K ，和 H, J, L ，则图中阴影部分的周长 C 的取值范围为（ ）



A. $6 \leq C \leq 6\sqrt{3}$

B. $3 \leq C \leq 3\sqrt{3}$

C. $3\sqrt{3} \leq C \leq 6$

D. $3\sqrt{3} \leq C \leq 6\sqrt{3}$

【答案】C

【分析】根据对称性可知， $\triangle GKI$ ， $\triangle HLJ$ 是等边三角形．阴影部分是正六边形，边长为 GK 的 $\frac{1}{3}$ ．求出正六边形边长的最大值以及最小值即可解决问题．

【解析】根据对称性可知， $\triangle GKI$ 、 $\triangle HLJ$ 是等边三角形．阴影部分是正六边形，边长为 GK 的 $\frac{1}{3}$ ．

$\therefore$ 当 G 与 A 重合、 K 与 E 重合时， GK 的最大值为 3，当 $GK \parallel AF$ 时， GK 的最小值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，

$\therefore$ 阴影部分的正六边形的边长的最大值为 1，最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$\therefore$ 图中阴影部分的周长 C 的取值范围为： $3\sqrt{3} \leq C \leq 6$ ．

故选：C．

【点睛】本题考查正多边形的相关知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于选择题中的压轴题．

二、填空题

11. 半径为 6 的圆内接正三角形的边心距为_____．

【答案】3

【分析】根据题意画出图形，连接 OB 、 OC ，作 $OD \perp BC$ 于 D ，由含 30° 的直角三角形的性质得出 OD 即可．

【解析】如图所示，连接 OB 、 OC ，作 $OD \perp BC$ 于 D ，

则 $\angle ODC = 90^\circ$ ，

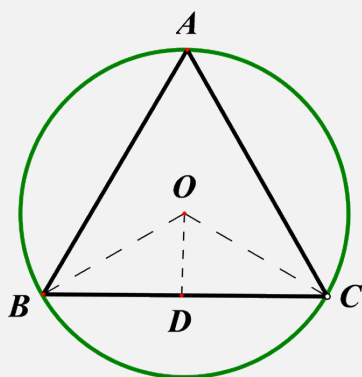
$$\therefore \angle BOC = \frac{1}{3} \times 360^\circ = 120^\circ, \quad OB = OC,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle OCB = 30^\circ,$$

$$\therefore OD = \frac{1}{2} OB = \frac{1}{2} \times 6 = 3,$$

即边心距为 3，

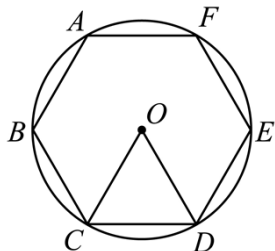
故答案为：3．



【点睛】本题考查了正多边形和圆，等边三角形的性质，含 30° 角的直角三角形的性质，解题的关键是正确

作出辅助线，构造直角三角形来解答.

12. 如图，正六边形 $ABCDEF$ 内接于 $\odot O$ ，连接 OC 、 OD ，若 OC 长为 2cm ，则正六边形 $ABCDEF$ 的周长为 _____ cm .



【答案】 12

【分析】 连接 OC ， OD ，证出 $\triangle COD$ 是等边三角形即可求得答案.

【解析】 解： $\because$ 多边形 $ABCDEF$ 为正六边形，

$$\therefore \angle COD = 360^\circ \times \frac{1}{6} = 60^\circ,$$

$$\because OC = OD,$$

$\therefore \triangle OCD$ 是等边三角形，

$$\because OC \text{ 长为 } 2\text{cm},$$

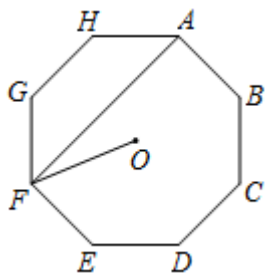
$$\therefore CD = 2\text{cm},$$

$$\therefore \text{正六边形 } ABCDEF \text{ 的周长为 } 2 \times 6 = 12 \text{ (cm)},$$

故答案为：12.

【点睛】 本题考查的是正六边形和圆，等边三角形的判定与性质，熟练掌握正六边形的性质是本题的关键.

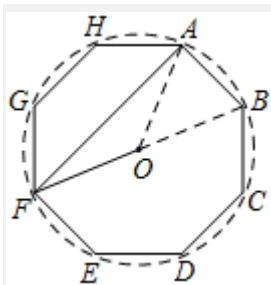
13. 如图，点 O 为正八边形 $ABCDEFGH$ 的中心，则 $\angle AFO$ 的度数为 _____.



【答案】 22.5° .

【分析】 连接 OA 、 OB ，根据正多边形的性质求出 $\angle AOB$ ，再根据圆周角定理计算即可.

【解析】 解：作正八边形 $ABCDEFGH$ 的外接圆 O ，连接 OA 、 OB ，如图：



$$\therefore \angle AOB = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ, F、O、B \text{ 共线},$$

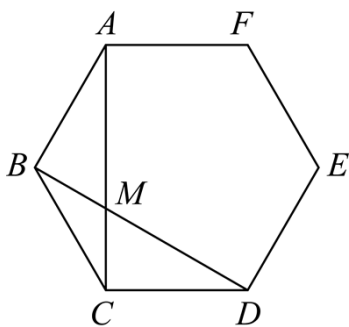
由圆周角定理得：

$$\angle AFO = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \times 45^\circ = 22.5^\circ;$$

故答案为： 22.5° 。

【点睛】本题考查了正多边形和圆，掌握正多边形的圆心角的求法、圆周角定理是解题的关键。

14. 在正六边形 $ABCDEF$ 中，对角线 AC ， BD 相交于点 M ，则 $\frac{AM}{CM}$ 的值为_____。



【答案】2

【分析】根据多边形的内角和公式即可得出 $\angle ABC$ ， $\angle BCD$ 的度数，再根据等腰三角形的性质证明 $BM = CM$ ， $\angle ABM = 90^\circ$ ，设 $BM = a$ ，则 $CM = a$ ，则 $AM = 2a$ ，从而可得答案。

【解析】解：∵ 六边形 $ABCDEF$ 是正六边形，

$$\therefore \angle BCD = \angle ABC = \frac{1}{6} (6-2) \times 180^\circ = 120^\circ, AB = BC = CD,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ACB = \angle CBD = \angle CDB = \frac{1}{2} (180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ,$$

$$\therefore CM = BM, \angle ABM = 90^\circ,$$

设 $BM = a$ ，则 $CM = a$ ，

$$\therefore AM = 2BM = 2a,$$

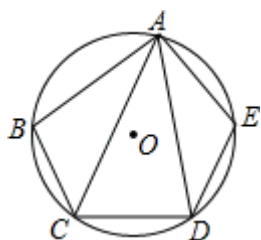
$$\therefore \frac{AM}{CM} = \frac{2a}{a} = 2.$$

故答案为 2。

【点睛】本题考查了正多边形和圆、多边形的内角与外角以及等腰三角形的性质，含 30° 的直角三角形的性

质等知识，熟记多边形的内角和公式是解答本题的关键.

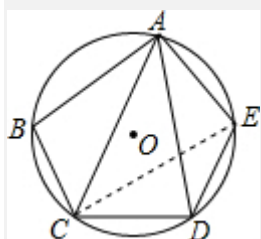
15. 如图，在 $\odot O$ 的内接五边形 $ABCDE$ 中， $\angle CAD=30^\circ$ ，则 $\angle B+\angle E=$ _____.



【答案】 210° .

【分析】 连接 CE ，根据圆内接四边形对角互补可得 $\angle B+\angle AEC=180^\circ$ ，再根据同弧所对的圆周角相等可得 $\angle CED=\angle CAD$ ，然后求解即可.

【解析】 解析：连接 CE . $\because$ 五边形 $ABCDE$ 是 $\odot O$ 的内接五边形， $\therefore$ 四边形 $ABCE$ 是 $\odot O$ 的内接四边形， $\therefore \angle B+\angle AEC=180^\circ$. $\because \angle CED=\angle CAD=30^\circ$ ， $\therefore \angle B+\angle E=180^\circ+30^\circ=210^\circ$.



故答案为: 210° .

【点睛】 本题考查圆内接四边形的性质，同弧所对的圆周角相等的性质，熟记性质并作辅助线构造出圆内接四边形是解题关键.

16. 如图 1 的螺丝钉由头部（直六棱柱）和螺纹（圆螺纹直径柱）组合而成，其俯视图如图 2 所示. 小明想用一把刻度尺测量出螺纹直径. 已知刻度尺紧靠螺纹，经过点 A 且交 CD 于点 P ，若测得 AP 长为 13mm ，正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 7.5mm ，则 CP 长为_____mm， 螺纹直径为_____mm.



图1

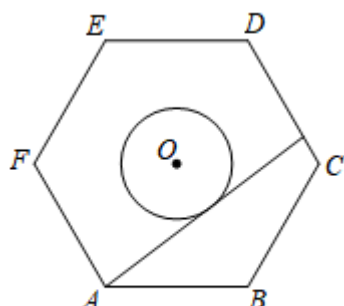


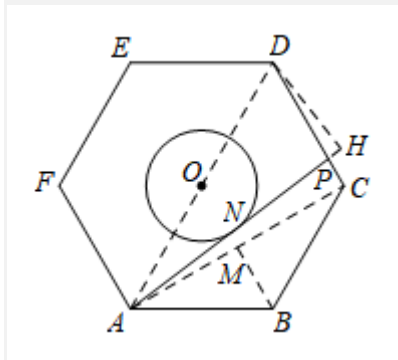
图2

【答案】 $0.5\frac{1}{2}$ $\frac{105}{26}\sqrt{3}$ $\frac{105\sqrt{3}}{26}$

【分析】 连接 AC ，过点 B 作 $BM\perp AC$ 于点 M ，设正六边形 $ABCDEF$ 的中心为 O ，连接 AD ，知 A 、 O 、 D

共线，过点 O 作 $ON \perp AP$ 于点 N ，过 D 作 $DH \perp AP$ 于 H ，利用正六边形的性质先、勾股定理求出 AC 的长度，结合 AP 的长度求出 PC 长度；再根据 $\triangle AON \sim \triangle ADH$ 知 $DH = 2ON$ ，设 $PH = x$ ，利用勾股定理得到关于 x 的方程，再用勾股定理求出 DH 及 ON 长度即可。

【解析】解：连接 AC ，过点 B 作 $BM \perp AC$ 于点 M ，设正六边形 $ABCDEF$ 的中心为 O ，连接 AD ，由题意知， A 、 O 、 D 共线，过点 O 作 $ON \perp AP$ 于点 N ，过 D 作 $DH \perp AP$ 于 H ，如图，



则 $\angle AMB = \angle CMB = \angle ANO = 90^\circ$ ，

由 $DH \perp AP$ 知， $ON \parallel DH$ ，

$\therefore \triangle AON \sim \triangle ADH$ ，

$$\therefore \frac{AO}{AD} = \frac{ON}{DH}，$$

$\because O$ 是 AD 中点，

$\therefore DH = 2ON$ ，

在正六边形 $ABCDEF$ 中， $AB = BC = 7.5 \text{ mm}$ ， $\angle BAF = \angle ABC = \angle BCD = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle BAC = \angle BCA = 30^\circ$ ， $AM = CM = \frac{1}{2}AC$ ， $\angle ACP = \angle BCD - \angle BCA = 90^\circ$ ，

在 $Rt\triangle ABM$ 中， $AM = AB \cdot \cos \angle BAC = 7.5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4} \text{ (mm)}$ ，

$$\therefore AC = 2AM = \frac{15\sqrt{3}}{2} \text{ (mm)}，$$

在 $Rt\triangle ACP$ 中， $AP = 13 \text{ mm}$ ，由勾股定理得， $CP = \sqrt{AP^2 - AC^2} = \sqrt{13^2 - \left(\frac{15\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 0.5 \text{ (mm)}$ ，

$\therefore DP = 7 \text{ mm}$ ，

$\because$ 正六边形的半径与边长相等，

$\therefore OA = AB = 7.5 \text{ mm}$ ， $AD = 15 \text{ mm}$ ，

设 $PH = x \text{ mm}$ ，则 $AH = (13 + x) \text{ mm}$ ，

在 $Rt\triangle DPH$ 和 $Rt\triangle ADH$ 中，由勾股定理得：

$$\therefore \angle ABC = \angle BAE = \angle CDE = 540^\circ \times \frac{1}{5} = 108^\circ, \quad AE = DE = AB,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle ADE = \frac{1}{2}(180^\circ - 108^\circ) = 36^\circ,$$

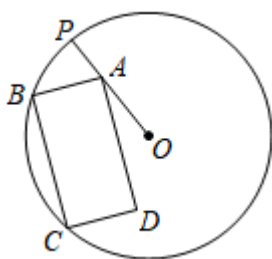
$$\text{又 } \angle CDE = 108^\circ, \quad \angle ADE = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle CDE - \angle ADE = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ.$$

故答案为： 72° ； 36° ； 72° ； 108°

【点睛】此题考查了正五边形的性质，圆周角定理，多边形内角和定理，等腰三角形的性质，利用了转化的思想，结合图形找出已知条件与所求角的关系是解本题的关键。

18. 如图，点 P 为 $\odot O$ 上一点，连接 OP ，且 $OP = 4$ ，点 A 为 OP 上一动点，点 B 为 $\odot O$ 上一动点，连接 AB ，以线段 AB 为边在 $\odot O$ 内构造矩形 $ABCD$ ，且点 C 在 $\odot O$ 上，则矩形 $ABCD$ 面积的最大值为_____.



【答案】32

【分析】根据当圆的半径确定以后，圆内接正方形是圆内接矩形中面积最大的，进而求得圆内接正方形的面积，则矩形 $ABCD$ 面积的最大值为圆内接正方形面积，据此求解即可。

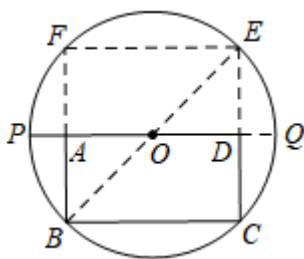
【解析】如图，四边形 $BCEF$ 是圆 O 的内接正方形，当圆的半径确定以后，圆内接正方形是圆内接矩形中面积最大的；

点 A ， D 分别是正方形的对边 BF ， CE 的中点，

此时矩形 $ABCD$ 的面积恰好是正方形 $BCEF$ 的面积，

圆 O 的直径 PQ 恰好经过点 A ， D ，

连接 BE ，



$\therefore$ 四边形 $BCEF$ 是圆 O 的内接正方形， $OP = 4$ ，

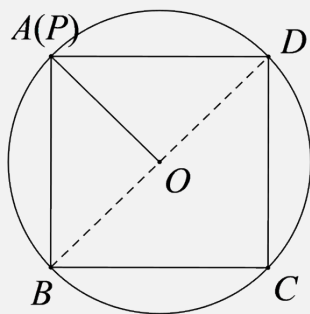
$\therefore BE = PQ = 2OP = 8$ ， $BC = CE$ ，

$$\because \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore BC^2 + CE^2 = 2BO^2 = BE^2 = 8^2,$$

$$\therefore BC^2 = 32, \text{ 即 } S_{\text{正方形}BCEF} = 32,$$

如图，当 P, A 重合时，当 A, B, C, D 四点都在圆上时，四边形 $ABCD$ 是正方形



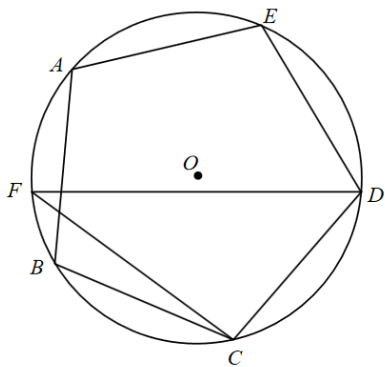
矩形 $ABCD$ 面积的最大值为 32.

故答案为：32.

【点睛】本题考查了圆内接四边形，将问题转化为圆内接四边形是解题的关键.

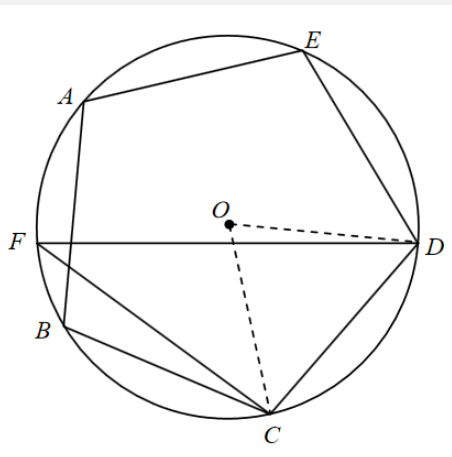
三、解答题

19. 如图，正五边形 $ABCDE$ 内接于 $\odot O$ ，点 F 在 $\widehat{AB}$ 上，求 $\angle CFD$ 的度数.



【答案】 36°

【分析】如图所示，连接 OC 、 OD ，由正五边形的性质可得 $\angle COD$ 的度数，由圆周角与圆心角的关系：在同圆或等圆中同弧所对的圆周角是圆心角的一半，即可得出答案.



【解析】

如图所示，连接 OC 、 OD ，

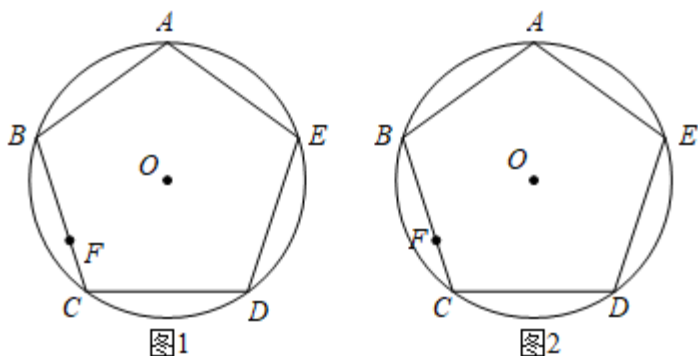
$\because$ 五边形 $ABCDE$ 是正五边形，

$$\therefore \angle COD = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle CFD = \frac{1}{2} \angle COD = 36^\circ.$$

【点睛】本题考查正多边形和圆以及圆周角定理，解题关键是构造弧 CD 所对的圆心角。

20. 如图， $\odot O$ 为正五边形 $ABCDE$ 的外接圆，已知 $CF = \frac{1}{3}BC$ ，请用无刻度直尺完成下列作图，保留必要的画图痕迹。



(1) 在图 1 中的边 DE 上求作点 G ，使 $DG = CF$ ；

(2) 在图 2 中的边 DE 上求作点 H ，使 $EH = CF$ 。

【答案】(1) 见解析

(2) 见解析

【分析】(1) 连接 AO 并延长与 CD 相交，连接 EF 交 AO 延长线于 M ，连接 BM 与 DE 的交点即为所求作；

(2) 在 (1) 的基础上，连接 BO 并延长与 DE 相交，连接 AG 交 BO 延长线于 N ，连接 CN 并延长即可。

(1)

连接 AO 并延长 与 CD 相交, 连接 EF 交 AO 延长线于 M , 连接 BM 交 DE 于点 G , 则点 G 为所求作, 如图 1 所示;

理由:

$\because \odot O$ 为正五边形的外接圆,

$\therefore$ 直线 AO 是正五边形 $ABCDE$ 的一条对称轴, 点 B 与点 E 、点 C 与点 D 分别是一对对称点.

$\because$ 点 M 在直线 AO 上,

$\therefore$ 射线 BM 与射线 EF 关于直线 AO 对称, 从而点 F 与点 G 关于直线 AO 对称,

$\therefore CF$ 与 DG 关于直线 AO 对称.

$\therefore DG=CF$.

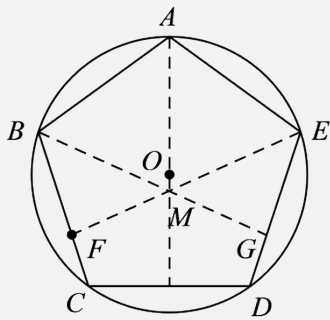


图1

(2)

在 (1) 的基础上, 连接 BO 并延长与 DE 相交, 连接 AG 交 BO 延长线于 N , 连接 CN , 如图 2 所示;

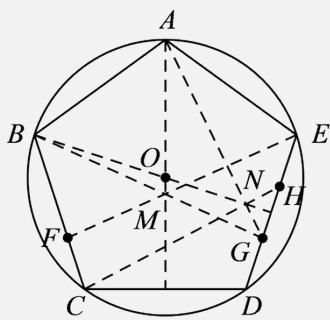
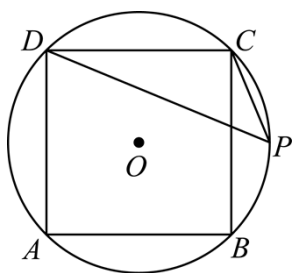


图2

【点睛】 本题考查了作图: 无刻度直尺作图, 考查了正五边形的对称性质, 掌握正五边形的性质是解题的关键.

21. 如图, 正方形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, P 为 $\widehat{BC}$ 上的一点, 连接 DP , CP .



(1) 求 $\angle CPD$ 的度数;

(2) 当点 P 为 $\widehat{BC}$ 的中点时, CP 是 $\odot O$ 的内接正 n 边形的一边, 求 n 的值.

【答案】 (1) $\angle DPC = 45^\circ$

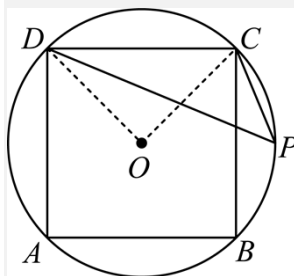
(2) $n = 8$

【分析】 (1) 连接 OD , OC , 根据正方形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, 结合圆周角定理可得 $\angle CPD$;

(2) 结合正多边形的性质以及圆周角定理得出 $\angle COP$ 的度数, 进而得出答案.

(1)

解: 连接 OD , OC ,



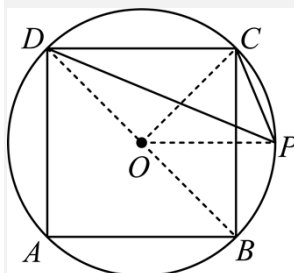
$\because$ 正方形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$,

$\therefore \angle DOC = 90^\circ$,

$\therefore \angle DPC = \frac{1}{2} \angle DOC = 45^\circ$.

(2)

解: 连接 PO , OB , 如图所示:



$\because$ 正方形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$,

$$\therefore \angle COB = 90^\circ,$$

$\because$ 点 P 为 $\widehat{BC}$ 的中点,

$$\therefore \widehat{CP} = \widehat{BP},$$

$$\therefore \angle COP = \frac{1}{2} \angle COB = 45^\circ,$$

$$\therefore n = 360 \div 45 = 8.$$

【点睛】本题主要考查了正多边形和圆以及圆周角定理、正方形的性质，解题的关键是熟练掌握同弧所对的圆周角等于圆心角的一半.

22. 如图 1, 等边 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, 连接 CO 并延长交 $\odot O$ 于点 D .

(1) 可以证明 CD 垂直平分 AB , 写出 $\widehat{AD}$ 与 $\widehat{DB}$ 的数量关系: ____.

(2) 请你仅使用无刻度的直尺按要求作图:

①在图 1 中作出一个正六边形, 保留作图痕迹 (作图过程用虚线表示, 作图结果用实线表示).

②请在图 2 中作出 $\odot O$ 的内接正六边形 $ADBECF$ 的一条不经过顶点的对称轴, 保留作图痕迹 (作图过程用虚线表示, 作图结果用实线表示).

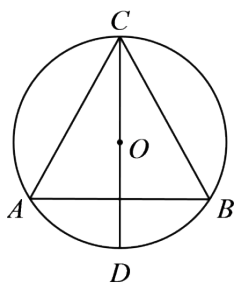


图1

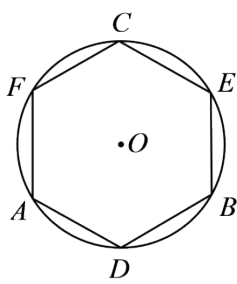


图2

【答案】(1) $\widehat{AD} = \widehat{DB}$; (2) ①见解析, ②见解析

【分析】(1) 结合外心的定义和等边三角形的性质推断出 CD 垂直平分 AB , 从而利用垂径定理得出结论即可;

(2) ①结合 (1) 的结论, 可直接连接 AO , BO , 分别延长与圆相交, 再顺次连接各交点即可;

②如图, 延长 AF , EC , 交于一点, 此时可构成等边三角形, 从而连接交点与圆心的直线即为所求的对称轴.

【解析】(1) $\widehat{AD} = \widehat{DB}$,

$\because O$ 为三角形的外心,

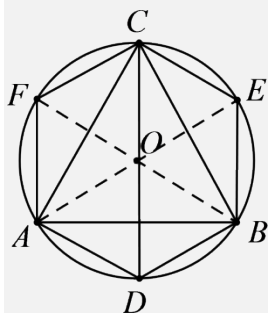
$\therefore O$ 为三角形三边中垂线的交点,

又 $\because$ 三角形为等边三角形,

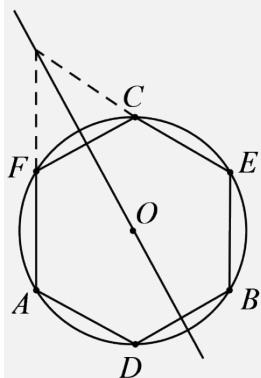
∴可得 CD 垂直平分 AB，

根据垂径定理可得： $\widehat{AD} = \widehat{DB}$ ；

(2) ①如图所示，在 (1) 的基础之上，连接 AO，并延长至 E，连接 BO，并延长至 F，顺次连接圆周上各点即可；



②如图所示：(方法不唯一)



【点睛】本题主要考查复杂作图，以及正多边形与圆之间的关系，熟练掌握正多边形的性质是解题关键.

23. 请仅用无刻度的直尺画图，不写作法，保留画图痕迹.

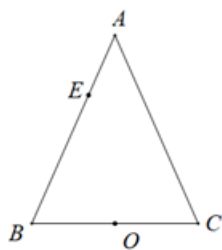


图 1

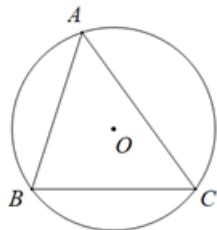


图 2

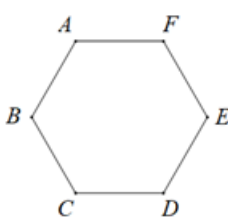


图 3

(1) 如图 1，点 O 是等腰 $\triangle ABC$ 底边 BC 的中点，E 是 AB 上一点，请在 AC 上作出点 F，使 $EF \parallel BC$ ；

(2) 如图 2， $\triangle ABC$ 为 $\odot O$ 的内接三角形，请在 AB，AC 上分别作出点 M，N，使 $MN \parallel BC$ ；

(3) 如图 3，六边形 ABCDEF 为正六边形，在 AF 上取一点 H，使 $HF = 2AH$.

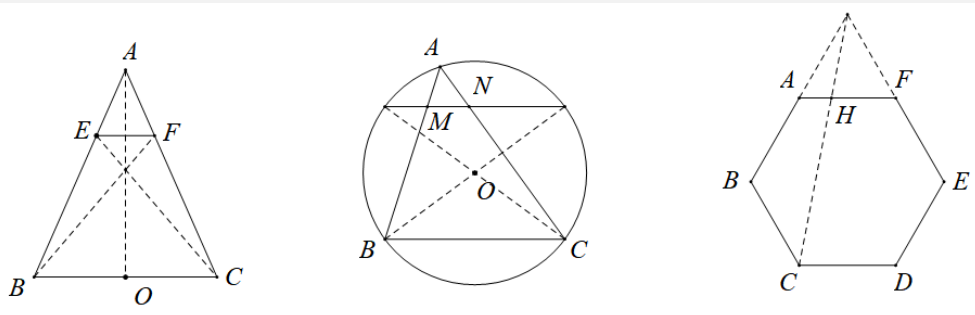
【答案】(1) 见解析；(2) 见解析；(3) 见解析.

【分析】(1) 连接 CE、AO，过它们的交点作直线 BF，交 AC 于点 F，连接 EF 即可；

(2) 过 B、C 两点画两条直径，连接两条直径的另外两个端点，与 AB、AC 分别交于点 M、N，连接 MN 即可；

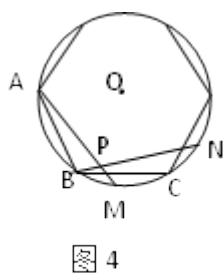
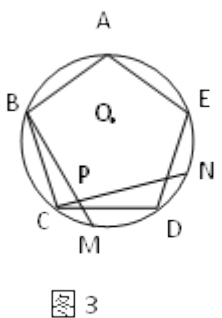
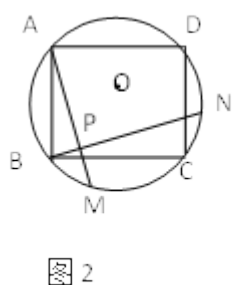
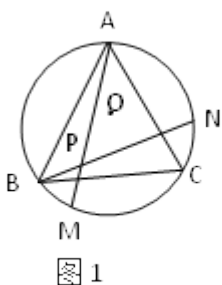
(3) 延长 BA 、 EF ，过交点作直线 CH ，交 AF 于点 F 即可。

【解析】如图所示。



【点睛】本题考查了无刻度的直尺画图，解题关键是掌握相关图形的性质，通过构造全等、相似或特殊图形解决问题。

24. 如图 1、图 2、图 3、...、图 n 分别是 $\odot O$ 的内接正三角形 ABC ，正四边形 $ABCD$ 、正五边形 $ABCDE$ 、...、正 n 边形 $ABCD\dots$ ，点 M 、 N 分别从点 B 、 C 开始以相同的速度在 $\odot O$ 上逆时针运动。



(1) 求图 1 中 $\angle APN$ 的度数；

(2) 图 2 中， $\angle APN$ 的度数是_____，图 3 中 $\angle APN$ 的度数是_____。

(3) 试探索 $\angle APN$ 的度数与正多边形边数 n 的关系（直接写答案）

【答案】(1) 60° ；(2) 90° ， 108° ；(3) $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$ 。

【分析】根据对顶角相等和三角形内角和外角的关系解答即可。

【解析】解：(1) 图 1： $\because$ 点 M 、 N 分别从点 B 、 C 开始以相同的速度在 $\odot O$ 上逆时针运动，
 $\therefore \angle BAM = \angle CBN$ ，

又 $\because \angle APN = \angle BPM$,

$\therefore \angle APN = \angle BPM = \angle ABN + \angle BAM = \angle ABN + \angle CBN = \angle ABC = 60^\circ$;

(2) 同理可得: 在图 2 中, $\angle APN = 90^\circ$; 在图 3 中, $\angle APN = 108^\circ$.

(2) 由 (1) 可知, $\angle APN =$ 所在多边形的内角度数, 故在图 n 中, $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$.

【点睛】此题是一道规律探索题, 体现了探索发现的一般规律: 通过计算得出特殊多边形中的角 $\angle APN$ 的度数, 然后得出 n 边形的 $\angle APN$ 的度数.

25. 如图 1, 正五边形 $ABCDE$ 内接于 $\odot O$, 阅读以下作图过程, 并回答下列问题, 作法: 如图 2, ①作直径 AF ; ②以 F 为圆心, FO 为半径作圆弧, 与 $\odot O$ 交于点 M, N ; ③连接 AM, MN, NA .

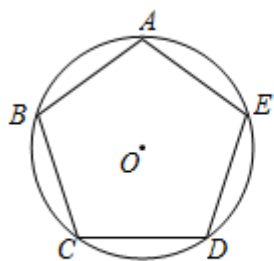


图1

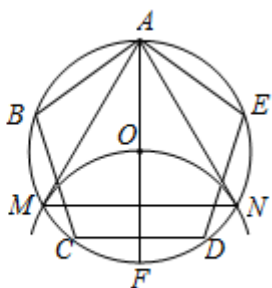


图2

(1) 求 $\angle ABC$ 的度数.

(2) $\triangle AMN$ 是正三角形吗? 请说明理由.

(3) 从点 A 开始, 以 DN 长为半径, 在 $\odot O$ 上依次截取点, 再依次连接这些分点, 得到正 n 边形, 求 n 的值.

【答案】 (1) 108°

(2) 是正三角形, 理由见解析

(3) $n = 15$

【分析】 (1) 根据正五边形的性质以及圆的性质可得 $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{EA}$, 则 $\angle AOC$ (优弧所对圆心角) $= 3 \times 72^\circ = 216^\circ$, 然后根据圆周角定理即可得出结论;

(2) 根据所作图形以及圆周角定理即可得出结论;

(3) 运用圆周角定理并结合 (1) (2) 中结论得出 $\angle NOD = 144^\circ - 120^\circ = 24^\circ$, 即可得出结论.

(1)

解: $\because$ 正五边形 $ABCDE$.

$\therefore \widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{EA}$,

$$\therefore \angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOA = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ,$$

$$\because \widehat{AEC} = 3\widehat{AE},$$

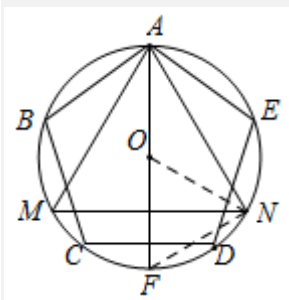
$$\therefore \angle AOC \text{ (优弧所对圆心角)} = 3 \times 72^\circ = 216^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \times 216^\circ = 108^\circ;$$

(2)

解： $\triangle AMN$ 是正三角形，理由如下：

连接 ON, FN ，



由作图知： $FN = FO$ ，

$$\because ON = OF,$$

$$\therefore ON = OF = FN,$$

$\therefore \triangle OFN$ 是正三角形，

$$\therefore \angle OFN = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AMN = \angle OFN = 60^\circ,$$

同理 $\angle ANM = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle MAN = 60^\circ, \text{ 即 } \angle AMN = \angle ANM = \angle MAN,$$

$\therefore \triangle AMN$ 是正三角形；

(3)

$\because \triangle AMN$ 是正三角形，

$$\therefore \angle AON = 2\angle AMN = 120^\circ.$$

$$\because \widehat{AD} = 2\widehat{AE},$$

$$\therefore \angle AOD = 2 \times 72^\circ = 144^\circ,$$

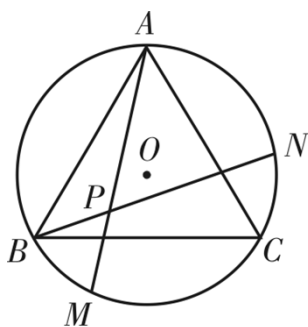
$$\because \widehat{DN} = \widehat{AD} - \widehat{AN},$$

$$\therefore \angle NOD = 144^\circ - 120^\circ = 24^\circ,$$

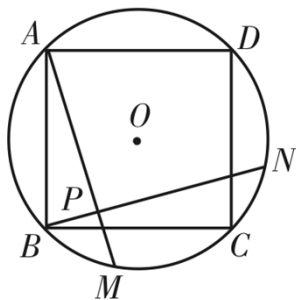
$$\therefore n = \frac{360}{24} = 15.$$

【点睛】本题考查了圆周角定理，正多边形的性质，读懂题意，明确题目中的作图方式，熟练运用圆周角定理是解本题的关键.

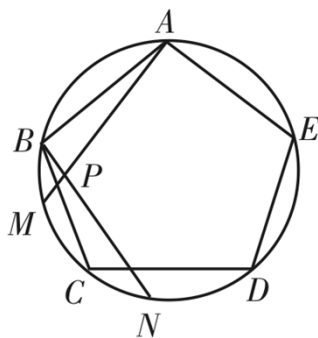
26. 如图所示，正三角形 ABC 、正方形 $ABCD$ 、正五边形 $ABCDE$ 分别是 $\odot O$ 的内接三角形、内接四边形、内接五边形，点 M 、 N 分别从点 B 、 C 开始，以相同的速度在 $\odot O$ 上逆时针运动.



①



②



③

- (1) 求图①中 $\angle APB$ 的度数
- (2) 图②中 $\angle APB$ 的度数是_____，图③中 $\angle APB$ 的度数是_____；
- (3) 若推广到一般的正 n 边形情况，请写出 $\angle APB$ 的度数是_____.

【答案】(1) 120° ；(2) 90° ， 72° ；(3) $\frac{360^\circ}{n}$

【分析】(1) 根据等边三角形的性质、旋转的性质，求出 $\angle APN = \angle ABC = 60^\circ$ ，即可求出答案；

(2) 与 (1) 同理，可求 $\angle APN = \angle ABC$ ，根据正方形和正五边形的内角度数，即可求出答案；

(3) 与 (1) (2) 同理， $\angle APB$ 为所在多边形的外角度数，即可得到答案.

【解析】解：(1) $\because \triangle ABC$ 是正三角形，

$$\therefore \angle ABC = 60^\circ,$$

$\because$ 点 M 、 N 分别从点 B 、 C 开始以相同的速度在 $\odot O$ 上逆时针运动，

$$\therefore \angle BAM = \angle CBN,$$

$$\therefore \angle APN = \angle ABN + \angle BAM = \angle ABN + \angle CBN = \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle APB = 180^\circ - \angle APN = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ;$$

(2) 由图②，四边形 $ABCD$ 是正方形，则与 (1) 同理，

$$\angle APN = \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle APB = 180^\circ - \angle APN = 90^\circ;$$

由图③，正五边形 $ABCDE$ 中，与 (1) 同理，

$$\therefore \angle APN = \angle ABC = 108^\circ,$$

$$\therefore \angle APB = 180^\circ - \angle APN = 72^\circ;$$

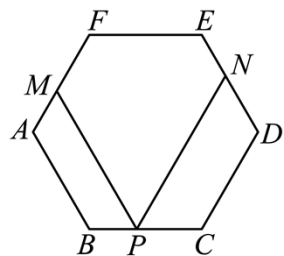
故答案为: 90° ; 72° ;

(3) 由(1)可知, $\angle APB$ 为所在正多边形的外角度数, 故在图 n 中, 有 $\angle APB = \frac{360^\circ}{n}$;

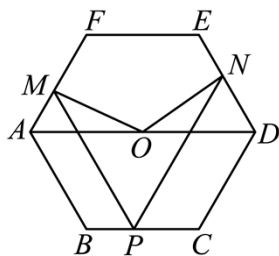
故答案为: $\frac{360^\circ}{n}$;

【点睛】此题是一道规律探索题, 体现了探索发现的一般规律: 通过计算得出特殊多边形中的角 $\angle APN$ 的度数, 然后得出 n 边形的 $\angle APN$ 的度数.

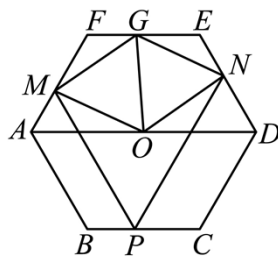
27. 如图①, 正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 a , P 是 BC 上一动点, 过 P 作 $PM \parallel AB$ 交 AF 于 M , 作 $PN \parallel CD$ 交 DE 于 N .



图①



图②



图③

(1) 求出 $\angle MPN$ 的度数, 并证明 $PM + PN = 3a$;

(2) 如图②, 点 O 是 AD 的中点, 连接 OM 、 ON , 求证: $OM = ON$;

(3) 如图③, 点 O 是 AD 的中点, OG 平分 $\angle MON$, 求证: 四边形 $OMGN$ 是菱形.

【答案】(1) 60° ; 证明见详解;

(2) 证明见详解;

(3) 证明见详解.

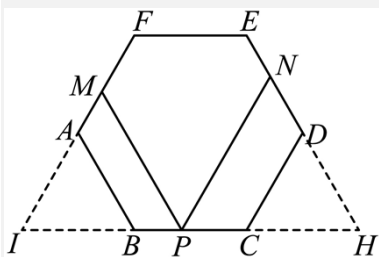
【分析】(1) 根据正六边形的性质和平行线的性质, 得到两个正三角形, 然后等量代换即可;

(2) 根据正六边形的性质, 得到 OM 、 ON 所在的三角形全等, 即可证明;

(3) 根据(2)的结论以及题意, 证明 $\triangle MOG$ 和 $\triangle GON$ 是等边三角形, 即可证明结论.

(1)

证明: 延长 FA 、 ED , 分别交 BC 延长线于 I , H



$\because MP \parallel AB, PN \parallel CD, ABCDEF$ 是正六边形

$\therefore \triangle IPM, \triangle IAB, \triangle HPN, \triangle HCD$ 均为等边三角形

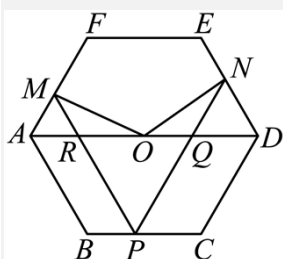
$\therefore PM=PI, AB=IB, PN=PH, CD=CH, \angle IPM=\angle HPN=60^\circ$

$\therefore \angle MPN=180^\circ-60^\circ-60^\circ=60^\circ$

$PM+PN=PI+PH=IB+BP+PC+CH=AB+BC+CD=3a$

(2)

证明：如图，令 MP 交 AD 于 R ， NP 交 AD 于 Q ，



$\because ABCDEF$ 是正六边形， O 是 AD 中点

$\therefore AD \parallel BC, AO=OD=AB, \angle MAR=\angle NDQ=60^\circ$

$\because PM \parallel AB$

$\therefore ABPR$ 是平行四边形，

$\therefore AR=BP, \angle ARM=180^\circ-120^\circ=60^\circ$

$\therefore \triangle ARM$ 是等边三角形，

$\therefore AM=MQ=AQ, \angle MRO=120^\circ$

同理可证 $QD=PC, DN=DQ=QN, \angle OQN=120^\circ$ ，

$\therefore AO=AR+RO=OQ+QD=BP+PC$

$\therefore AR=OQ, RO=QN$

在 $\triangle MRO$ 和 $\triangle OQN$ 中

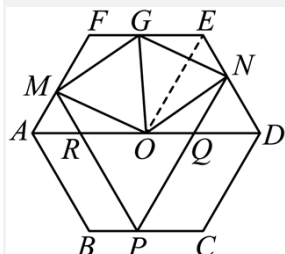
$$\begin{cases} MR = OQ \\ \angle MRO = \angle OQN = 120^\circ \\ RO = QN \end{cases}$$

$$\therefore \triangle MRO \cong \triangle OQN$$

$$\therefore MO = NO$$

(3)

证明：连接 OE ，



$\because ABCDEF$ 是正六边形

$$\therefore \angle EOD = 60^\circ$$

由 (2) 知 $\angle NOQ + \angle MOR = 60^\circ$

$$\therefore \angle MON = 120^\circ$$

$\because OG$ 是 $\angle MON$ 的角平分线

$$\therefore \angle GON = 60^\circ$$

$$\because \angle GOE + \angle EON = 60^\circ, \angle DON + \angle EON = 60^\circ$$

$$\therefore \angle GOE = \angle DON$$

在 $\triangle GOE$ 和 $\triangle DON$ 中

$$\begin{cases} \angle GEO = \angle NDO = 60^\circ \\ OE = OD \\ \angle GOE = \angle DON \end{cases}$$

$$\therefore \triangle GOE \cong \triangle DON$$

$$\therefore GO = GN$$

$$\therefore GO = GM$$

$$\because \angle MOG = \angle NOG = 60^\circ$$

$\therefore \triangle MOG$ 和 $\triangle GON$ 都是等边三角形

$$\therefore MO = NO$$

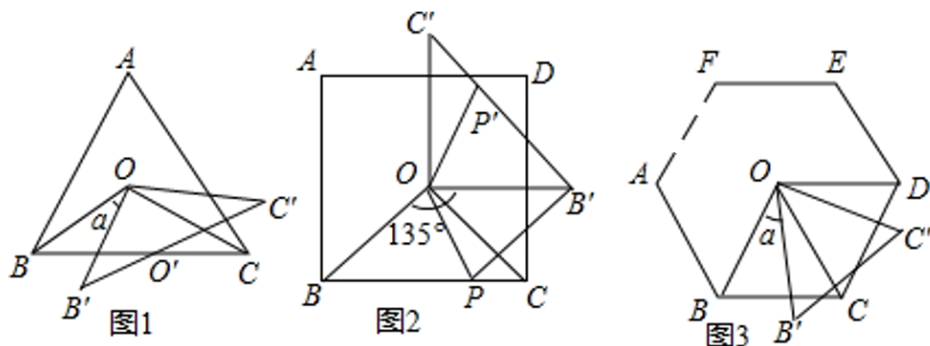
$$\therefore MO = NO = NG = GM$$

$\therefore$ 四边形 $MONG$ 是菱形；

【点睛】 本题考查了正六边形，涉及了正三角形、平行线的性质、全等三角形等知识，掌握并熟练使用相

关知识，同时注意解题中需注意的事情，精准识图，合理推论是本题的解题关键.

28. 在下列正多边形中， O 是中心，定义： $\triangle OBC$ 为相应正多边形的基本三角形. 如图 1， $\triangle OBC$ 是正三角形 ABC 的基本三角形；如图 2， $\triangle OBC$ 是正方形 $ABCD$ 的基本三角形；如图 3， $\triangle OBC$ 为正 n 边形 $ABCDEF \dots$ 的基本三角形. 将基本 $\triangle OBC$ 绕点 O 逆时针旋转 α 角度得 $\triangle OB'C'$.



(1) 若线段 BC 与线段 $B'C'$ 相交点 O' ，则：

图 1 中 α 的取值范围是_____；

图 3 中 α 的取值范围是_____；

(2) 在图 1 中，求证 $BO' = O'C'$

(3) 在图 2 中，正方形边长为 4， $\alpha = 135^\circ$ ，边 BC 上的一点 P 旋转后的对应点为 P' ，若 $B'P + OP'$ 有最小值时，求出该最小值及此时 BP 的长度；

(4) 如图 3，当 $B'C' \perp OC$ 时，直接写出 α 的值.

【答案】 (1) $0^\circ < \alpha \leq 120^\circ$ ， $0^\circ < \alpha \leq \frac{360^\circ}{n}$ ；(2) 见解析；(3) 最小值： $2\sqrt{6}$ ，此时 $BP = 2 + \sqrt{2}$ ；(4)

$$\frac{180^\circ}{n}$$

【分析】 (1) 根据正多边形的中心角的定义即可解决问题；

(2) 如图 1 中，作 $OE \perp BC$ 于 E ， $OF \perp B'C'$ 于 F ，连接 OO' . 利用全等三角形的性质分别证明： $BE = C'F$ ， $EO' = FO'$ 即可解决问题；

(3) 如图 2 中，作点 O 关于 BC 的对称点 E ，连接 OE 交 BC 于 K ，连接 EB' 交 BC 于点 P'' ，连接 OP'' ，此时 $OP'' + B'P''$ 的值最小，即 $B'P + OP'$ 有最小值.

(4) 利用等腰三角形三线合一的性质即可解决问题；

【解析】 (1) 由题意图 1 中， $\because \triangle ABC$ 是等边三角形， O 是中心，

$$\therefore \angle AOB = 120^\circ$$

$$\therefore \angle \alpha \text{ 的取值范围是： } 0^\circ < \alpha \leq 120^\circ,$$

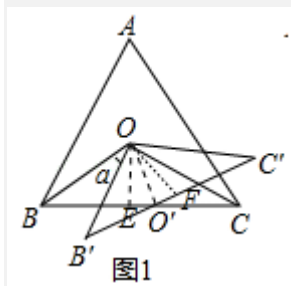
图 3 中， $\because ABCDEF \dots$ 是正 n 边形， O 是中心，

$$\therefore \angle BOC = \frac{360^\circ}{n},$$

$$\therefore \angle \alpha \text{ 的取值范围是: } 0^\circ < \alpha \leq \frac{360^\circ}{n},$$

$$\text{故答案为: } 0^\circ < \alpha \leq 120^\circ, 0^\circ < \alpha \leq \frac{360^\circ}{n}.$$

(2) 如图 1 中, 作 $OE \perp BC$ 于 E , $OF \perp B'C'$ 于 F , 连接 OO' .



$$\because \angle OEB = \angle OFC' = 90^\circ,$$

根据题意, O 是中心, $\therefore OB = OC$,

$$\therefore \angle OBE = \angle C',$$

$$\therefore \triangle OBE \cong \triangle OC'F \text{ (AAS)},$$

$$\therefore OE = OF, BE = C'F$$

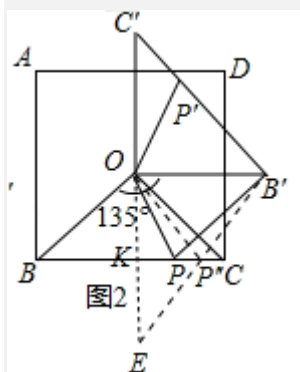
$$\because OO' = OO',$$

$$\therefore \text{Rt} \triangle OO'E \cong \text{Rt} \triangle OO'F \text{ (HL)},$$

$$\therefore EO' = FO',$$

$$\therefore BO' = O'C'.$$

(3) 如图 2 中, 作点 O 关于 BC 的对称点 E , 连接 OE 交 BC 于 K , 连接 EB' 交 BC 于点 P'' , 连接 OP'' , 此时 $OP'' + B'P''$ 的值最小.



$$\because \angle BOB' = 135^\circ, \angle BOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OCB = \angle B'OC = 45^\circ,$$

$$\therefore OB' \parallel BC,$$

$$\because OK \perp BC, OB = OC,$$

$$\therefore BK = CK = 2, OB = 2\sqrt{2},$$

$$\because KP'' \parallel OB', OK = KE,$$

$$\therefore EP'' = P''B,$$

$$\therefore KP'' = \frac{1}{2} OB' = \sqrt{2},$$

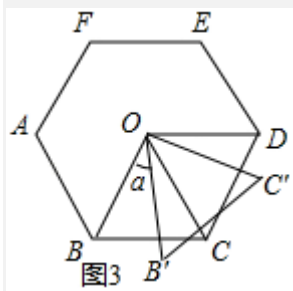
$$\therefore BP'' = 2 + \sqrt{2},$$

$$\text{在 Rt}\triangle OEB' \text{ 中, } EB' = \sqrt{OB'^2 + OE^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 4^2} = 2\sqrt{6}.$$

$$\because OP'' = OP',$$

$$\therefore B'P + OP' \text{ 有最小值, 最小值为 } 2\sqrt{6}, \text{ 此时 } BP = 2 + \sqrt{2}.$$

(4) 如图 3 中,



$\because ABCDEF \dots$ 是正 n 边形, O 是中心,

$$\therefore \angle BOC = \frac{360^\circ}{n},$$

$$\because OC \perp B'C', OB' = OC',$$

$$\therefore \angle COB' = \frac{1}{2} \angle C'OB' = \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{180^\circ}{n},$$

$$\therefore \alpha = \frac{180^\circ}{n}.$$

【点睛】本题属于多边形综合题,考查了正多边形的性质,旋转变换,全等三角形的判定和性质,解题的关键是学会添加常用辅助线,构造全等三角形解决问题,属于中考压轴题.



培优第二阶——拓展培优练

一、单选题

1. 已知点 O 是边长为 6 的等边 $\triangle ABC$ 的中心, 点 P 在 $\triangle ABC$ 外, $\triangle ABC$, $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ 的面积分别记为 S_0 , S_1 , S_2 , S_3 . 若 $S_1 + S_2 + S_3 = 2S_0$, 则线段 OP 长的最小值是 ()

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

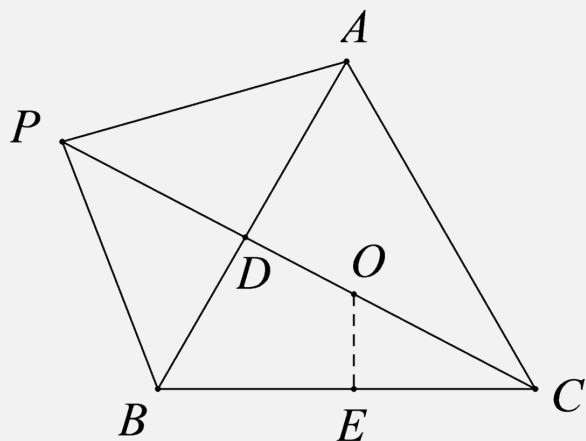
C. $3\sqrt{3}$

D. $\frac{7\sqrt{3}}{2}$

【答案】B

【分析】根据 $S_1 + S_2 + S_3 = 2S_0$ ，可得 $S_1 = \frac{1}{2}S_0$ ，根据等边三角形的性质可求得 $\triangle ABC$ 中 AB 边上的高 h_1 和 $\triangle PAB$ 中 AB 边上的高 h_2 的值，当 P 在 CO 的延长线时， OP 取得最小值， $OP = CP - OC$ ，过 O 作 $OE \perp BC$ ，求得 $OC = 2\sqrt{3}$ ，则可求解。

【解析】解：如图，



$$S_2 = S_{\triangle PDB} + S_{\triangle BDC}, \quad S_3 = S_{\triangle PDA} + S_{\triangle ADC},$$

$$\therefore S_1 + S_2 + S_3 = S_1 + (S_{\triangle PDB} + S_{\triangle BDC}) + (S_{\triangle PDA} + S_{\triangle ADC})$$

$$= S_1 + (S_{\triangle PDB} + S_{\triangle PDA}) + (S_{\triangle BDC} + S_{\triangle ADC})$$

$$= S_1 + S_{\triangle PAB} + S_{\triangle ABC}$$

$$= S_1 + S_1 + S_0$$

$$= 2S_1 + S_0 = 2S_0,$$

$$\therefore S_1 = \frac{1}{2}S_0,$$

设 $\triangle ABC$ 中 AB 边上的高为 h_1 ， $\triangle PAB$ 中 AB 边上的高为 h_2 ，

$$\text{则 } S_0 = \frac{1}{2}AB \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot h_1 = 3h_1,$$

$$S_1 = \frac{1}{2}AB \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot h_2 = 3h_2,$$

$$\therefore 3h_2 = \frac{1}{2} \cdot 3h_1,$$

$$\therefore h_1 = 2h_2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore h_1 = \sqrt{6^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2} = 3\sqrt{3},$$

$$h_2 = \frac{1}{2}h_1 = \frac{3}{2}\sqrt{3},$$

$\therefore$ 点 P 在平行于 AB ，且到 AB 的距离等于 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ 的线段上，

$\therefore$ 当点 P 在 CO 的延长线上时， OP 取得最小值，

过 O 作 $OE \perp BC$ 于 E ，

$$\therefore CP = h_1 + h_2 = \frac{9}{2}\sqrt{3},$$

$\because O$ 是等边 $\triangle ABC$ 的中心， $OE \perp BC$

$$\therefore \angle OCE = 30^\circ, CE = \frac{1}{2}BC = 3$$

$$\therefore OC = 2OE$$

$$\because OE^2 + CE^2 = OC^2,$$

$$\therefore OE^2 + 3^2 = (2OE)^2,$$

$$\text{解得 } OE = \sqrt{3},$$

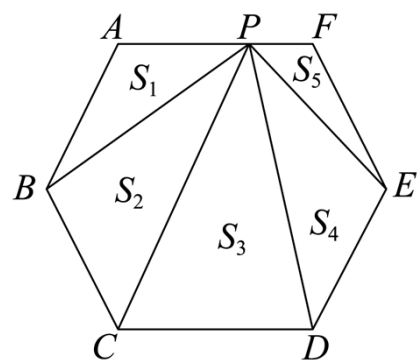
$$\therefore OC = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore OP = CP - OC = \frac{9}{2}\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \frac{5}{2}\sqrt{3}.$$

故选 B.

【点睛】 本题考查了等边三角形的性质，勾股定理，三角形的面积等知识，弄清题意，找到 P 点的位置是解题的关键.

2. 如图，正六边形 $ABCDEF$ 中，点 P 是边 AF 上的点，记图中各三角形的面积依次为 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 ，则下列判断正确的是（ ）



A. $S_1 + S_2 = 2S_3$

B. $S_1 + S_4 = S_3$

C. $S_2 + S_4 = 2S_3$

D. $S_1 + S_5 = S_3$

【答案】B

【分析】如图，作正六边形 $ABCDEF$ 的外接圆 O ，连接 BE, DF ，记 DF 与 BE 的交点为 Q ， PD, BE 的交点为 N ，过 O 作 $OH \perp CD$ 于 H ，设正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 a ，设 $PF = x$ ，则 $AP = a - x$ ，再分别求解 S_1, S_4, S_3 ，从而可得答案.

【解析】解：如图，作正六边形 $ABCDEF$ 的外接圆 O ，连接 BE, DF ，记 DF 与 BE 的交点为 Q ， PD, BE 的交点为 N ，过 O 作 $OH \perp CD$ 于 H ，

$$\angle COD = 60^\circ,$$

设正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 a ，

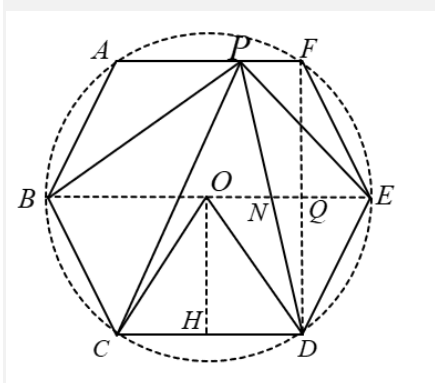
$$\text{则 } CO = DO = CD = a,$$

$$\angle CH = DH = \frac{1}{2}a, OH = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

由正六边形的性质可得： $\angle DEF = 120^\circ, EF = DE, BE \perp DF, FQ = DQ$,

$$\angle EFQ = 30^\circ, EQ = \frac{1}{2}a, FQ = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

$$\angle DF \perp AF, DF = 2OH = \sqrt{3}a,$$



$$\angle S_3 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{3}a = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2,$$

设 $PF = x$ ，则 $AP = a - x$ ，

$$\angle S_1 = \frac{1}{2} AP \cdot FQ = \frac{1}{2} (a - x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}ax,$$

$$S_4 = S_{VPDF} + S_{VDEF} - S_3$$

$$= \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{3}a + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}a \cdot \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}ax$$

$$\backslash S_1 + S_4 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}ax + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}ax = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2,$$

$$S_3 = \frac{1}{2}a' \cdot \sqrt{3}a = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2,$$

$\backslash S_1 + S_4 = S_3$, 故 B 符合题意;

$$\text{由 } S_1 + S_4 = S_3,$$

同理可得: $S_2 + S_5 = S_3$,

$$\backslash S_1 + S_2 + S_4 + S_5 = 2S_3,$$

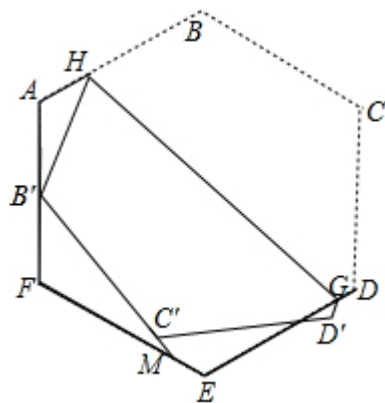
故 $S_1 + S_2 = 2S_3$, $S_2 + S_4 = 2S_3$, $S_1 + S_5 = S_3$ 都错误,

故 A, C, D 都不符合题意;

故选 B.

【点睛】本题考查的是正多边形与圆, 等边三角形的性质, 勾股定理的应用, 掌握“正多边形的性质”是解本题的关键.

3. 如图, 将边长为 6 的正六边形 $ABCDEF$ 沿 HG 折叠, 点 B 恰好落在边 AF 的中点上, 延长 $B'C'$ 交 EF 于点 M , 则 $C'M$ 的长为 ()

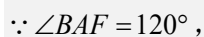


- A. 1 B. $\frac{6}{5}$ C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{9}{5}$

【答案】A

【分析】过点 H 作 FA 延长的垂线 HQ , 设 $AH = x$, 可得 $AQ = \frac{1}{2}x$, $QH = \frac{\sqrt{3}}{2}x$, 可得 $BH = B'H = AB - AH = 6 - x$, 由 $AB' = \frac{1}{2}AB = 3$, 可得 $B'Q = B'A + AQ = 3 + \frac{1}{2}x$, 在 $Rt \triangle B'HQ$ 中, 根据勾股定理即可得 x 的值, 再证明 $\triangle AB'M \sim \triangle FMB'$, 对应边成比例即可求出结果.

【解析】解: 如图, 过点 H 作 FA 延长的垂线 HQ ,



$$\therefore \angle AHQ = 30^\circ,$$

$$\therefore BH = B'H = AB - AH = 6 - x,$$

$$\therefore B'Q = B'A + AQ = 3 + \frac{1}{2}x,$$

$$B'H^2 = B'Q^2 + QH^2,$$

解得 $x = \frac{9}{5}$,

$$\therefore \angle HAB' = \angle F = \angle HB'M = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle AHB' = \angle FB'M ,$$

$$\therefore \frac{B'H}{B'M} = \frac{AH}{B'F},$$

解得 $B'M = 7$,

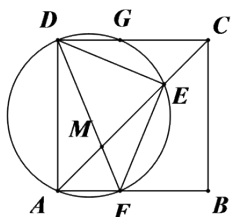
$$\therefore C'M = B'M - B'C' = 7 - 6 = 1.$$

故选：A.

【点睛】本题考查了正多边形和圆，翻折变换，相似三角形的判定和性质，解决本题的关键是掌握正多边形和圆的关系.

4. 如图，已知正方形 ABCD 中，连结 AC，在 AC 上截取 AE=AD，作 $\triangle ADE$ 的外接圆交 AB 于点 F，连结 DF 交 AC 于点 M，连结 EF. 下列选项正确的是（ ）

- ① $DG=AF$ ；② $AM=EC$ ；③ $\angle EFB=\angle AFD$ ；④ $S_{\text{四边形}BCMF} = S_{\text{四边形}ADEF}$



- A. ①② B. ①②③ C. ②③④ D. ①②③④

【答案】B

【分析】①如图（见解析），先根据正方形的性质可得 $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$ ，再根据圆周角定理可得 DF 为 $\triangle ADE$ 外接圆的直径，从而可得 $\angle DGF = 90^\circ$ ，然后根据矩形的判定与性质即可得；②先根据等腰三角形的性质可得 $\angle ADE = \angle AED = 67.5^\circ$ ，从而可得 $\angle CDE = 22.5^\circ$ ，再根据圆周角定理可得 $\angle EDF = \angle BAC = 45^\circ$ ，从而可得 $\angle ADM = 22.5^\circ$ ，然后根据三角形全等的判定定理与性质即可得；③先根据圆内接四边形的性质可得 $\angle EFB = \angle ADE$ ，从而可得 $\angle EFB = \angle AED$ ，再根据圆周角定理可得 $\angle AED = \angle AFD$ ，由此即可得；④先根据圆周角定理可得 $\angle AEF = \angle ADM$ ，从而可得 $\angle AEF = \angle CDE$ ，再根据三角形全等的判定定理与性质可得 $S_{\triangle AEF} = S_{\triangle CDE}$ ，然后根据正方形的性质可得 $S_{\text{四边形}ADEF} = S_{\triangle ABC}$ ，由此即可得.

【解析】 $\because$ 四边形 ABCD 是正方形，

$$\therefore AD = CD, \angle BAD = \angle ADC = 90^\circ, \angle DAM = \angle DCE = \angle BAC = 45^\circ,$$

$\therefore$ DF 为 $\triangle ADE$ 外接圆的直径，

$$\therefore \angle DGF = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 ADGF 是矩形，

$$\therefore DG = AF, \text{ 则结论①正确；}$$

$$\because AD = AE, \angle DAM = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AED = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle DAM) = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle ADC - \angle ADE = 22.5^\circ,$$

由圆周角定理得： $\angle EDF = \angle BAC = 45^\circ$ ，

$$\therefore \angle ADM = \angle ADE - \angle EDF = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle ADM = \angle CDE,$$

$$\text{在 } \triangle ADM \text{ 和 } \triangle CDE \text{ 中, } \begin{cases} \angle DAM = \angle DCE \\ AD = CD \\ \angle ADM = \angle CDE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADM \cong \triangle CDE (ASA),$$

$\therefore AM = EC$ ，则结论②正确；

由圆内接四边形的性质得： $\angle EFB = \angle ADE$ ，

$$\therefore \angle ADE = \angle AED,$$

$$\therefore \angle EFB = \angle AED,$$

由圆周角定理得： $\angle AED = \angle AFD$ ，

$\therefore \angle EFB = \angle AFD$ ，则结论③正确；

由圆周角定理得： $\angle AEF = \angle ADM$ ，

$$\therefore \angle ADM = \angle CDE,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle CDE,$$

$$\therefore AD = CD, AD = AE,$$

$$\therefore AE = CD,$$

$$\text{在 } \triangle AEF \text{ 和 } \triangle CDE \text{ 中, } \begin{cases} \angle AEF = \angle CDE \\ AE = CD \\ \angle EAF = \angle DCE = 45^\circ \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle CDE (ASA),$$

$$\therefore S_{\triangle AEF} = S_{\triangle CDE},$$

$$\therefore S_{\text{四边形} ADEF} = S_{\triangle ADE} + S_{\triangle AEF} = S_{\triangle ADE} + S_{\triangle CDE} = S_{\triangle ACD},$$

$\therefore$ 四边形 ABCD 是正方形，

$$\therefore S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ABC},$$

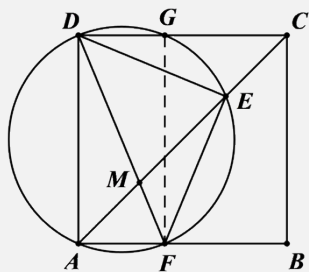
$$\therefore S_{\text{四边形} ADEF} = S_{\triangle ABC},$$

$$\text{又} \because S_{\text{四边形} BCMF} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AMF} < S_{\triangle ABC},$$

$\therefore S_{\text{四边形}BCMF} < S_{\text{四边形}ADEF}$ ，则结论④错误；

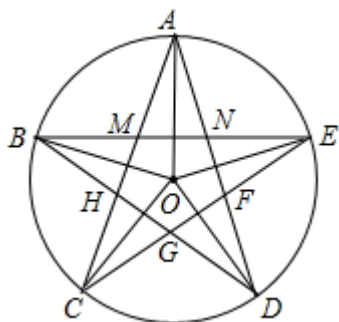
综上，结论正确的是①②③，

故选：B.



【点睛】本题考查了圆内接四边形的性质、圆周角定理、正方形的性质、三角形全等的判定定理与性质等知识点，熟练掌握各定理与性质，并正确找出全等三角形是解题关键.

5. 如图， A 、 B 、 C 、 D 、 E 是 $\odot O$ 上的5等分点，连接 AC 、 CE 、 EB 、 BD 、 DA ，得到一个五角星图形和五边形 $MNFGH$. 有下列3个结论：① $AO \perp BE$ ，② $\angle CGD = \angle COD + \angle CAD$ ，③ $BM = MN = NE$. 其中正确的结论是（ ）



- A. ① B. ①② C. ②③ D. ①②③

【答案】B

【分析】根据圆的性质得到 $AO \perp BE$ ，故①正确；由 A 、 B 、 C 、 D 、 E 是 $\odot O$ 上的5等分点，得到弧 CD 的度数，求得 $\angle COD = 72^\circ$ ，根据圆周角定理得到 $\angle CAD = 36^\circ$ ；连接 CD 求得 $\angle CGD = 108^\circ$ ，于是得到 $\angle CGD = \angle COD + \angle CAD$ ，故②正确；连接 AB ， AE ，根据全等三角形的性质即可得到结论.

【解析】解： $\because A$ 、 B 、 C 、 D 、 E 是 $\odot O$ 上的5等分点，

$$\therefore \widehat{AB} = \widehat{AE},$$

$\therefore AO \perp BE$ ，故①正确；

$\because A$ 、 B 、 C 、 D 、 E 是 $\odot O$ 上的5等分点，

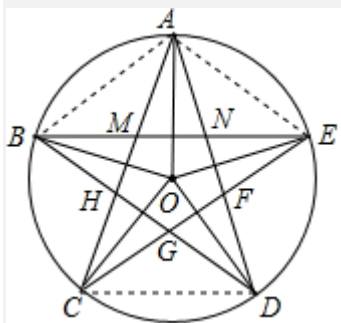
$$\therefore \widehat{CD} \text{的度数} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle COD = 72^\circ,$$

$$\because \angle COD = 2\angle CAD,$$

$$\therefore \angle CAD = 36^\circ;$$

连接 CD



$\because A, B, C, D, E$ 是 $\odot O$ 上的 5 等分点,

$$\therefore \widehat{AB} = \widehat{DE} = \widehat{BC} = \widehat{CD},$$

$$\therefore \angle BDC = \angle DCE = \angle CAD = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle CGD = 108^\circ,$$

$$\therefore \angle CGD = \angle COD + \angle CAD, \text{ 故 ② 正确;}$$

连接 AB, AE ,

$$\text{则 } \angle BAM = \angle ABM = \angle EAN = \angle AEN = 36^\circ,$$

$$\because AB = AE,$$

$$\therefore \triangle ABM \cong \triangle AEN (ASA),$$

$$\therefore BM = EN = AM = AN,$$

$$\because \angle MAN = 36^\circ,$$

$$\therefore AM \neq MN, \text{ ③ 错误.}$$

故选: B.

【点睛】本题考查了正多边形与圆, 等腰三角形的性质, 全等三角形的判定和性质, 正确的作出辅助线是解题的关键.

二、填空题

6. 如图, $\odot O$ 是正八边形 $ABCDEFGH$ 的外接圆, $\odot O$ 的半径是 1, 则下列四个结论中正确的是_____.

$$\text{① } \widehat{DF} \text{ 的长为 } \frac{\pi}{2}; \text{ ② } DF = \sqrt{2}OF; \text{ ③ } \triangle ODE \text{ 为等边三角形; ④ } S_{\text{正八边形} ABCDEFGH} = AE \cdot DF.$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/497036133065006123>