

2023-2024 学年广东省肇庆市全国卷Ⅱ数学试题高考模拟题

注意事项

1. 考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并交回.
2. 答题前, 请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置.
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符.
4. 作答选择题, 必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑; 如需改动, 请用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案. 作答非选择题, 必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答, 在其他位置作答一律无效.
5. 如需作图, 须用 2B 铅笔绘、写清楚, 线条、符号等须加黑、加粗.

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知命题 p : 直线 $a \parallel b$, 且 $b \subset$ 平面 α , 则 $a \parallel \alpha$; 命题 q : 直线 $l \perp$ 平面 α , 任意直线 $m \subset \alpha$, 则 $l \perp m$. 下列命题为真命题的是 ()

- A. $p \wedge q$ B. $p \vee (\text{非 } q)$ C. $(\text{非 } p) \wedge q$ D. $p \wedge (\text{非 } q)$

2. 下列函数中, 在定义域上单调递增, 且值域为 $[0, +\infty)$ 的是 ()

- A. $y = |\lg(x+1)|$ B. $y = x^{\frac{1}{2}}$ C. $y = 2^x$ D. $y = \ln|x|$

3. 已知 $\triangle ABC$ 的面积是 $\frac{1}{2}$, $AB = 1$, $BC = \sqrt{2}$, 则 $AC =$ ()

- A. 5 B. $\sqrt{5}$ 或 1 C. 5 或 1 D. $\sqrt{5}$

4. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y + 4 \geq 0, \\ x - 2 \leq 0, \\ x + y - 2 \geq 0, \end{cases}$ 且 $z = ax + y$ 的最大值为 $2a + 6$, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $[-1, +\infty)$ B. $(-\infty, -1]$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1)$

5. 已知双曲线 $M: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > a > 0)$ 的焦距为 $2c$, 若 M 的渐近线上存在点 T , 使得经过点 T 所作的圆

$(x - c)^2 + y^2 = a^2$ 的两条切线互相垂直, 则双曲线 M 的离心率的取值范围是 ()

- A. $(1, \sqrt{2}]$ B. $(\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ C. $(\sqrt{2}, \sqrt{5}]$ D. $(\sqrt{3}, \sqrt{5}]$

6. 命题“ $\forall x > 0, x(x+1) > (x-1)^2$ ”的否定为 ()

- A. $\forall x > 0, x(x+1) > (x-1)^2$ B. $\forall x, 0, x(x+1) > (x-1)^2$
C. $\exists x > 0, x(x+1) \leq (x-1)^2$ D. $\exists x, 0, x(x+1) > (x-1)^2$

7. 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_{2018} < S_{2020} < S_{2019}$, 设 $b_n = a_n a_{n+1} a_{n+2}$, 则数列 $\left\{ \frac{1}{b_n} \right\}$ 的前 n 项和 T_n

取最大值时 n 的值为()

A. 2020

B. 2019

C. 2018

D. 2017

8. 要得到函数 $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象, 只需将函数 $y = 2\cos 2x$ 的图象

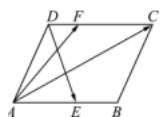
A. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

D. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

9. 如图, 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, E 为 AB 中点, F 为 CD 的三等分点 (靠近 D) 若 $\vec{AF} = x\vec{AC} + y\vec{DE}$, 则 $y - x$ 的值为 ()



A. $-\frac{1}{2}$

B. $-\frac{2}{3}$

C. $-\frac{1}{3}$

D. -1

10. 已知函数 $f(x) = 4\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, $x \in \left[0, \frac{13}{3}\pi\right]$, 若函数 $F(x) = f(x) - 3$ 的所有零点依次记为 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, 且

$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$, 则 $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_{n-1} + x_n =$ ()

A. $\frac{50\pi}{3}$

B. 21π

C. $\frac{100\pi}{3}$

D. 42π

11. 下列选项中, 说法正确的是 ()

A. “ $\exists x_0 \in R, x_0^2 - x_0 \leq 0$ ”的否定是“ $\exists x_0 \in R, x_0^2 - x > 0$ ”

B. 若向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为钝角

C. 若 $am^2 \leq bm^2$, 则 $a \leq b$

D. “ $x \in (A \cup B)$ ”是“ $x \in (A \cap B)$ ”的必要条件

12. “完全数”是一些特殊的自然数, 它所有的真因子 (即除了自身以外的约数) 的和恰好等于它本身. 古希腊数学家毕达哥拉斯公元前六世纪发现了第一、二个“完全数”6 和 28, 进一步研究发现后续三个完全数”分别为 496, 8128, 33550336, 现将这五个“完全数”随机分为两组, 一组 2 个, 另一组 3 个, 则 6 和 28 不在同一组的概率为 ()

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{4}{5}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知函数 $y = f(x)$ 为 R 上的奇函数，满足 $f'(x) > -2$. 则不等式 $f(x-1) < x^2(3-2\ln x) + 3(1-2x)$ 的解集为_____.

14. 设集合 $A = \{-1, a\}$, $B = \left\{e^{\frac{a}{e}}, 2\right\}$ (其中 e 是自然对数的底数), 且 $A \cap B \neq \emptyset$, 则满足条件的实数 a 的个数为_____.

15. 某城市为了解该市甲、乙两个旅游景点的游客数量情况，随机抽取了这两个景点20天的游客人数，得到如下茎叶图：

甲		乙
3 2	60	3 4 7
8 6 4 2	61	1 2 5
9 8 7 3 3 0	62	1 2 4 4 6 7
5 4 3 2 1	63	3 5 6 7 9
8 7 4	64	2 4 6

由此可估计，全年（按360天计算）中，游客人数在(625,635)内时，甲景点比乙景点多_____天.

16. 已知集合 $A = \{x \mid x < 4, x \in Z\}$, $B = \{1, m\}$, 若 $A \cup B = A$, 且 $3-m \in A$, 则实数 m 所有的可能取值构成的集合是_____.

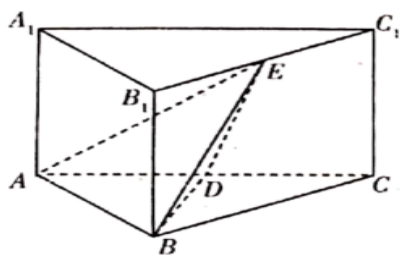
三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 $2\sqrt{3}$, 斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线与椭圆交于 A, B 两点, 若线段 AB 的中点为 D , 且直线 OD 的斜率为 $-\frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若过左焦点 F 斜率为 k 的直线 l 与椭圆交于点 M, N , P 为椭圆上一点, 且满足 $OP \perp MN$, 问: $\frac{1}{|MN|} + \frac{1}{|OP|^2}$ 是否为定值? 若是, 求出此定值, 若不是, 说明理由.

18. (12分) 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB = BC = AA_1 = 1$, $AC = \sqrt{3}$, 点 D, E 分别为 AC 和 B_1C_1 的中点.



(I) 棱 AA_1 上是否存在点 P 使得平面 $PBD \perp$ 平面 ABE ? 若存在, 写出 PA

的长并证明你的结论；若不存在，请说明理由.

(II) 求二面角 $A-BE-D$ 的余弦值.

19. (12分) 已知函数 $f(x) = axe^x$ ($a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$), $g(x) = x + \ln x + 1$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 若对任意的 $x > 0$, $f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

20. (12分) 已知函数 $f(x) = e^x - x^2 + 2a + b$ ($x \in \mathbf{R}$) 的图象在 $x = 0$ 处的切线为 $y = bx$ (e 为自然对数的底数)

(1) 求 a, b 的值;

(2) 若 $k \in \mathbf{Z}$, 且 $f(x) + \frac{1}{2}(3x^2 - 5x - 2k) \geq 0$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 求 k 的最大值.

21. (12分) 在直角坐标系 xOy 中, 已知点 $P(1, 0)$, 若以线段 PQ 为直径的圆与 y 轴相切.

(1) 求点 Q 的轨迹 C 的方程;

(2) 若 C 上存在两动点 A, B (A, B 在 x 轴异侧) 满足 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 32$, 且 $\triangle PAB$ 的周长为 $2|AB| + 2$, 求 $|AB|$ 的值.

22. (10分) 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = t \cos \alpha \\ y = 1 + t \sin \alpha \end{cases}$ ($0 \leq \alpha < \pi$, t 为参数), 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = \frac{4 \cos \theta}{\sin^2 \theta}$.

(1) 将曲线 C 的极坐标方程化为直角坐标方程, 并说明曲线 C 的形状;

(2) 若直线 l 经过点 $(1, 0)$, 求直线 l 被曲线 C 截得的线段的长.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、C

【解析】

首先判断出 p 为假命题、 q 为真命题, 然后结合含有简单逻辑联结词命题的真假性, 判断出正确选项.

【详解】

根据线面平行的判定, 我们易得命题 p : 若直线 $a \parallel b$, 直线 $b \subset$ 平面 α , 则直线 $a \parallel$ 平面 α 或直线 a 在平面 α 内, 命题 p 为假命题;

根据线面垂直的定义，我们易得命题 q ：若直线 $l \perp$ 平面 α ，则若直线 l 与平面 α 内的任意直线都垂直，命题 q 为真命题。

故：A 命题“ $p \wedge q$ ”为假命题；B 命题“ $p \vee (\neg q)$ ”为假命题；C 命题“ $(\neg p) \wedge q$ ”为真命题；D 命题“ $p \wedge (\neg q)$ ”为假命题。

故选：C。

【点睛】

本小题主要考查线面平行与垂直有关命题真假性的判断，考查含有简单逻辑联结词的命题的真假性判断，属于基础题。

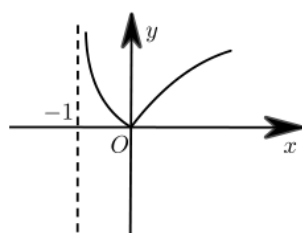
2、B

【解析】

分别作出各个选项中的函数的图象，根据图象观察可得结果。

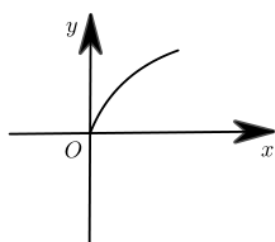
【详解】

对于 A， $y = |\lg(x+1)|$ 图象如下图所示：



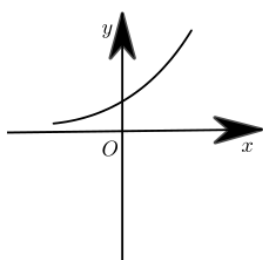
则函数 $y = |\lg(x+1)|$ 在定义域上不单调，A 错误；

对于 B， $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ 的图象如下图所示：



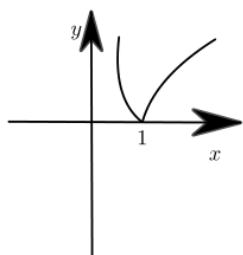
则 $y = \sqrt{x}$ 在定义域上单调递增，且值域为 $[0, +\infty)$ ，B 正确；

对于 C， $y = 2^x$ 的图象如下图所示：



则函数 $y = 2^x$ 单调递增，但值域为 $(0, +\infty)$ ， C 错误；

对于 D ， $y = \ln|x|$ 的图象如下图所示：



则函数 $y = \ln|x|$ 在定义域上不单调， D 错误.

故选： B .

【点睛】

本题考查函数单调性和值域的判断问题，属于基础题.

3、 B

【解析】

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B = \frac{1}{2}, \quad AB = 1, BC = \sqrt{2}$$

$$\therefore \sin B = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

①若 B 为钝角，则 $\cos B = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，由余弦定理得 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cos B \cdot AB \cdot BC$ ，

解得 $AC = \sqrt{5}$ ；

②若 B 为锐角，则 $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，同理得 $AC = 1$.

故选 B .

4、 A

【解析】

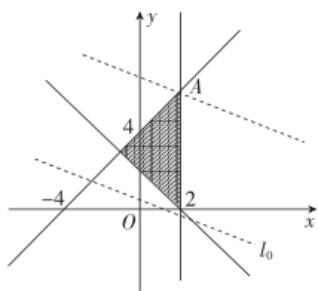
画出约束条件的可行域，利用目标函数的最值，判断 a 的范围即可.

【详解】

作出约束条件表示的可行域，如图所示. 因为 $z = ax + y$ 的最大值为 $2a + 6$ ，所以 $z = ax + y$ 在点 $A(2, 6)$ 处取得最大值，

则 $-a \leq 1$ ，即 $a \geq -1$.

故选： A



【点睛】

本题主要考查线性规划的应用，利用 z 的几何意义，通过数形结合是解决本题的关键。

5、B

【解析】

由 $b > a$ 可得 $e > \sqrt{2}$ ；由过点 T 所作的圆的两条切线互相垂直可得 $|TF| = \sqrt{2}a$ ，又焦点 $F(c, 0)$ 到双曲线渐近线的距离为 b ，则 $|TF| = \sqrt{2}a \geq b$ ，进而求解。

【详解】

$$\text{Q } b > a, \text{ 所以离心率 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} > \sqrt{2},$$

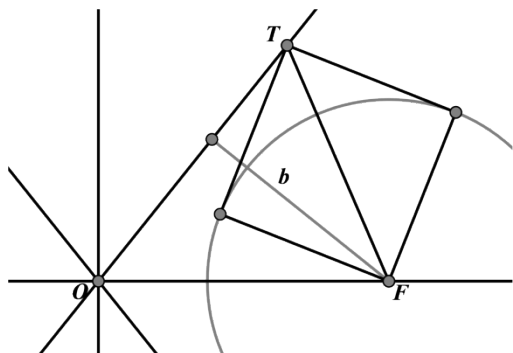
又圆 $(x-c)^2 + y^2 = a^2$ 是以 $F(c, 0)$ 为圆心，半径 $r = a$ 的圆，要使得经过点 T 所作的圆的两条切线互相垂直，必有

$$|TF| = \sqrt{2}a,$$

而焦点 $F(c, 0)$ 到双曲线渐近线的距离为 b ，所以 $|TF| = \sqrt{2}a \geq b$ ，即 $\frac{b}{a} \leq \sqrt{2}$ ，

$$\text{所以 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \leq \sqrt{3}, \text{ 所以双曲线 } M \text{ 的离心率的取值范围是 } (\sqrt{2}, \sqrt{3}].$$

故选:B



【点睛】

本题考查双曲线的离心率的范围，考查双曲线的性质的应用。

6、C

【解析】

套用命题的否定形式即可.

【详解】

命题“ $\forall x \in M, p(x)$ ”的否定为“ $\exists x \in M, \neg p(x)$ ”, 所以命题“ $\forall x > 0, x(x+1) > (x-1)^2$ ”的否定为

“ $\exists x > 0, x(x+1) \leq (x-1)^2$ ”.

故选: C

【点睛】

本题考查全称命题的否定, 属于基础题.

7、B

【解析】

根据题意计算 $a_{2019} > 0$, $a_{2020} < 0$, $a_{2019} + a_{2020} > 0$, 计算 $\frac{1}{b_{2018}} < 0$, $\frac{1}{b_{2019}} > 0$, $\frac{1}{b_{2018}} + \frac{1}{b_{2019}} > 0$, 得到答案.

【详解】

S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_{2018} < S_{2020} < S_{2019}$,

故 $a_{2019} > 0$, $a_{2020} < 0$, $a_{2019} + a_{2020} > 0$, $b_n = a_n a_{n+1} a_{n+2}$, 故 $\frac{1}{b_n} = \frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}}$,

当 $n \leq 2017$ 时, $\frac{1}{b_n} > 0$, $\frac{1}{b_{2018}} = \frac{1}{a_{2018} a_{2019} a_{2020}} < 0$, $\frac{1}{b_{2019}} = \frac{1}{a_{2019} a_{2020} a_{2021}} > 0$,

$\frac{1}{b_{2018}} + \frac{1}{b_{2019}} = \frac{1}{a_{2018} a_{2019} a_{2020}} + \frac{1}{a_{2019} a_{2020} a_{2021}} = \frac{a_{2019} + a_{2020}}{a_{2018} a_{2019} a_{2020} a_{2021}} > 0$,

当 $n \geq 2020$ 时, $\frac{1}{b_n} < 0$, 故前 2019 项和最大.

故选: B.

【点睛】

本题考查了数列和的最值问题, 意在考查学生对于数列公式方法的综合应用.

8、D

【解析】

先将 $y = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 化为 $y = 2 \cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right]$, 根据函数图像的平移原则, 即可得出结果.

【详解】

$$\text{因为 } y = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right],$$

所以只需将 $y = 2 \cos 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位.

【点睛】

本题主要考查三角函数的平移, 熟记函数平移原则即可, 属于基础题型.

9、D

【解析】

使用不同方法用表示出 $\overrightarrow{AF}$, 结合平面向量的基本定理列出方程解出.

【详解】

$$\text{解: } \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD},$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AF} = x \overrightarrow{AC} + y \overrightarrow{DE} = x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + y\left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) = \left(x + \frac{1}{2}y\right) \overrightarrow{AB} + (x - y) \overrightarrow{AD}$$

$$\therefore \begin{cases} x + \frac{y}{2} = \frac{1}{3} \\ x - y = 1 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = \frac{5}{9} \\ y = -\frac{4}{9} \end{cases}, \text{ 所以 } y - x = -1$$

故选: D

【点睛】

本题考查了平面向量的基本定理及其意义, 属于基础题.

10、C

【解析】

令 $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 求出在 $\left[0, \frac{13}{3}\pi\right]$ 的对称轴, 由三角函数的对称性可得

$x_1 + x_2 = \frac{\pi}{3} \times 2, x_2 + x_3 = \frac{5\pi}{6} \times 2, \dots, x_{n-1} + x_n = \frac{23\pi}{6} \times 2$, 将式子相加并整理即可求得 $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_{n-1} + x_n$ 的值.

【详解】

令 $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 得 $x = \frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$, 即对称轴为 $x = \frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

函数周期 $T = \pi$, 令 $\frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{13}{3}\pi$, 可得 $k = 8$. 则函数在 $x \in \left[0, \frac{13}{3}\pi\right]$ 上有 8 条对称轴.

根据正弦函数的性质可知 $x_1 + x_2 = \frac{\pi}{3} \times 2, x_2 + x_3 = \frac{5\pi}{6} \times 2, \dots, x_{n-1} + x_n = \frac{23\pi}{6} \times 2$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/497062150033006161>