2024届福建省高三下学期数学适应性练习卷

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

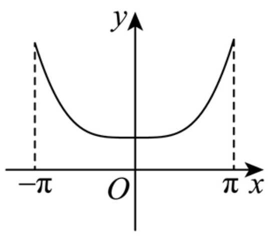
1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2<4\}$，$B=\{x\mid -3<x\leq 1\}$，则 $A\cap B=$（　　）

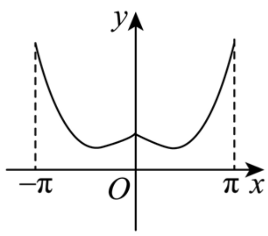
A. $\{x\mid x<2\}$　　B. $\{x\mid -2<x\leq 1\}$　　C. $\{x\mid -3<x\leq 1\}$　　D. $\{x\mid -3<x<2\}$

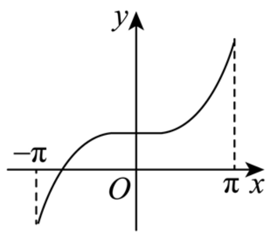
2. 若复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})z=2\mathrm{i}$，则 $z\cdot\overline{z}=$（　　）

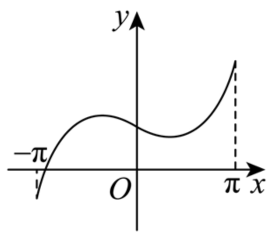
A. -2　　B. 0　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

3. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\cos x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的图象大致为（　　）

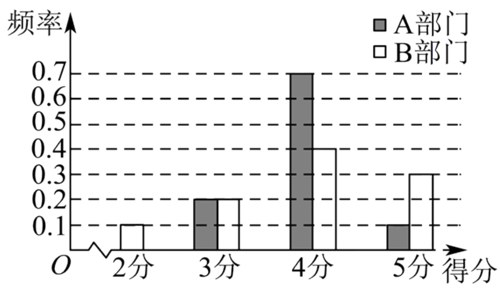
A.


B.


C.


D.


4. 某单位共有 A、B 两部门，1月份进行服务满意度问卷调查，得到两部门服务满意度得分的频率分布条形图如下.设 A、B 两部门的服务满意度得分的第75百分位数分别为 n_1，n_2，方差分别为 s_1^2，s_2^2，则（　　）



A. $n_1>n_2$，$s_1^2>s_2^2$　　B. $n_1>n_2$，$s_1^2<s_2^2$

C. $n_1<n_2$，$s_1^2<s_2^2$　　D. $n_1<n_2$，$s_1^2>s_2^2$

5. 已知直线 $y=kx+b$ 既是曲线 $y=\ln x$ 的切线，也是曲线 $y=-\ln(-x)$ 的切线，则（　　）

A. $k=\frac{1}{\mathrm{e}}$，$b=0$

B. $k=1$，$b=0$

C. $k=\frac{1}{\mathrm{e}}$，$b=-1$

D. $k=1$，$b=-1$

6. 已知 $a>0$，$b>0$，则使 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 4$ 成立的一个充分不必要条件是（　　）

A. $a^2+b^2=1$

B. $a+b\geqslant 4ab$

C. $a+b=1$

D. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq 8$

7. 已知 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，且 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}=-1$，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AC}=1$，则 $\angle ABC$ 的最大值为（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{\pi}{2}$

8. 已知 $\sqrt{6}\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})=1$，则 $\sin 2\alpha=$（　　）

A. $-\frac{2}{3}$

B. $-\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{2}{3}$

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 φ 的顶点与原点重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边过点 $P(1,-\sqrt{3})$，函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$，则（　　）

A. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{12}$ 对称

B. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{12},0\right)$ 对称

C. $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ 内恰有一个极大值点

D. $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right)$ 内单调递减

10. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，准线交 x 轴于点 D，过 F 的直线交 C 于 A，B 两点，AF 的中点 M 在 y 轴上的射影为点 N，$|MN|=|NF|$，则（　　）

A. $|AF|=3|BF|$

B. $\angle ADB$ 是锐角

C. $\triangle BDN$ 是锐角三角形

D. 四边形 $DFMN$ 是菱形

11. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，棱 AB,BC 的中点分别为 E，F，点 G 在底面 $A_1B_1C_1D_1$ 上，且平面 $EFG\parallel$ 平面 ACD_1，则下列说法正确的是（　　）

A. 若存在 λ 使得 $\overrightarrow{A_1G}=\lambda\overrightarrow{GD_1}$，则 $\lambda=\frac{1}{2}$

B. 若 $G \in C_1D_1$，则 $EG \parallel$ 平面 ADD_1A_1

C. 三棱锥 $G-BC_1D$ 体积的最大值为 2

D. 二面角 $D-EF-G$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 某企业生产一种零部件，其质量指标介于 $(49.6, 50.4)$ 的为优品.技术改造前，该企业生产的该种零部件质量指标服从正态分布 $N(50, 0.16)$；技术改造后，该企业生产的同种零部件质量指标服从正态分布 $N(50, 0.04)$.那么，该企业生产的这种零部件技术改造后的优品率与技术改造前的优品率之差为_________.（若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $P(|X-\mu|<\sigma)=0.6827$，$P(|X-\mu|<2\sigma)=0.9545$，$P(|X-\mu|<3\sigma)=0.9973$）

13. 已知圆台 O_1O_2 的高为 6，AB，CD 分别为上、下底面的一条直径，且 $AB=4$，$CD=8$，则圆台 O_1O_2 的体积为_________；若 A，B，C，D 四点不共面，且它们都在同一个球面上，则该球的表面积为_________.

14. 已知双曲线 $C: \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的左焦点为 F，过 F 的直线 l 交圆 $x^2+y^2=a^2$ 于 A，B 两点，交 C 的右支于点 P.若 $|AF|=|BP|$，$|PF|=2|AB|$，则 C 的离心率为_________.

四、解答题：共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 在 $\triangle ABC$ 中，D 为 BC 的中点，且 $\angle DAC+\angle BAC=\pi$.

（1）求 $\dfrac{AB}{AD}$；

（2）若 $BC=2\sqrt{2}AC$，求 $\cos C$.

16. 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}^2-a_n^2=8n$，且 $a_1=1$.

（1）写出 a_2，a_3，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）记 $b_n=\begin{cases} a_n, n\text{为奇数}, \\ 2^{\frac{a_n+1}{4}}, n\text{为偶数}, \end{cases}$ 求 $b_1b_2+b_3b_4+b_5b_6+\cdots+b_{15}b_{16}$.

17. 11 分制乒乓球比赛规则如下：在一局比赛中，每两球交换发球权，每赢一球得 1 分，先得 11 分且至少领先 2 分者胜，该局比赛结束；当某局比分打成 10∶10 后，每球交换发球权，领先 2

分者胜，该局比赛结束.现有甲、乙两人进行一场五局三胜、每局 11 分制的乒乓球比赛，比赛开始前通过抛掷一枚质地均匀的硬币来确定谁先发球.假设甲发球时甲得分的概率为$\frac{2}{3}$，乙发球时甲得分的概率为$\frac{1}{2}$，各球的比赛结果相互独立，且各局的比赛结果也相互独立.已知第一局目前比分为 10∶10.

（1）求再打两个球甲新增的得分 X 的分布列和均值；

（2）求第一局比赛甲获胜的概率 p_0；

（3）现用 p_0 估计每局比赛甲获胜的概率，求该场比赛甲获胜的概率.

18. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，$AB=6$，$\angle ACB$ 的平分线交 AB 于点 D，$AD=2DB$.平面 α 过直线 AB，且与 $\triangle ABC$ 所在的平面垂直.

（1）求直线 CD 与平面 α 所成角的大小；

（2）设点 $E\in\alpha$，且 $\angle ECD=30°$，记 E 的轨迹为曲线 Γ.

（i）判断 Γ 是什么曲线，并说明理由；

（ii）不与直线 AB 重合的直线 l 过点 D 且交 Γ 于 P，Q 两点，试问：在平面 α 内是否存在定点 T，使得无论 l 绕点 D 如何转动，总有 $\angle PTC=\angle QTC$？若存在，指出点 T 的位置；若不存在，说明理由.

19. 对于函数 $f(x)$，若实数 x_0 满足 $f(x_0)=x_0$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的不动点.已知 $a\geq 0$，且 $f(x)=\frac{1}{2}\ln x+ax^2+1-a$ 的不动点的集合为 A .以 $\min M$ 和 $\max M$ 分别表示集合 M 中的最小元素和最大元素.

（1）若 $a=0$，求 A 的元素个数及 $\max A$；

（2）当 A 恰有一个元素时，a 的取值集合记为 B.

（i）求 B；

（ii）若 $a=\min B$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{f(a_n)}{a_n}$，集合 $C_n=\left\{\sum_{k=1}^{n}|a_k-1|,\frac{4}{3}\right\}$，$n\in\mathrm{N}^*$.求证：$\forall n\in\mathrm{N}^*$，$\max C_n=\frac{4}{3}$.

2024届福建省高三下学期数学适应性练习卷

3.答题结束后，学生必须将练习卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x^2<4\}$，$B=\{x|-3<x\le 1\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{x|x<2\}$　　B. $\{x|-2<x\le 1\}$　　C. $\{x|-3<x\le 1\}$　　D. $\{x|-3<x<2\}$

【答案】B

【解析】

【分析】解出集合 A，按照集合的交运算规则进行计算即可.

【详解】因为 $A=\{x|x^2<4\}=\left\{x|-2<x<2\right\}$，$B=\{x|-3<x\le 1\}$，

所以 $A\cap B=\left\{x|-2<x\le 1\right\}$，

故选：B.

2. 若复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})z=2\mathrm{i}$，则 $z\cdot\overline{z}=$（　　）

A. -2　　B. 0　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】根据复数的运算规则进行计算即可求解.

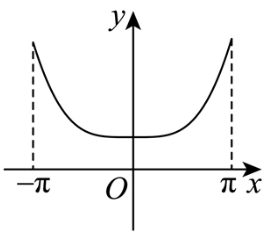
【详解】因为 $(1-\mathrm{i})z=2\mathrm{i}$，

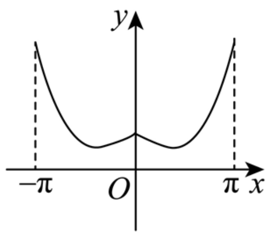
所以 $z=\dfrac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}\left(1+\mathrm{i}\right)}{\left(1-\mathrm{i}\right)\left(1+\mathrm{i}\right)}=-1+\mathrm{i}$，

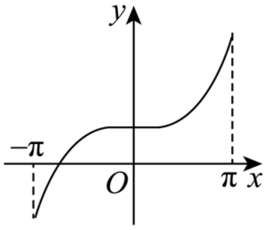
则 $z\cdot\overline{z}=\left(-1+\mathrm{i}\right)\cdot\left(-1-\mathrm{i}\right)=\left(-1\right)^2-\mathrm{i}^2=2$，

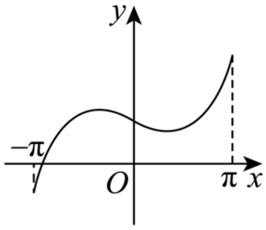
故选：D.

3. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\cos x$ 在 $\left[-\pi,\pi\right]$ 上的图象大致为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】A

【解析】

【分析】根据函数的性质，判断函数图象的形状.

【详解】因为 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\cos x$，所以 $f(-x)=\frac{1}{2}(-x)^2+\cos(-x)=\frac{1}{2}x^2+\cos x=f(x)$，

所以函数 $f(x)$ 为偶函数，图象关于 y 轴对称，故排除答案 CD，

又 $f'(x)=x-\sin x$，$x\in[0,\pi]$，

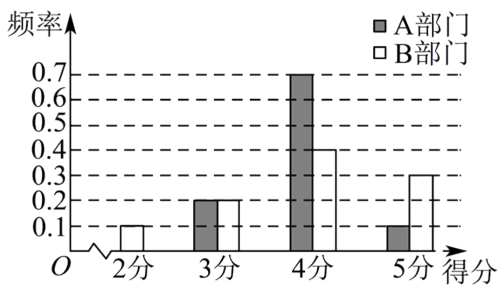
设 $h(x)=x-\sin x$，$x\in[0,\pi]$，则 $h'(x)=1-\cos x\geq 0$，$x\in[0,\pi]$.

所以 $h(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上为增函数，又 $h(0)=0$，

所以 $f'(x)=h(x)=x-\sin x\geq 0$ 在 $[0,\pi]$ 上恒成立，即 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，故排除 B.

故选：A

4. 某单位共有 A、B 两部门，1 月份进行服务满意度问卷调查，得到两部门服务满意度得分的频率分布条形图如下.设 A、B 两部门的服务满意度得分的第 75 百分位数分别为 n_1，n_2，方差分别为 s_1^2，s_2^2，则（　　）



A. $n_1>n_2$，$s_1^2>s_2^2$　　B. $n_1>n_2$，$s_1^2<s_2^2$

C. $n_1<n_2$，$s_1^2<s_2^2$　　D. $n_1<n_2$，$s_1^2>s_2^2$

【答案】C

【解析】

【分析】利用频率分布条形图可读出 $n_1=4$，$n_2=5$，且 A 部门数据更为集中，即可得出结论.

【详解】根据频率分布条形图可知$n_1=4$，$n_2=5$，即$n_1<n_2$；

显然A部门得分数据较B部门更为集中，其方差更小，即$s_1^2<s_2^2$；

故选：C

5. 已知直线$y=kx+b$既是曲线$y=\ln x$的切线，也是曲线$y=-\ln(-x)$的切线，则（　　）

A. $k=\frac{1}{e}$，$b=0$

B. $k=1$，$b=0$

C. $k=\frac{1}{e}$，$b=-1$

D. $k=1$，$b=-1$

【答案】A

【解析】

【分析】设出切点，写出切线方程，利用对应系数相等建立方程，解出即可.

【详解】设直线与曲线$y=\ln x$的切点为$\left(x_1,\ln x_1\right)$且$x_1>0$，

与曲线$y=-\ln(-x)$的切点为$\left(x_2,-\ln\left(-x_2\right)\right)$且$x_2<0$，

又$y'=\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}$，$y'=\left[-\ln(-x)\right]=-\frac{1}{x}$，

则直线$y=kx+b$与曲线$y=\ln x$的切线方程为$y-\ln x_1=\frac{1}{x_1}\left(x-x_1\right)$，即$y=\frac{1}{x_1}x+\ln x_1-1$，

直线$y=kx+b$与曲线$y=-\ln(-x)$的切线方程为$y+\ln\left(-x_2\right)=-\frac{1}{x_2}\left(x-x_2\right)$，即

$y=-\frac{1}{x_2}x+1-\ln\left(-x_2\right)$，

则$\begin{cases}\frac{1}{x_1}=-\frac{1}{x_2}\\ \ln x_1-1=1-\ln\left(-x_2\right)\end{cases}$，解得$\begin{cases}x_1=e\\ x_2=-e\end{cases}$，故$k=\frac{1}{x_1}=\frac{1}{e},b=\ln x_1-1=0$，

故选：A.

6. 已知$a>0$，$b>0$，则使$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 4$成立的一个充分不必要条件是（　　）

A. $a^2+b^2=1$

B. $a+b\geqslant 4ab$

C. $a+b=1$

D. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq 8$

【答案】C

【解析】

【分析】根据给定条件，利用充分不必要条件的定义逐项分析判断即得.

【详解】对于 A，令 $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$，显然有 $a^2+b^2=1$，而 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2\sqrt{2}<4$，A 不是；

对于 B，当 $a>0$，$b>0$ 时，$a+b\geq 4ab \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 4$，B 不是；

对于 C，当 $a>0$，$b>0$ 时，由 $a+b=1$，得 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 4$，

当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号，反之取 $a=b=\frac{1}{3}$，满足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 4$，而 $a+b=1$ 不成立，

因此 $a+b=1$ 是 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 4$ 成立的一个充分不必要条件，C 是；

对于 D，令 $a=\frac{1}{3},b=2$，不等式 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq 8$ 成立，而 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=3.5<4$，D 不是.

故选：C

7. 已知 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，且 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}=-1$，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AC}=1$，则 $\angle ABC$ 的最大值为（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

【答案】B

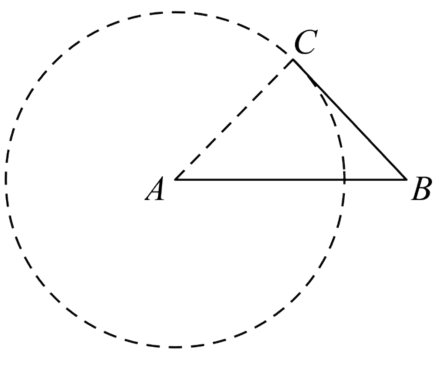
【解析】

【分析】根据题意可得 C 点轨迹是以 A 为圆心，半径为 $\sqrt{2}$ 的圆，再由直线与圆相切可得 $\angle ABC$ 的最大值为 $\frac{\pi}{4}$.

【详解】根据 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}=-1$，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AC}=1$ 可得 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}^2=2$，

即可得 $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{2}$；

即可知 C 点轨迹是以 A 为圆心，半径为 $\sqrt{2}$ 的圆，如下图所示：



由图可知，当 BC 与圆相切时，$\angle ABC$ 取到最大，

又 $|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}$ 可知此时 $\angle ABC=\dfrac{\pi}{4}$.

故选：B

8. 已知 $\sqrt{6}\tan(\alpha+\dfrac{\pi}{4})\cos(\alpha-\dfrac{\pi}{4})=1$，则 $\sin 2\alpha=$（　　）

A. $-\dfrac{2}{3}$　　B. $-\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用诱导公式、同角三角函数基本关系式、二倍角公式进行化简求值.

【详解】由 $\sqrt{6}\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=1 \Rightarrow \sqrt{6}\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=1 \Rightarrow$

$$\sqrt{6}\dfrac{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$$

$\Rightarrow \sqrt{6}\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \sqrt{6}\left[1-\cos^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]=\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 或

$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$（舍去）.

所以 $\sin2\alpha=-\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\left[2\cos^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)-1\right]=-\left[2\times\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2-1\right]=-\dfrac{1}{3}$.

故选：B

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 φ 的顶点与原点重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边过点 $P(1,-\sqrt{3})$，函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$，则（　　）

A. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\dfrac{\pi}{12}$ 对称　　B. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\dfrac{\pi}{12},0\right)$ 对称

C. $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$ 内恰有一个极大值点　　D. $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6}\right)$ 内单调递减

【答案】AD

【解析】

【分析】先利用三角函数的定义求得φ，从而得到$f\left(x\right)$的解析式，再利用三角函数的性质逐一分析各选项即可得解.

【详解】因为角φ的终边过点$P(1,-\sqrt{3})$，所以$\sin\varphi=\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\varphi=\dfrac{1}{2}$，

所以$\varphi=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$，则$f(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\right)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，

对于 A，$f\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$，故 A 正确；

对于 B，$f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\neq 0$，故 B 错误；

对于 C，当$-\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{3}$时，$-\dfrac{2\pi}{3}<2x-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{\pi}{3}$，

因为$y=\sin x$在$\left(-\dfrac{2}{3}\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right)$上单调递减，在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{3}\right)$上单调递增，

所以$f(x)$在$\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$内恰有一个极小值点，故 C 错误；

对于 D，当$\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{5\pi}{6}$时，$\dfrac{2\pi}{3}<2x-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{4\pi}{3}$，

因为$y=\sin x$在$\left(\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right)$上单调递减，所以$f(x)$在$\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6}\right)$内单调递减，故 D 正确.

故选：AD.

10. 已知抛物线$C:y^2=4x$的焦点为 F，准线交 x 轴于点 D，过 F 的直线交 C 于 A，B 两点，AF 的中点 M 在 y 轴上的射影为点 N，$|MN|=|NF|$，则（　　）

A. $|AF|=3|BF|$

B. $\angle ADB$是锐角

C. $\triangle BDN$是锐角三角形

D. 四边形 $DFMN$ 是菱形

【答案】ABD

【解析】

【分析】设出点$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，由题意分析可知三角形 MNF 为正三角形，联立方程组，解出点的坐标，逐项判断即可.

【详解】由抛物线$C: y^2=4x$，可知$F(1,0)$，$D(-1,0)$，

设点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$M\left(\dfrac{x_1+1}{2},\dfrac{y_1}{2}\right)$，所以$|MN|=\dfrac{x_1+1}{2}$，而$|AF|=x_1+1$，

所以$|MF|=\dfrac{x_1+1}{2}$，所以$|MN|=|NF|=|MF|$，所以三角形MNF为正三角形，

所以$\angle MNF=\angle FMN=\angle NFM=60^\circ$，又$MN\,//\,x$轴，

所以$\angle NFD=60^\circ$，$\angle ONF=30^\circ$，则$|NF|=|MF|=|MN|=2$，

所以$x_1=3$，$|AF|=4$，$A(3,2\sqrt{3})$，所以直线的方程为：$y=\sqrt{3}(x-1)$，

联立方程$\begin{cases}y=\sqrt{3}(x-1)\\ y^2=4x\end{cases}$，可得$3x^2-10x+3=0$，所以$x_1+x_2=\dfrac{10}{3}$，则$x_2=\dfrac{1}{3}$，

所以$|BF|=x_2+1=\dfrac{4}{3}$，所以$|AF|=3|BF|$，故 A 正确；

$|DF|=2$，$|MN|=|DF|$且$MN\,//\,DF$，$|MF|=|MN|=2$，所以四边形$DFMN$是菱形，故 D 正确；

由于以AB为直径的圆与准线相切，点D在圆外，所以$\angle ADB$是锐角，故 B 正确；

$N(0,\sqrt{3})$，$D(-1,0)$，$B\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，所以$\overrightarrow{DN}=(1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{DB}=\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，

所以$\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{DB}=\dfrac{4}{3}-2<0$，所以$\angle NDB$为钝角，所以$\triangle BDN$是钝角三角形，故 C 错误.

故选：ABD.

11. 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为 2，棱AB,BC的中点分别为E，F，点G在底面$A_1B_1C_1D_1$上，且平面$EFG\parallel$平面ACD_1，则下列说法正确的是（　　）

A. 若存在λ使得$\overrightarrow{A_1G}=\lambda\overrightarrow{GD_1}$，则$\lambda=\dfrac{1}{2}$

B. 若$G\in C_1D_1$，则$EG\parallel$平面ADD_1A_1

C. 三棱锥$G-BC_1D$体积的最大值为 2

D. 二面角$D-EF-G$的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】BCD

【解析】

【分析】建立空间直角坐标系，由平面$EFG\parallel$平面ACD_1，根据向量法得出点G

的轨迹，由向量共线可判定 A，根据线面平行的判定定理可判定 B，根据棱锥体积公式可得 C，由向量法求面面角可得 D.

【详解】如图，建立空间直角坐标系，依题意，$A(2,0,0),C(0,2,0),D_1(0,0,2),E(2,1,0),F(1,2,0)$，

设 $G(x_0,y_0,2)$，

则 $\overrightarrow{AC}=(-2,2,0),\overrightarrow{AD_1}=(-2,0,2),\overrightarrow{EF}=(-1,1,0),\overrightarrow{EG}=(x_0-2,y_0-1,2)$，

设平面 ACD_1 的一个法向量为 $\vec{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\vec{n_1}\perp\overrightarrow{AC}\\ \vec{n_1}\perp\overrightarrow{AD_1}\end{cases}$，所以 $\begin{cases}\vec{n_1}\cdot\overrightarrow{AC}=-2x_1+2y_1=0\\ \vec{n_1}\cdot\overrightarrow{AD_1}=-2x_1+2z_1=0\end{cases}$，令 $x_1=1$，则 $y_1=z_1=1$，即 $\vec{n_1}=(1,1,1)$，

设平面 EFG 的一个法向量 $\vec{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\vec{n_2}\perp\overrightarrow{EF}\\ \vec{n_2}\perp\overrightarrow{EG}\end{cases}$，

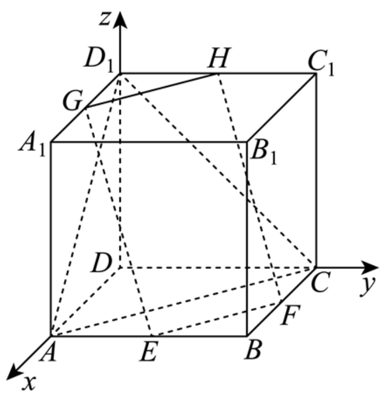
所以 $\begin{cases}\vec{n_2}\cdot\overrightarrow{EF}=-x_2+y_2=0\\ \vec{n_2}\cdot\overrightarrow{EG}=x_2(x_0-2)+y_2(y_0-1)+2z_2=0\end{cases}$，令 $x_2=1$，则 $y_2=1,z_2=\dfrac{3-x_0-y_0}{2}$

即 $\vec{n_2}=\left(1,1,\dfrac{3-x_0-y_0}{2}\right)$，因为平面 $EFG\parallel$ 平面 ACD_1，所以 $\vec{n_1}//\vec{n_2}$，即 $\dfrac{3-x_0-y_0}{2}=1$，所以

$x_0+y_0=1$，

选项 A：若存在 λ 使得 $\overrightarrow{A_1G}=\lambda\overrightarrow{GD_1}$，则点 G 在线段 A_1D_1 上，所以 $y_0=0$，即 $x_0=1$，

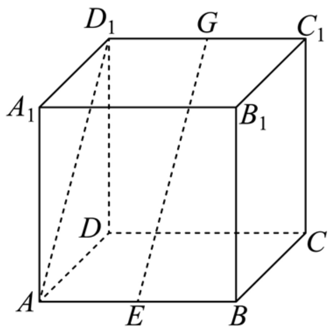
所以 G 为 A_1D_1 的中点，即 $\lambda=1$，故 A 错误；



选项 B：若 $G\in C_1D_1$，则 $x_0=0$，即 $y_0=1$，所以 G 为 C_1D_1 的中点，

因为 E 为 AB 的中点，所以 $AE//D_1G,AE=D_1G$,故四边形 $AEGD_1$ 为平行四边形，

所以 $EG//AD_1$，$EG\not\subset$ 平面 ADD_1A_1，$AD_1\subset$ 平面 ADD_1A_1，所以 $EG\parallel$ 平面 ADD_1A_1，故 B 正确；



选项 C：因为 $\overrightarrow{DC_1}=(0,2,2),\overrightarrow{DB}=(2,2,0),\overrightarrow{DG}=(x_0,y_0,2)$，设平面 DBC_1 的一个法向量为

$\overrightarrow{n_3}=(x_3,y_3,z_3)$，

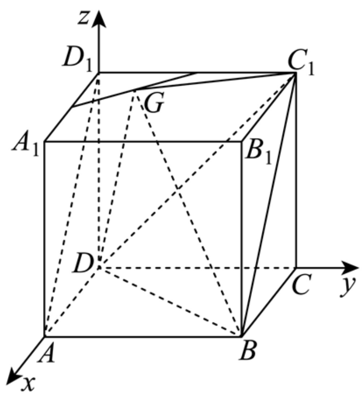
则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_3}\perp\overrightarrow{DC_1}\\ \overrightarrow{n_3}\perp\overrightarrow{DB}\end{cases}$，所以 $\begin{cases}\overrightarrow{n_3}\cdot\overrightarrow{DC_1}=2y_3+2z_3=0\\ \overrightarrow{n_3}\cdot\overrightarrow{DB}=2x_3+2y_3=0\end{cases}$，令 $y_3=1$，则 $x_3=z_3=-1$，

即 $\overrightarrow{n_3}=(-1,1,-1)$，设 G 到平面 DBC_1 的距离为 $d=\left|\dfrac{\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{n_3}}{\left|\overrightarrow{n_3}\right|}\right|=\left|\dfrac{-x_0+y_0-2}{\sqrt{3}}\right|=\dfrac{|2x_0+1|}{\sqrt{3}}$，

又 $\triangle DBC_1$ 为等边三角形且边长为 $2\sqrt{2}$，则 $S_{\triangle DBC_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\left(2\sqrt{2}\right)^2=2\sqrt{3}$，

所以 $V_{G-DBC_1}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle DBC_1}\cdot d=\dfrac{1}{3}\times2\sqrt{3}\times\dfrac{|2x_0+1|}{\sqrt{3}}=\dfrac{2}{3}|2x_0+1|$，又 $0\le x_0\le1$，

所以当 $x_0=1$ 时，三棱锥 $G-BC_1D$ 体积的最大值为 2，故 C 正确；



选项 D：因为 $DD_1\perp$ 平面 DEF，所以平面 DEF 的一个法向量为 $\overrightarrow{DD_1}=(0,0,2)$，

平面 EFG 的一个法向量 $\overrightarrow{n_1}=(1,1,1)$， 则 $\cos\langle\overrightarrow{DD_1},\overrightarrow{n_1}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{DD_1}\cdot\overrightarrow{n_1}}{\left|\overrightarrow{DD_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_1}\right|}=\dfrac{2}{2\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

因为二面角 $D-EF-G$ 为锐角，所以二面角 $D-EF-G$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故 D 正确；

故选：BCD.

【点睛】利用空间向量解决立体几何中的动点问题及求角和距离是常用方法.

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 某企业生产一种零部件，其质量指标介于$(49.6,50.4)$的为优品.技术改造前，该企业生产的该种零部件质量指标服从正态分布$N(50,0.16)$；技术改造后，该企业生产的同种零部件质量指标服从正态分布$N(50,0.04)$.那么，该企业生产的这种零部件技术改造后的优品率与技术改造前的优品率之差为__________.（若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$P(|X-\mu|<\sigma)=0.6827$，$P(|X-\mu|<2\sigma)=0.9545$，$P(|X-\mu|<3\sigma)=0.9973$）

【答案】0.2718

【解析】

【分析】根据题意利用正态分布性质分别计算出技术改造前后的优品率，可得结果.

【详解】技术改造前，易知$\mu_1=50,\sigma_1=0.4$，

则其优品率为$P\left(49.6<X<50.4\right)=P\left(\mu_1-\sigma_1<X<\mu_1+\sigma_1\right)=P(\left|X-\mu_1\right|<\sigma_1)=0.6827$；

技术改造后，其中$\mu_2=50,\sigma_2=0.2$，

则其优品率为$P\left(49.6<X<50.4\right)=P\left(\mu_2-2\sigma_2<X<\mu_2+2\sigma_2\right)=P(\left|X-\mu_1\right|<2\sigma_2)=0.9545$；

所以优品率之差为$0.9545-0.6827=0.2718$.

故答案为：0.2718

13. 已知圆台O_1O_2的高为 6，AB，CD分别为上、下底面的一条直径，且$AB=4$，$CD=8$，则圆台O_1O_2的体积为__________；若A，B，C，D四点不共面，且它们都在同一个球面上，则该球的表面积为__________.

【答案】 ①. 56π ②. 80π

【解析】

【分析】利用圆台的体积公式可求圆台的体积，先确定球心位置，再求出球的半径，可得球的表面积.

【详解】由题意可知：圆台的上底半径为$r_1=2$，下底半径为$r_2=4$，高为$h=6$，

所以圆台的体积为：$V=\dfrac{\pi h}{3}\left(r_1^2+r_1r_2+r_2^2\right)=\dfrac{6\pi}{3}\left(4+2\times4+16\right)=56\pi$；

易知：A，B，C，D四点所在的球面，即为圆台的外接球球面，如图：