专题09 期中-综合大题必刷（压轴15考点31题）

一．二次根式的性质与化简（共1小题）

1．先阅读下列的解答过程，然后作答：

形如$\sqrt{m\pm 2\sqrt{n}}$的化简，只要我们找到两个数a、b使$a+b=m$，$ab=n$，这样（$\sqrt{a}$）^{2}+（$\sqrt{b}$）$^2=m$，$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{n}$，那么便有$\sqrt{m\pm 2\sqrt{n}}=\sqrt{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$（$a>b$）例如：化简$\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

解：首先把$\sqrt{7+4\sqrt{3}}$化为$\sqrt{7+2\sqrt{12}}$，这里$m=7$，$n=12$；

由于$4+3=7$，$4\times3=12$，即（$\sqrt{4}$）^{2}+（$\sqrt{3}$）$^2=7$，$\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{12}$，

$\therefore\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{(\sqrt{4}+\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3}$

由上述例题的方法化简：

（1）$\sqrt{13-2\sqrt{42}}$；

（2）$\sqrt{7-\sqrt{40}}$；

（3）$\sqrt{2-\sqrt{3}}$．

【答案】见试题解答内容

【解答】解：（1）$\sqrt{13-2\sqrt{42}}=\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{6})^2}=\sqrt{7}-\sqrt{6}$；

（2）$\sqrt{7-\sqrt{40}}=\sqrt{7-2\sqrt{10}}=\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$；

（3）$\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{8-4\sqrt{3}}{4}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$．

二．二次根式的混合运算（共1小题）

2．计算：

（1）$\sqrt{32}+\sqrt{50}+\dfrac{1}{3}\sqrt{45}-\sqrt{18}$；

（2）（$\sqrt{6}\times\sqrt{3}-4\sqrt{\dfrac{1}{2}}+3\sqrt{8}$）$\div 2\sqrt{2}$．

【答案】（1）$6\sqrt{2}+\sqrt{5}$；（2）$\dfrac{7}{2}$．

【解答】解：（1）原式$=4\sqrt{2}+5\sqrt{2}+\sqrt{5}-3\sqrt{2}$

$=6\sqrt{2}+\sqrt{5}$；

（2）原式$=$（$3\sqrt{2}-2\sqrt{2}+6\sqrt{2}$）$\div 2\sqrt{2}$

$=(3\sqrt{2}+4\sqrt{2})\div 2\sqrt{2}$

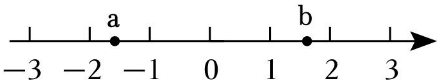
$=7\sqrt{2}\div 2\sqrt{2}$

$=\frac{7}{2}$.

三．二次根式的化简求值（共 2 小题）

3．（1）先化简，再求值：$(1+\frac{1}{x-1})\cdot\frac{x^2-1}{x}$，其中 $x=\sqrt{3}-1$；

（2）数 a、b 在数轴上的位置如图所示，化简：$\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{(b-1)^2}-\sqrt{(a+1)^2}$.



【答案】（1）$\sqrt{3}$；

（2）$2b$.

【解答】解：（1）原式$=\frac{x-1+1}{x-1}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{x}=\frac{x}{x-1}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{x}=x+1$，

当 $x=\sqrt{3}-1$ 时，

原式$=x+1=\sqrt{3}-1+1=\sqrt{3}$；

（2）由数轴可知，$-2<a<-1$，$1<b<2$，

∴$a-b<0$，$b-1>0$，$a+1<0$，

∴原式$=-(a-b)+(b-1)+(a+1)=-a+b+b-1+a+1=2b$.

4．阅读下面计算过程：

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1\times(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}-1$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{1\times(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}+2}=\frac{1\times(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=\sqrt{5}-2$$

试求：

（1）$\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$ 的值为 ＿$\sqrt{7}-\sqrt{6}$＿.

（2）求$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$的值.

（3）若 $a=\frac{1}{\sqrt{5}-2}$，求 a^2-4a+4 的值.

【答案】（1）$\sqrt{7}-\sqrt{6}$；

（2）9；

（3）5.

【解答】解：（1）$\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$

$=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{7}-\sqrt{6})}$

$=\sqrt{7}-\sqrt{6}$，

故答案为：$\sqrt{7}-\sqrt{6}$；

（2）$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{99}-\sqrt{98}+\sqrt{100}-\sqrt{99}$

$=\sqrt{100}-1$

$=10-1$

$=9$；

（3）∵ $a=\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}+2$，

∴a^2-4a+4

$=(a-2)^2$

$=(\sqrt{5}+2-2)^2$

$=(\sqrt{5})^2$

$=5$.

四．勾股定理（共 3 小题）

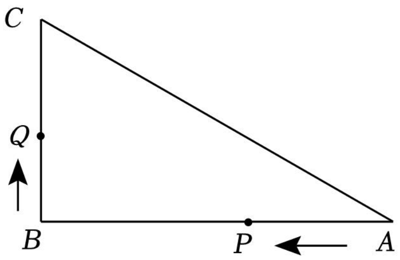
5．已知△ABC 中，$\angle B=90°$，$BC=6cm$，$AB=8cm$，P、Q 是△ABC 边上的两个动点，其中点 P 从点 A 开始沿 $A\to B$ 方向运动且速度为每秒 $2cm$，点 Q 从点 B 开始沿 $B\to C\to A$ 方向运动，在 BC 边上的运动速度是每秒 $3cm$，在 AC 边上的运动速度是每秒 $5cm$，它们同时出发，当其中一个点到达终点时，另一个点也随之停止，设运动时间为 t 秒，

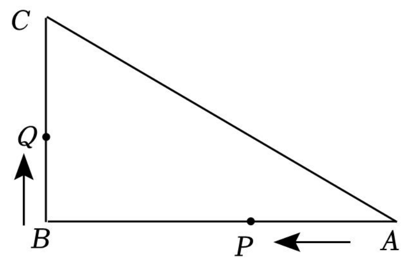
（1）线段 $AC=$__10__；

（2）当 $t=1$ 秒时，求△BPQ 的面积；

（3）当 $AP=CP$ 时，$CQ=$__$\frac{45}{8}$__；

（4）若 PQ 将△ABC 周长分为 5：7 两部分，直接写出 t 的值．





备用图

【答案】（1）10；

（2）9；

（3）$\frac{45}{8}$；

（4）2 或$\frac{10}{3}$.

【解答】解：（1）∵$\angle B=90°$，

∴$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$，

故答案为：10；

（2）∵$AP=2t=2$，$BQ=3t=3$，

∴$BP=AB-AP=8-2=6$，

∴$S_{\triangle BPQ}=\frac{1}{2}BP\cdot BQ=\frac{1}{2}\times 6\times 3=9$；

（3）设 $AP=CP=x$，

在 Rt△BCP 中，由勾股定理得，

$CP^2-BP^2=BC^2$，

∴$x^2-(8-x)^2=6^2$，

∴$x=\frac{25}{4}$，

∴$t=\frac{25}{4}\div 2=\frac{25}{8}>2$，

∴点 Q 在 AC 上，

∴$CQ=5\times(\frac{25}{8}-2)=\frac{45}{8}$，

故答案为：$\frac{45}{8}$；

（4）$(6+8+10)\times\frac{5}{5+7}=10$，$24-10=14$，

当 $0<t<2$ 时，$BP+BQ=10$ 时，

$8-2t+3t=10$，

∴$t=2$（舍去），

当 $BP+BQ=14$ 时，

$8-2t+3t=14$，

∴$t=6$（舍去），

当 $2\leqslant t<4$ 时，

当 $AP+AQ=10$ 时，

$2t+10-5(t-2)=10$，

∴$t=\frac{10}{3}$，

当 $AP+AQ=14$ 时，

$2t+10-5(t-2)=14$，

∴$t=2$，

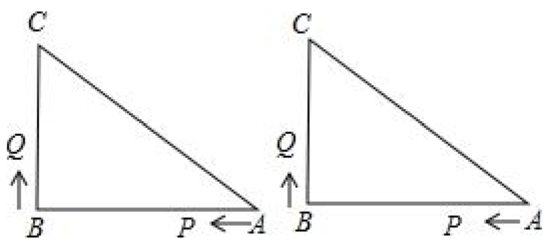
综上所述：$t=2$ 或 $\frac{10}{3}$.

6．如图，已知△ABC 中，$\angle B=90°$，$AB=8cm$，$BC=6cm$，P、Q 分别为 AB、BC 边上的动点，点 P 从点 A 开始沿 $A\Rightarrow B$ 方向运动，且速度为每秒 1cm，点 Q 从点 B 开始 $B\to C$ 方向运动，且速度为每秒 2cm，它们同时出发；设出发的时间为 t 秒．

（1）出发 2 秒后，求 PQ 的长；

（2）从出发几秒钟后，△PQB 能形成等腰三角形？

（3）在运动过程中，直线 PQ 能否把原三角形周长分成相等的两部分？若能够，请求出运动时间；若不能够，请说明理由．



【答案】见试题解答内容

【解答】解：（1）出发 2 秒后，$AP=2$，$BQ=4$，

∴$BP=8-2=6$，$PQ=\sqrt{BQ^2+BP^2}=2\sqrt{13}$；（3 分）

（2）设时间为 t，列方程得

$2t=8-1\times t$，

解得 $t=\frac{8}{3}$；（6 分）

（3）假设直线 PQ 能把原三角形周长分成相等的两部分，

由 $AB=8cm$，$BC=6cm$，

根据勾股定理可知 $AC=10cm$，

即三角形的周长为 $8+6+10=24cm$，

则有 $BP+BQ=\frac{1}{2}\times 24=12$，

设时间为 t，列方程得：$2t+(8-1\times t)=12$，

解得 $t=4$，

当 $t=4$ 时，点 Q 运动的路程是 $4\times 2=8>6$，

所以直线 PQ 不能够把原三角形周长分成相等的两部分.（10 分）

7．如图 1，四边形 $ADCO$ 中，$\angle AOC=90°$，$\angle ADC=90°$，$AD=7$，$DC=24$，$CO=15$.

（1）求线段 AO 的长度；

（2）如图 2 所示，OB 是 $\angle AOC$ 的平分线，一动点 P 从点 O 出发，以每秒 2 个单位长度的速度沿射线 OB 运动．设点 P 的运动时间为 t 秒，当 $\triangle AOP$ 是等腰三角形时，请求出 t 的值.

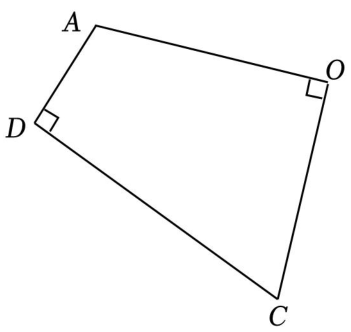


图1

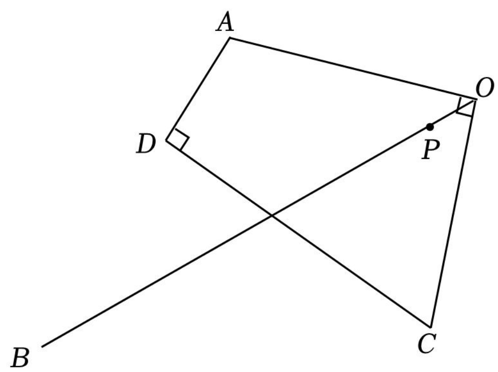


图2

【答案】（1）20；

（2）t 的值为 $5\sqrt{2}$ 或 10 或 $10\sqrt{2}$.

【解答】解：如图 1，连接 AC，

∵ $\angle ADC=90°$，$AD=7$，$DC=24$，

∴ $AC=\sqrt{AD^2+DC^2}=\sqrt{7^2+24^2}=25$，

∵$\angle AOC=90°$，$CO=15$，

∴$AO=\sqrt{AC^2-CO^2}=\sqrt{25^2-15^2}=20$；

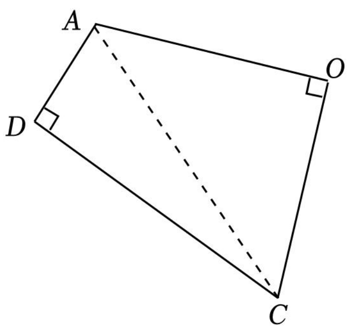


图1

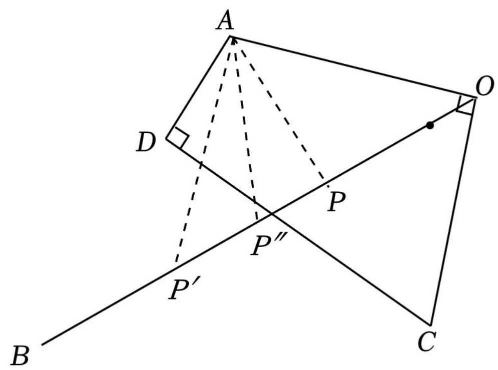


图2

（2）如图 2，∵OB 是$\angle AOC$ 的平分线，

∴$\angle AOB=\angle COB=45°$，

∵一动点 P 从点 O 出发，以每秒 2 个单位长度的速度沿射线 OB 运动，设点 P 的运动时间为 t 秒，

∴$OP=2t$，

当$\triangle AOP$ 是等腰三角形时，分 3 种情况讨论：

①当 $AP=OP$ 时，

∴$\angle PAO=\angle POA=45°$，

∴$\triangle AOP$ 是等腰直角三角形，

由（1）知：$AO=20$，

∴$OP=\frac{\sqrt{2}}{2}AO=10\sqrt{2}$，

∴$2t=10\sqrt{2}$，

∴$t=5\sqrt{2}$；

②当 $OA=OP''$ 时，

∴$2t=20$，

∴$t=10$；

③当 $AP'=AO$ 时，

∴$\angle AP'O=\angle AOP'=45°$，

∴$\triangle AOP'$ 是等腰直角三角形，

∴$OP=\sqrt{2}AO=20\sqrt{2}$，

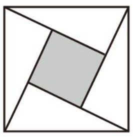
$\therefore 2t=20\sqrt{2}$,

$\therefore t=10\sqrt{2}$,

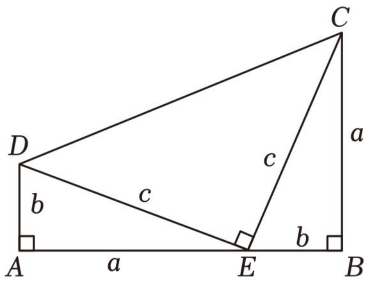
$\therefore t$ 的值为 $5\sqrt{2}$ 或 10 或 $10\sqrt{2}$.

五．勾股定理的证明（共 1 小题）

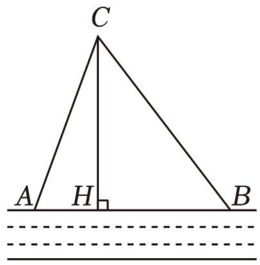
8．著名的赵爽弦图（如图①，其中四个直角三角形较大的直角边长都为 a，较小的直角边长都为 b，斜边长都为 c），大正方形的面积可以表示为 c^2，也可以表示为 $4\times\frac{1}{2}ab+(a-b)^2$，由推导出重要的勾股定理：如果直角三角形两条直角边长为 a，b，斜边长为 c，则 $a^2+b^2=c^2$.



图①



图②



图③

（1）图②为美国第二十任总统伽菲尔德的“总统证法”，请你利用图②推导勾股定理；

（2）如图③，在一条东西走向河流的一侧有一村庄 C，河边原有两个取水点 A、B，$AB=AC$，由于某种原因，由 C 到 A 的路现在已经不通，该村为方便村民取水决定在河边新建一个取水点 H（A、H、B 在同一条直线上），并新修一条路 CH，且 $CH\perp AB$．测得 $CH=0.8$ 千米，$HB=0.6$ 千米，求新路 CH 比原路 CA 少多少千米？

（3）小明继续思考研究，发现了三角形已知三边的长，可求高的一种方法．他是这样思考的，在第（2）问中若 $AB\neq AC$ 时，$CH\perp AB$，$AC=10$，$BC=17$，$AB=21$，设 $AH=x$，可以求 CH 的值，请帮小明写出求 CH 的过程.

【答案】（1）推导过程见解答；

（2）新路 CH 比原路 CA 少约 0.03 千米；

（3）8.

【解答】解：（1）梯形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{1}{2}(a+b)(a+b)=\frac{1}{2}a^2+ab+\frac{1}{2}b^2$,

也可以表示为 $\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2$,

$\therefore \frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}a^2+ab+\frac{1}{2}b^2$,

即 $a^2+b^2=c^2$；

（2）设 $AB=AC=x$ 千米，

∴$AH=AB-BH=(x-0.6)$ 千米，

在 Rt△ACH 中，根据勾股定理得：$CA^2=CH^2+AH^2$，

∴$x^2=0.8^2+(x-0.6)^2$，

解得 $x\approx0.83$，

即 $CA\approx0.83$ 千米，

∴$CA-CH\approx0.83-0.8\approx0.03$（千米），

答：新路 CH 比原路 CA 少约 0.03 千米；

（3）∵$AH=x$，

∴$BH=AB-AH=21-x$，

∵$CH\perp AB$，$AC=10$，$BC=17$，$AB=21$，

根据勾股定理：

在 Rt△ACH 中，$CH^2=CA^2-AH^2$，

在 Rt△BCH 中，$CH^2=CB^2-BH^2$，

∴$CA^2-AH^2=CB^2-BH^2$，

即 $10^2-x^2=17^2-(21-x)^2$，

解得：$x=6$，

∴$AH=6$，

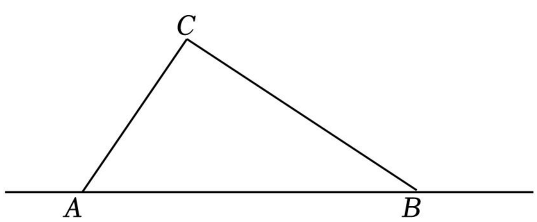
∴$CH=\sqrt{CA^2-AH^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$.

六．勾股定理的应用（共 1 小题）

9．今年第 6 号台风“烟花”登陆我国沿海地区，风力强，累计降雨量大，影响范围大，有极强的破坏力．如图，台风“烟花”中心沿东西方向 AB 由 A 向 B 移动，已知点 C 为一海港，且点 C 与直线 AB 上的两点 A、B 的距离分别为 $AC=300km$，$BC=400km$，又 $AB=500km$，经测量，距离台风中心 $260km$ 及以内的地区会受到影响．

（1）海港 C 受台风影响吗？为什么？

（2）若台风中心的移动速度为 28 千米/时，则台风影响该海港持续的时间有多长？



【答案】（1）海港 C 受台风影响，理由见解答过程；

（2）台风影响该海港持续的时间为$\frac{50}{7}$小时．

【解答】解：（1）海港 C 受台风影响，理由：

∵$AC=300km$，$BC=400km$，$AB=500km$，

∴$AC^2+BC^2=AB^2$，

∴△ABC 是直角三角形，$\angle ACB=90°$；

过点 C 作 $CD\perp AB$ 于 D，

∵△ABC 是直角三角形，

∴$AC\times BC=CD\times AB$，

∴$300\times400=500\times CD$，

∴$CD=240$（km），

∵以台风中心为圆心周围 $260km$ 以内为受影响区域，

∴海港 C 受台风影响；

（2）当 $EC=260km$，$FC=260km$ 时，正好影响 C 港口，

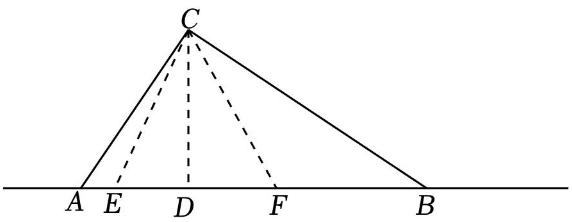
∵$ED=\sqrt{EC^2-CD^2}=\sqrt{260^2-240^2}=100$（$km$），

∴$EF=2ED=200km$，

∵台风的速度为 28 千米/小时，

∴$200\div28=\frac{50}{7}$（小时）．

答：台风影响该海港持续的时间为$\frac{50}{7}$小时．

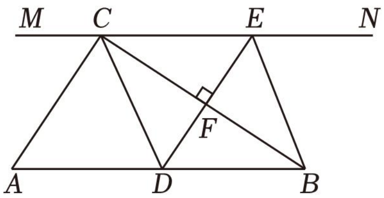


七．平行四边形的判定与性质（共 1 小题）

10．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，过点 C 的直线 $MN\parallel AB$，D 为 AB 边上一点，过点 D 作 $DE\perp BC$，交直线 MN 于 E，垂足为 F，连接 CD，BE．

（1）求证：$CE=AD$；

（2）当 D 为 AB 的中点时，判断四边形 $BECD$ 的形状，并说明理由．



【答案】（1）证明过程见解答；

（2）四边形 $BECD$ 是菱形，理由见解答．

【解答】（1）证明：∵$DE\perp BC$，

∴$\angle DFB=90^\circ$，

∵$\angle ACB=90^\circ$，

∴$\angle ACB=\angle DFB=90^\circ$，

∴$AC/\!/DE$，

∵$MN/\!/AB$，

∴四边形 $ADEC$ 是平行四边形，

∴$CE=AD$；

（2）四边形 $BECD$ 是菱形，

理由：∵D 为 AB 中点，

∴$AD=BD$，

∵$CE=AD$，

∴$BD=CE$，

∵$BD/\!/CE$，

∴四边形 $BECD$ 是平行四边形，

∵$\angle ACB=90^\circ$，D 为 AB 中点，

∴$CD=BD=\frac{1}{2}AB$，

∴四边形 $BECD$ 是菱形．

八．菱形的性质（共 1 小题）

11．【问题原型】如图 1，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ADC=90^\circ$，$AB=AC$．点 E、F 分别为 AC、BC 的中点，连接 EF，DE．试说明：$DE=EF$．

【探究】如图 2，在问题原型的条件下，当 AC 平分$\angle BAD$，$\angle DEF=90^\circ$ 时，求$\angle BAD$ 的大小．

【应用】如图 3，在问题原型的条件下，当 $AB=2$，且四边形 $CDEF$ 是菱形时，直接写

出四边形 $ABCD$ 的面积.

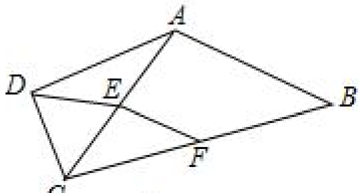


图1

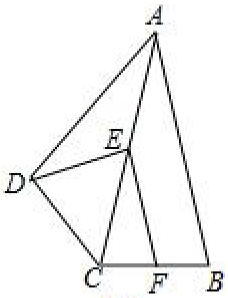


图2

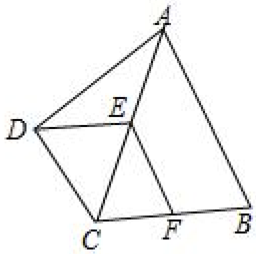


图3

【答案】见试题解答内容

【解答】解：【问题原型】证明：

在△ABC 中，点 E，F 分别为 AC，BC 的中点

∴$EF\parallel AB$，且 $EF=\frac{1}{2}AB$

在 Rt△ACD 中，点 E 为 AC 的中点∴$DE=\frac{1}{2}AC$∵$AB=AC$，∴$DE=EF$

【探究】解：∵AC 平分∠BAD，$EF\parallel AB$，

$DE=\frac{1}{2}AC=AE=EC$

∴∠BAC=∠DAC，∠CEF=∠BAC

∠DEC=2∠DAC=∠BAD

∵∠$DEF=90°$

∴∠CEF+∠DEC=∠BAC+2∠$DAC=90°$

∴∠BAC=∠$DAC=30°$，

∴∠$BAD=60°$

【应用】四边形 $ABCD$ 的面积为：$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

∵四边形 $CDEF$ 是菱形，$EC=DE$，

∴△CDE 与△CEF 都是等边三角形，

∵$AB=2$，∴$EF=DE=CD=CF=1$

∴$S_{\triangle DCE}=S_{\triangle DEA}=S_{\triangle CEF}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

∵$EF\parallel AB$，∴$\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle ABC}}=(\frac{1}{2})^2$，∴$S_{\triangle ABC}=4S_{\triangle CEF}=\sqrt{3}$

∴$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle DCE}+S_{\triangle DEA}+S_{\triangle ABC}$

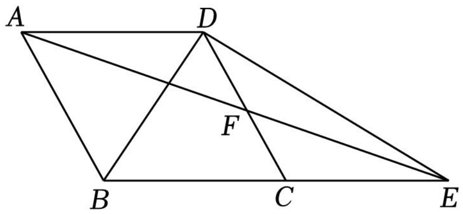
$=2\times\frac{\sqrt{3}}{4}+\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

九．菱形的判定与性质（共 2 小题）

12．在 Rt△*BDE* 中，$\angle BDE=90°$，*C* 是 *BE* 的中点，过点 *D* 作 *AD*∥*BE*，且 *AD*＝*BC*，连接 *AE* 交 *CD* 于 *F*．

（1）求证：四边形 *ABCD* 是菱形；

（2）若 *DB*＝8，菱形 *ABCD* 的面积为 40，求 *DE* 的长．



【答案】（1）见解析；

（2）10．

【解答】（1）证明：*AD*∥*BE*，且 *AD*＝*BC*，

∴四边形 *ABCD* 是平行四边形，

∵点 *C* 是 *BE* 边的中点，$\angle BDE=90°$，

∴*BC*＝*CE*＝*DC*，

∴平行四边形 *ABCD* 是菱形；

（2）解：∵四边形 *ABCD* 是菱形，

∴*AB*＝*AD*＝*CD*＝*BC*，

在△*ABD* 和△*CDB* 中，

$$\begin{cases}AB=CD\\AD=CB\\BD=DB\end{cases},$$

∴△*ABD*≌△*CDB*（*SSS*），

∴$S_{\triangle ABD}=S_{CDB}$，

∵*BC*＝*CE*，

∴$S_{\triangle BCD}=S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}S_{\triangle BDE}$，

∴$\frac{1}{2}\times 8\cdot DE=40$，

∴*DE*＝10．

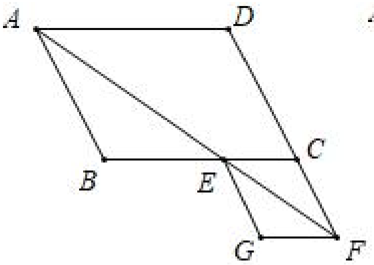
13．如图，在▱*ABCD* 中，∠*BAD* 的平分线交 *BC* 于点 *E*，交 *DC* 的延长线于 *F*，以 *EC*、

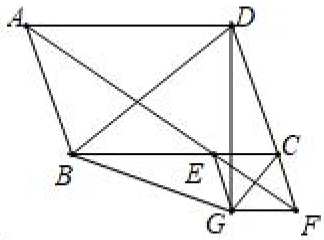
CF 为邻边作▱$ECFG$.

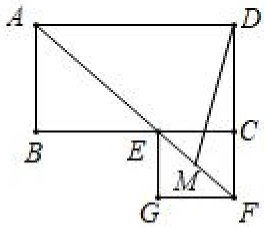
（1）证明▱$ECFG$ 是菱形；

（2）若 $\angle ABC=120°$，连接 BD、CG，求 $\angle BDG$ 的度数；

（3）若 $\angle ABC=90°$，$AB=6$，$AD=8$，M 是 EF 的中点，求 DM 的长.







【答案】见试题解答内容

【解答】解：（1）证明：

∵AF 平分 $\angle BAD$，

∴$\angle BAF=\angle DAF$，

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AD /\!/ BC$，$AB /\!/ CD$，

∴$\angle DAF=\angle CEF$，$\angle BAF=\angle CFE$，

∴$\angle CEF=\angle CFE$，

∴$CE=CF$，

又∵四边形 $ECFG$ 是平行四边形，

∴四边形 $ECFG$ 为菱形；

（2）∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AB /\!/ DC$，$AB=DC$，$AD /\!/ BC$，

∵$\angle ABC=120°$，

∴$\angle BCD=60°$，$\angle BCF=120°$

由（1）知，四边形 $CEGF$ 是菱形，

∴$CE=GE$，$\angle BCG=\frac{1}{2}\angle BCF=60°$，

∴$CG=GE=CE$，$\angle DCG=120°$，

∵$EG /\!/ DF$，

∴$\angle BEG=120°=\angle DCG$，

∵AE 是$\angle BAD$ 的平分线，

∴$\angle DAE=\angle BAE$，

∵$AD\parallel BC$，

∴$\angle DAE=\angle AEB$，

∴$\angle BAE=\angle AEB$，

∴$AB=BE$，

∴$BE=CD$，

∴$\triangle BEG\cong\triangle DCG$（$SAS$），

∴$BG=DG$，$\angle BGE=\angle DGC$，

∴$\angle BGD=\angle CGE$，

∵$CG=GE=CE$，

∴$\triangle CEG$ 是等边三角形，

∴$\angle CGE=60^\circ$，

∴$\angle BGD=60^\circ$，

∵$BG=DG$，

∴$\triangle BDG$ 是等边三角形，

∴$\angle BDG=60^\circ$；

（3）如图 2 中，连接 BM，MC，

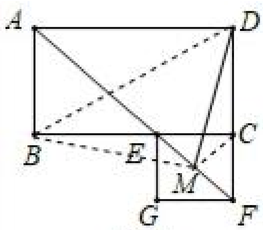


图3

∵$\angle ABC=90^\circ$，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴四边形 $ABCD$ 是矩形，

又由（1）可知四边形 $ECFG$ 为菱形，

$\angle ECF=90^\circ$，

∴四边形 $ECFG$ 为正方形．

∵$\angle BAF=\angle DAF$，

$\therefore BE=AB=DC$，

$\because M$ 为 EF 中点，

$\therefore \angle CEM=\angle ECM=45^{\circ}$，

$\therefore \angle BEM=\angle DCM=135^{\circ}$，

在$\triangle BME$ 和$\triangle DMC$ 中，

$\because \begin{cases} BE=CD \\ \angle BEM=\angle DCM \\ EM=CM \end{cases}$，

$\therefore \triangle BME\cong\triangle DMC$（$SAS$），

$\therefore MB=MD$，

$\angle DMC=\angle BME$．

$\therefore \angle BMD=\angle BME+\angle EMD=\angle DMC+\angle EMD=90^{\circ}$，

$\therefore \triangle BMD$ 是等腰直角三角形．

$\because AB=6$，$AD=8$，

$\therefore BD=10$，

$\therefore DM=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BD=5\sqrt{2}$．

方法二：$\because \angle ABC=90^{\circ}$，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是矩形，

又由（1）可知四边形 $ECFG$ 为菱形，

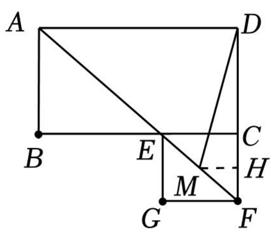
$\angle ECF=90^{\circ}$，

$\therefore$四边形 $ECFG$ 为正方形．

$\because \angle BAF=\angle DAF$，

$\therefore BE=AB=DC=6$，

过 M 作 $MH\perp CF$ 于 H，



则$\triangle MHF$ 是等腰直角三角形，

$\because \triangle ADF$ 是等腰直角三角形，

∴$DF=AD=8$，

∵$CF=CE=2$，

∴$MH=FH=1$，

∴$DM=\sqrt{MH^2+DH^2}=\sqrt{1^2+7^2}=5\sqrt{2}$.

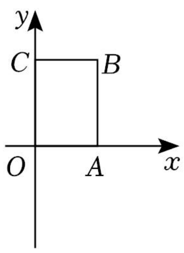
一十．矩形的性质（共 2 小题）

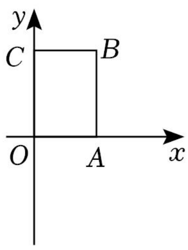
14．如图，在长方形 $OABC$ 中，O 为平面直角坐标系的原点，点 A 的坐标为（a，0），点 C 的坐标为（0，b）且 a、b 满足$\sqrt{a-4}+|b-6|=0$，点 B 在第一象限内，点 P 从原点出发，以每秒 2 个单位长度的速度沿着 $O-C-B-A-O$ 的线路移动．

（Ⅰ）点 B 的坐标为<u>（4，6）</u>；当点 P 移动 3.5 秒时，点 P 的坐标为<u>（1，6）</u>；

（Ⅱ）在移动过程中，当点 P 到 x 轴的距离为 4 个单位长度时，求点 P 移动的时间；

（Ⅲ）在移动过程中，当△OBP 的面积是 10 时，求点 P 移动的时间．





备用图

【答案】见试题解答内容

【解答】解：（Ⅰ）∵a、b 满足 $\sqrt{a-4}+|b-6|=0$，

∴$a-4=0$，$b-6=0$，

解得 $a=4$，$b=6$，

∴点 B 的坐标是（4，6），

∵点 P 从原点出发，以每秒 2 个单位长度的速度沿着 $O-C-B-A-O$ 的线路移动，

∴$2\times3.5=7$，

∵$OA=4$，$OC=6$，

∴当点 P 移动 4 秒时，在线段 CB 上，离点 C 的距离是：$7-6=1$，

即当点 P 移动 4 秒时，此时点 P 在线段 CB 上，离点 C 的距离是 1 个单位长度，点 P 的坐标是（1，6）；

故答案为（4，6），（1，6）．

（Ⅱ）由题意可得，在移动过程中，当点 P 到 x 轴的距离为 4 个单位长度时，存在两种情况，

第一种情况，当点 P 在 OC 上时，

点 P 移动的时间是：$4\div2=2$ 秒，

第二种情况，当点 P 在 BA 上时．

点 P 移动的时间是：$(6+4+2)\div2=6$ 秒，

故在移动过程中，当点 P 到 x 轴的距离为 4 个单位长度时，点 P 移动的时间是 2 秒或 6 秒．

（Ⅲ）如图 1 所示：

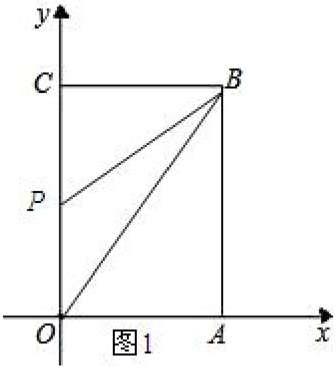


图1

∵△OBP 的面积＝10，

∴$\frac{1}{2}OP\cdot BC=10$，即$\frac{1}{2}\times4\times OP=10$．

解得：$OP=5$．

∴此时 $t=2.5s$

如图 2 所示；

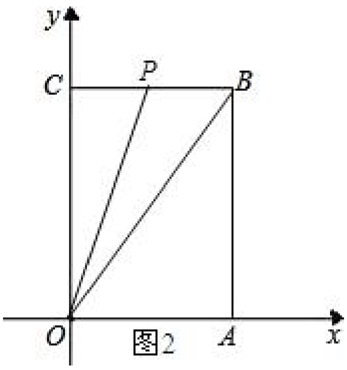


图2

∵△OBP 的面积＝10，

∴$\frac{1}{2}PB\cdot OC=10$，即 $\frac{1}{2}\times6\times PB=10$．

解得：$BP=\frac{10}{3}$.

∴$CP=\frac{2}{3}$.

∴此时 $t=\frac{10}{3}s$，

如图 3 所示：

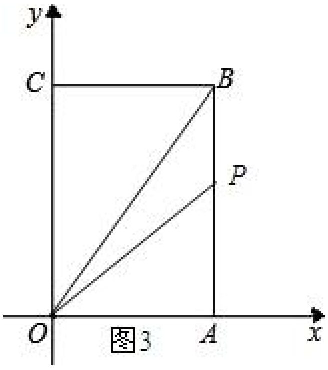


图3

∵△OBP 的面积＝10，

∴$\frac{1}{2}BP\bullet BC=10$，即 $\frac{1}{2}\times4\times PB=10$.

解得：$BP=5$.

∴此时 $t=\frac{15}{2}s$

如图 4 所示：

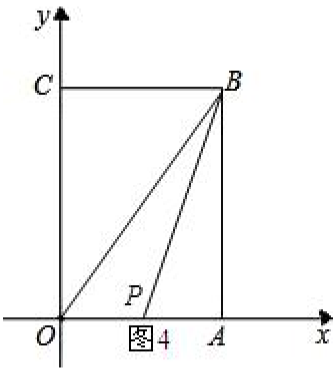


图4

∵△OBP 的面积＝10，

∴$\frac{1}{2}OP\bullet AB=10$，即 $\frac{1}{2}\times6\times OP=10$.

解得：$OP=\frac{10}{3}$.

∴此时 $t=\frac{25}{3}s$

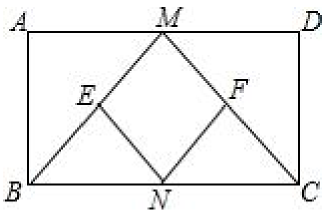
综上所述，满足条件的时间 t 的值为 $2.5s$ 或 $\frac{10}{3}s$ 或 $\frac{15}{2}s$ 或 $\frac{25}{3}s$.

15．如图，在矩形 $ABCD$ 中，M，N 分别是边 AD，BC 的中点，E，F 分别是线段 BM，CM

的中点．

（1）求证：$\triangle ABM\cong\triangle DCM$；

（2）判断四边形 $MENF$ 是什么特殊四边形，并证明你的结论．



【答案】见试题解答内容

【解答】（1）证明：∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$AB=DC$，$\angle A=\angle D=90°$，

∵M 为 AD 中点，

∴$AM=DM$，

在$\triangle ABM$ 和$\triangle DCM$，

$$\begin{cases}AM=DM\\ \angle A=\angle D,\\ AB=CD\end{cases}$$

∴$\triangle ABM\cong\triangle DCM$（$SAS$）；

（2）四边形 $MENF$ 是菱形．

证明如下：∵N、E、F 分别是 BC、BM、CM 的中点，

∴$NE/\!/CM$，$NE=\frac{1}{2}CM$，$MF=\frac{1}{2}CM$，

∴$NE=FM$，$NE/\!/FM$，

∴四边形 $MENF$ 是平行四边形，

由（1）知$\triangle ABM\cong\triangle DCM$，

∴$BM=CM$，

∵E、F 分别是 BM、CM 的中点，

∴$ME=MF$，

∴平行四边形 $MENF$ 是菱形；

一十一．矩形的判定与性质（共 3 小题）

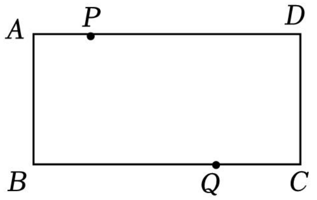
16．如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=6cm$，$AD=10cm$，点 P 在 AD 边上以每秒 $1cm$ 的速度从点 A 向点 D 运动，点 Q 在 BC 边上，以每秒 $4cm$ 的速度从点 C 出发，在 CB 之间往返运动，两个动点同时出发，当点 P 到达点 D 时停止（同时点 Q 也停止运动），设运动时间

为 t 秒（$t>0$）.

（1）用含 t 的式子表示线段的长度：PD=___（$10-t$）___cm，

（2）当 $0<t<2.5$ 时，运动时间 t 为 __2__秒时，以 A、P、Q、B 为顶点的四边形是矩形．

（3）当 $5<t<10$ 时，以 P、D、Q、B 为顶点的四边形有没可能是平行四边形？若有，请求出 t；若没有，请说明理由．



【答案】（1）（$10-t$）；

（2）2；

（3）以 P、D、Q、B 为顶点的四边形有可能是平行四边形，t 的值为$\frac{20}{3}$或 8．

【解答】解：（1）∵$AD=10$，$AP=t$，

∴$PD=10-t$，

故答案为：（$10-t$）．

（2）∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$AP\parallel BQ$，$\angle A=90°$，

∴当 $AP=BQ$ 时，四边形 $PABQ$ 是矩形，

当 $0<t<2.5$ 时，点 Q 从点 C 向点 B 运动，

∴$t=10-4t$，

解得 $t=2$，

故答案为：2．

（3）以 P、D、Q、B 为顶点的四边形有可能是平行四边形，

∵$PD\parallel BQ$，

∴当 $PD=BQ$ 时，四边形 $BPDQ$ 是平行四边形，

当 $5<t\leqslant 7.5$ 时，点 Q 从点 C 向点 B 运动，

由 $PD=BQ$ 得 $10-t=10\times 3-4t$，

解得 $t=\frac{20}{3}$；

当 $7.5<t<10$ 时，点 Q 从点 B 向点 C 运动，

由 $PD=BQ$ 得 $10-t=4t-10\times3$，

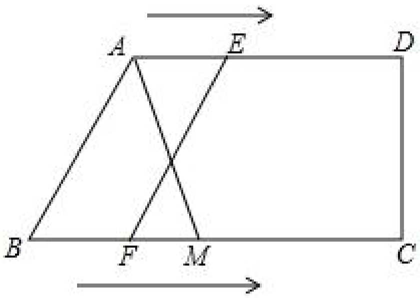
解得 $t=8$，

综上所述，t 的值为$\frac{20}{3}$或 8.

17. 在四边形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$BC\perp CD$，$AD=6cm$，$BC=10cm$，点 E 从 A 出发以 $1cm/s$ 的速度向 D 运动，点 F 从点 B 出发，以 $2cm/s$ 的速度向点 C 运动，当其中一点到达终点，而另一点也随之停止，设运动时间为 t，

（1）t 取何值时，四边形 $EFCD$ 为矩形？

（2）M 是 BC 上一点，且 $BM=4$，t 取何值时，以 A、M、E、F 为顶点的四边形是平行四边形？



【答案】见试题解答内容

【解答】解：（1）当 $DE=CF$ 时，四边形 $EFCD$ 为矩形，

则有 $6-t=10-2t$，解得 $t=4$，

答：$t=4s$ 时，四边形 $EFCD$ 为矩形.

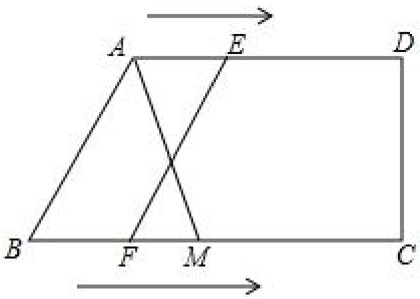
（2）①当点 F 在线段 BM 上，$AE=FM$ 时，以 A、M、E、F 为顶点的四边形是平行四边形，

则有 $t=4-2t$，解得 $t=\frac{4}{3}$，

②当 F 在线段 CM 上，$AE=FM$ 时，以 A、M、E、F 为顶点的四边形是平行四边形，

则有 $t=2t-4$，解得 $t=4$，

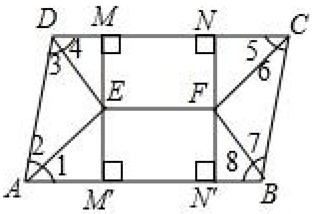
综上所述，$t=4$ 或$\frac{4}{3}s$ 时，以 A、M、E、F 为顶点的四边形是平行四边形.



18．如图，在▱$ABCD$ 中，$DC>AD$，四个角的平分线 AE，DE，BF，CF 的交点分别是 E，F，过点 E，F 分别作 DC 与 AB 间的垂线 MM'与 NN'，在 DC 与 AB 上的垂足分别是 M，N 与 M'，N'，连接 EF．

（1）求证：四边形 $EFNM$ 是矩形；

（2）已知：$AE=4$，$DE=3$，$DC=9$，求 EF 的长．



【答案】见试题解答内容

【解答】解：（1）证明：过点 E、F 分别作 AD、BC 的垂线，垂足分别是 G、H．

∵ $\angle 3=\angle 4$，$\angle 1=\angle 2$，$EG\perp AD$，$EM\perp CD$，$EM'\perp AB$

∴ $EG=ME$，$EG=EM'$

∴ $EG=ME=M'E=\frac{1}{2}MM'$

同理可证：$FH=NF=N'F=\frac{1}{2}NN'$

∵ $CD\parallel AB$，$MM'\perp CD$，$NN'\perp CD$，

∴ $MM'=NN'$

∴ $ME=NF=EG=FH$

又∵ $MM'\parallel NN'$，$MM'\perp CD$

∴四边形 $EFNM$ 是矩形．

（2）∵ $DC\parallel AB$，

∴ $\angle CDA+\angle DAB=180°$，

∵ $\angle 3=\frac{1}{2}\angle CDA$，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle DAB$

∴ $\angle 3+\angle 2=90°$

在 Rt△DEA，∵$AE=4$，$DE=3$，

∴$AD=\sqrt{3^2+4^2}=5$．

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴∠DAB=∠DCB，

又∵∠2=$\frac{1}{2}$∠DAB，∠5=$\frac{1}{2}$∠DCB，

∴∠2=∠5

由（1）知 $GE=NF$

在 Rt△GEA 和 Rt△CNF 中

$$\begin{cases}\angle 2=\angle 5\\ \angle EGA=\angle FNC=90^\circ\\ GE=NF\end{cases}$$

∴△GEA≌△CNF

∴$AG=CN$

在 Rt△DME 和 Rt△DGE 中

∵$DE=DE$，$ME=EG$

∴△DME≌△DGE

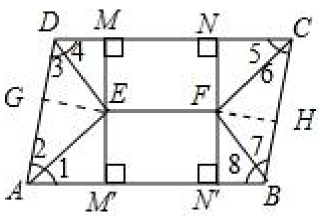
∴$DG=DM$

∴$DM+CN=DG+AG=AD=5$

∴$MN=CD-DM-CN=9-5=4$．

∵四边形 $EFNM$ 是矩形．

∴$EF=MN=4$

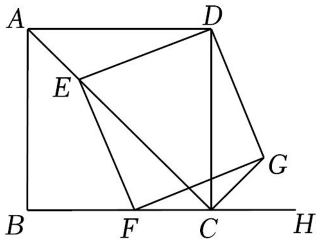


一十二．正方形的性质（共 10 小题）

19．如图，已知四边形 $ABCD$ 是正方形 $AB=2\sqrt{2}$，点 E 为对角线 AC 上一动点，连接 DE，过点 E 作 $EF\perp DE$，交射线 BC 于点 F，以 DE，EF 为邻边作矩形 $DEFG$，连 CG．

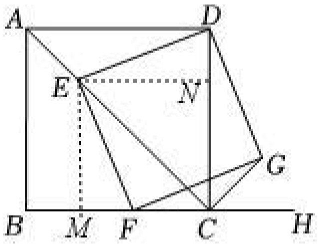
（1）求证：$DE=EF$；

（2）探究 $CE+CG$ 的值是否为定值，若是，请求出这个定值；若不是，请说明理由；



【答案】（1）见解析；（2）4．

【解答】（1）证明：如图，作 $EM \perp BC$，$EN \perp CD$



∴$\angle MEN = 90^\circ$，

∵点 E 是正方形 $ABCD$ 对角线上的点，

∴$EM = EN$，

∵$\angle DEF = 90^\circ$，

∴$\angle DEN = \angle MEF$，

在△DEN 和△FEM 中，

$$\begin{cases} \angle DNE = \angle FME \\ EN = EM \\ \angle DEN = \angle FEM \end{cases}，$$

∴△DEN≌△FEM（ASA），

∴$EF = DE$．

（2）解：$CE+CG$ 的值是定值，定值为 4．

理由：∵$EF = DE$．

∵四边形 $DEFG$ 是矩形，

∴矩形 $DEFG$ 是正方形；

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$DE = DG$，$AD = DC$，

∵$\angle CDG + \angle CDE = \angle ADE + \angle CDE = 90^\circ$，

∴$\angle CDG = \angle ADE$，

∴△ADE≌△CDG（SAS），

∴$AE = CG$．