

一、对表象及其变换的回顾(1)

1、表象及态在表象中的表示(1)

设 F 代表一组**力学量完全集**，即 $F = (\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_n)$
 ψ_k 是 F 的**共同本征函数**， k 一般代表一组量子数。

设 ϕ 是体系的一个量子态，根据**态叠加原理**，有：

$\phi = \sum_k a_k \psi_k$ (1) 称(1)式为态 ϕ 在 F 表象中的展开式。

其中： $a_k = (\psi_k, \phi) = \int d\tau \psi_k^* \phi = \int d\tau \psi_k^* \sum_k a_k \psi_k$ (2)

则列向量 $a = (a_k)_T$ 称为态 ϕ 在 F 表象中的表示。

一、对表象及其变换的回顾(2)

1、表象及态在表象中的表示(2)

例如：在 $(\hat{l}^2, \hat{l}_z)$ 表象中，基矢为 $\psi_k = Y_{lm}(\theta, \varphi)$ ，
当 $l=1$ 时， $m=1, 0, -1$ ，则 $\psi_1 = Y_{11}, \psi_2 = Y_{10}, \psi_3 = Y_{1-1}$ ，这样， $(\psi_k), k=1, 2, 3$ 就构成**一组正交完备的基矢**。

设 ϕ 为一量子态，则可以用 ψ_k 将 ϕ 展开。
$$\phi = \sum_{k=1}^3 a_k \psi_k$$

则列向量 $a = (a_k)^T, k=1, 2, 3$ 称为态 ϕ 在 $(\hat{l}^2, \hat{l}_z)$ **表象中的表示**。可以通过求解本征方程得到。

一、对表象及其变换的回顾 (3)

2、算符的矩阵表示在

F 表象中, 算符 $\hat{L}$ 可以表示成矩阵形式, 记为

$L = (L_{jk})$, 其中 $L_{jk} = (\psi_j, \hat{L} \psi_k)$, 为 $\hat{L}$ 在 F 表象中的表示。例如:

$$X = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, Z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

分别是 $\hat{l}_x$ 和 $\hat{l}_z$ 在 $(\hat{l}^2, \hat{l}_z)$ 表象中的矩阵表示。

一、对表象及其变换的回顾(4)

3、力学量的平均值

设 ψ_k 是 F 表象中的量子态 ϕ 和力学量算符 $\hat{L}$ 的矩阵表示分别为 $a = (a_k)_T$, $a_k = (\psi_k, \phi)$ 和 $L = (L_{jk})$

$L_{jk} = (\psi_j, \hat{L} \psi_k)$, 则该力学量在量子态 ϕ 中的平均值 $\bar{L}$ 表示为:

$$\bar{L} = (a_1^*, a_2^* \cdots) \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdot \\ L_{21} & L_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \end{pmatrix}, \bar{L} = a^+ L a$$

一、对表象及其变换的回顾 (5)

4、表象变换

在 F 表象中 $\phi = \sum_k a_k \psi_k$; 在 F' 表象中 $\phi = \sum_k a'_k \psi_k$

即列向量 $a = (a_k)^T$ 和 $a' = (a'_k)^T$ 分别是 ϕ 在 F 和 F' 表象中的表示, 则

$$a' = Sa \rightarrow \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \vdots \\ S_{21} & S_{22} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, S_{\alpha k} = (\psi'_\alpha, \psi_k)$$

即表象 F 和 F' 可以通过幺正矩阵 S 进行表象变换。

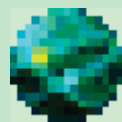
一、对表象及其变换的回顾(6)

5、本征方程

$$\hat{L}\psi = \lambda\psi \rightarrow La = \lambda a \rightarrow \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdot \\ L_{21} & L_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} L_{11} - \lambda & L_{12} & \cdot \\ L_{21} & L_{22} - \lambda & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \end{pmatrix} = 0 \text{ 有非零解的条件为:}$$

$$\begin{vmatrix} L_{11} - \lambda & L_{12} & \cdot \\ L_{21} & L_{22} - \lambda & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0 \text{ 久期方程, 可解出本征值 } \lambda$$



二、例题(1)

$Y_{lm}(\theta, \varphi)$ 是 $(\hat{l}^2, \hat{l}_z)$ 的共同本征函数。当 $l=1$ 时,

$m=1, 0, -1$, 得到一组正交归一完备 $(\psi_k), k=1, 2, 3$

其中: $\psi_1 = Y_{11} = -\tau \sin \theta e^{i\varphi}, \psi_2 = Y_{10} = \sigma \cos \theta, \psi_3 = Y_{1-1} = -\psi_1^*$

求: 1、 $(\hat{l}^2, \hat{l}_z)$ 表象中, $\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z$ 和 $\hat{l}^2$ 的表示; ✓

2、 $(\hat{l}^2, \hat{l}_z)$ 表象中, $(\hat{l}^2, \hat{l}_y)$ 的共同本征函数 ϕ ;

3、写出联系 $(\hat{l}^2, \hat{l}_z)$ 表象和 $(\hat{l}^2, \hat{l}_y)$ 表象的么正变换矩阵

二、例题(2)

1、 $(\hat{l}^2, l_z)$ 表象中, l_x, l_y, l_z 和 $\hat{l}^2$ 的表示

$\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z$ 和 $\hat{l}^2$ 在 $(\hat{l}^2, \hat{l}_z)$ 表象中能够用一个 3×3 的矩阵表示, 设为 X, Y, Z, L , 已求得:

$$X = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad L = 2\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

二、例题(3)

2、 $(\hat{l}^2, \hat{l}_z)$ 表象中, $(\hat{l}^2, \hat{l}_y)$ 的共同本征函数 ϕ (1)

将 $(\hat{l}^2, \hat{l}_y)$ 的共同本征函数 ϕ 用 $(\hat{l}^2, \hat{l}_z)$ 表象中的基矢

展开, 即: $\phi = a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2 + a_3 \psi_3 = a_1 Y_{11} + a_2 Y_{10} + a_3 Y_{1-1}$ 其

中列向量 $a = (a_1, a_2, a_3)^T$ 就是 ϕ 在 $(\hat{l}^2, \hat{l}_z)$ 表象中的表示,

满足本征方程: $Y a = \lambda a$ 其中 Y 为 $\hat{l}_y$ 在 $(\hat{l}^2, \hat{l}_z)$ 表象中的

矩阵表示。

$$\frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \lambda \hbar \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\lambda & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$$

二、例题(4)

2、 $(\hat{l}^2, \hat{l}_z)$ 表象中, $(\hat{l}^2, \hat{l}_y)$ 的共同本征函数 ϕ (2)

$$\begin{aligned} \text{久期方程写为} \quad & \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\lambda & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= -1 \end{aligned} \\ \lambda_2 = 0 \Rightarrow & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a_2 = 0, a_1 = a_3 \end{aligned}$$

二、例题(5)

2、 $(\hat{l}^2, \hat{l}_z)$ 表象中, $(\hat{l}^2, \hat{l}_y)$ 的共同本征函数 ϕ (3)

对 $\lambda = \lambda_2 = 0$, 在 $(\hat{l}^2, \hat{l}_z)$ 表象中, $(\hat{l}^2, \hat{l}_y)$ 的共同本征函数为: $\phi = a_1 Y_{11} + a_3 Y_{1-1} = a_1 (Y_{11} + Y_{1-1})$, 由归一化条件有:

$$1 = \int d\tau \phi^* \phi = |a_1|^2 \int d\tau (|Y_{11}|^2 + |Y_{1-1}|^2 + Y_{11}^* Y_{1-1} + Y_{1-1}^* Y_{11}) = 2|a_1|^2$$

取 a_1 为实数, 有: $a_1 = 1/\sqrt{2}$

所以对 $\lambda_2 = 0, \phi = a_1 Y_{11} + a_3 Y_{1-1} = 1/\sqrt{2} (Y_{11} + Y_{1-1}) = \phi_{10}$

同理可得:

$$\lambda_1 = 1, \phi = \frac{1}{2} Y_{11} + \frac{i}{\sqrt{2}} Y_{10} - \frac{1}{2} Y_{1-1} = \phi_{11}$$

$$\lambda_3 = -1, \phi = \frac{1}{2} Y_{11} - \frac{i}{\sqrt{2}} Y_{10} - \frac{1}{2} Y_{1-1} = \phi_{1-1}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/498032134013006123>