

北师大附属实验中学 2023—2024 学年度第一学期期中试卷

高二年级数学

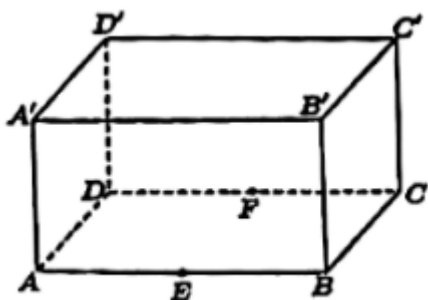
班级_____姓名_____学号_____成绩_____

考	1. 本试卷共 4 页，共五道大题，24 道小题，答题卡共 8 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟.
生	2. 在试卷和答题卡上准确填写班级、姓名、学号.
须	3. 试卷答案一律填写在答题卡上，在试卷上作答无效.
知	4. 在答题卡上，选择题须用 2B 铅笔将选中项涂黑涂满，其他试题用黑色字迹签字笔作答.
	命题人：黎宁 张涛 唐娟 审题人：黎栋材

第 I 卷（共 100 分）

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

1. 如图， E, F 分别是长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱 AB, CD 的中点，则 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CF}$ 等于（ ）



- A. $\overrightarrow{AD'}$ B. $\overrightarrow{AC'}$ C. $\overrightarrow{DE}$ D. $\overrightarrow{AE}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据向量加法，减法的几何意义及相等向量的定义进行化简即可.

【详解】解： $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$ ，所以 D 正确，A，B，C 错误.

故选：D

2. 直线 $x + \sqrt{3}y - 1 = 0$ 的倾斜角为

- A. 30° B. 60° C. 120° D. 150°

【答案】D

北师大附属实验中学 2023—2024 学年度第一学期期中试卷

高二年级数学

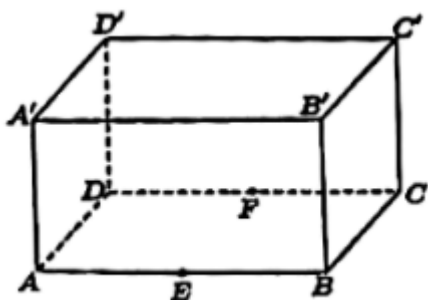
班级_____姓名_____学号_____成绩_____

考	1. 本试卷共 4 页，共五道大题，24 道小题，答题卡共 8 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟.
生	2. 在试卷和答题卡上准确填写班级、姓名、学号.
须	3. 试卷答案一律填写在答题卡上，在试卷上作答无效.
知	4. 在答题卡上，选择题须用 2B 铅笔将选中项涂黑涂满，其他试题用黑色字迹签字笔作答.
	命题人：黎宁 张涛 唐娟 审题人：黎栋材

第 I 卷（共 100 分）

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

1. 如图， E, F 分别是长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱 AB, CD 的中点，则 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CF}$ 等于（ ）



- A. $\overrightarrow{AD'}$ B. $\overrightarrow{AC'}$ C. $\overrightarrow{DE}$ D. $\overrightarrow{AE}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据向量加法，减法的几何意义及相等向量的定义进行化简即可.

【详解】解： $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$ ，所以 D 正确，A，B，C 错误.

故选：D

2. 直线 $x + \sqrt{3}y - 1 = 0$ 的倾斜角为

- A. 30° B. 60° C. 120° D. 150°

【答案】D

【解析】

【分析】求出斜率，根据斜率与倾斜角关系，即可求解.

【详解】 $x + \sqrt{3}y - 1 = 0$ 化为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$,

直线的斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, 倾斜角为 150° .

故选:D.

【点睛】本题考查直线方程一般式化为斜截式, 求直线的斜率、倾斜角, 属于基础题.

3. 抛物线 $x^2 = ay$ 的焦点坐标为 $(0, 1)$, 则其准线方程为 ()

A. $x = -1$

B. $x = 1$

C. $y = -1$

D. $y = 1$

【答案】C

【解析】

【分析】利用抛物线的标准方程及性质计算即可.

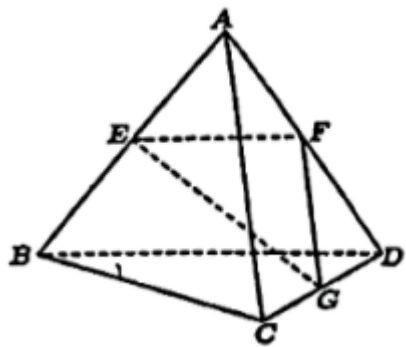
【详解】由题意可知该抛物线开口向上,

又焦点坐标为 $(0, 1)$, 所以准线方程为 $y = -1$.

故选: C

4. 如图, 已知四面体 $ABCD$ 的所有棱长都等于 a , E, F, G 分别是棱 AB, AD, DC 的中点. 则

$\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BC}$ 分别等于 ()



A. $-\frac{a^2}{2}$ 和 $\frac{a^2}{4}$

B. $\frac{a^2}{2}$ 和 $-\frac{a^2}{4}$

C. $\frac{a^2}{2}$ 和 $\frac{a^2}{4}$

D. $-\frac{a^2}{2}$ 和 $\frac{a^2}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】依题意以 $\overrightarrow{AC}$ 、 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AD}$ 为基底，表示出 $\overrightarrow{GF}$ 、 $\overrightarrow{EF}$ 、 $\overrightarrow{BC}$ ，再根据数量积的运算律计算可得.

【详解】依题意 $\overrightarrow{GF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ，所以 $\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}a^2$ ，

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$= -\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ + \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ - \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cos 60^\circ$$

$$= -\frac{1}{2}a^2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}a^2.$$

故选：A

5. 设椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的两个焦点为 F_1 ， F_2 ，过点 F_1 的直线交椭圆于 A 、 B 两点，如果 $|AB| = 8$ ，那么

$|AF_2| + |BF_2|$ 的值为 ()

A. 2

B. 10

C. 12

D. 14

【答案】C

【解析】

【分析】根据已知条件，由椭圆定义知： $|AB| + |AF_2| + |BF_2| = 4a$ ，由此能求出结果.

【详解】解：椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 中， $a = 5$ ，

$Q F_1$ ， F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的两个焦点，过 F_1 的直线交椭圆于 A ， B 两点，

$\therefore$ 由椭圆定义知： $|AB| + |AF_2| + |BF_2| = 4a = 20$ ，

$Q |AB| = 8$ ，

$\therefore |AF_2| + |BF_2| = 20 - 8 = 12$.

故选：C.

6. 抛物线 $y^2 = 4x$ 上的点与其焦点的距离的最小值为 ()

A. 4

B. 2

C. 1

D. $\frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】

结合抛物线的定义，可将抛物线上的点到焦点的距离转化为到准线的距离，进而可求出最小值.

【详解】由题意，抛物线的焦点 $F(1,0)$ ，准线为 $x=-1$ ，设抛物线上的动点 $P(x_0, y_0)$ ，

根据抛物线的定义可知， $|PF|=1+x_0$ ，

因为 $x_0 \in [0, +\infty)$ ，所以 $|PF|=1+x_0 \geq 1$ ，

故抛物线 $y^2=4x$ 上的点与其焦点的距离的最小值为 1.

故选：C.

【点睛】本题考查抛物线的定义的应用，考查抛物线的性质，属于基础题.

7. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的焦点 $F(3,0)$ 到其渐近线的距离为 $\sqrt{5}$ ，则双曲线的方程为 ()

A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

B. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

C. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$

D. $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$

【答案】A

【解析】

【分析】由题意列方程组，解出 a^2, b^2 ，即可求解.

【详解】双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一条渐近线为 $y = \frac{b}{a}x$ ，所以 $\frac{|3b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{5}$.

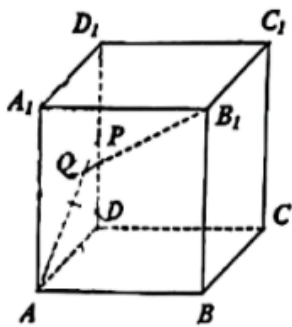
又有 $c = \sqrt{a^2+b^2} = 3$ ，解得： $a^2 = 4, b^2 = 5$ ，

所以双曲线的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

故选：A

8. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 为棱 DD_1 的中点，点 Q 为面 ADD_1A_1 内一点， $B_1Q \perp AP$ ，

则 ()



A. $S_{\triangle A_1D_1Q} = 2S_{\triangle A_1AQ}$

B. $2S_{\triangle A_1D_1Q} = S_{\triangle A_1AQ}$

C. $2S_{\triangle A_1D_1Q} = 3S_{\triangle A_1AQ}$

D. $3S_{\triangle A_1D_1Q} = 2S_{\triangle A_1AQ}$

【答案】A

【解析】

【分析】以点 D 为原点建立空间直角坐标系，不妨设正方体的棱长为 2，设 $Q(x, 0, z)$ ，根据 $B_1Q \perp AP$ 求出 x, z 的关系，然后可求出点 Q 到直线 AA_1 和直线 A_1D_1 的距离，进而可得出答案.

【详解】如图，以点 D 为原点建立空间直角坐标系，不妨设正方体的棱长为 2，

则 $A(2, 0, 0), B_1(2, 2, 2), P(0, 0, 1)$ ，设 $Q(x, 0, z)$ ，

故 $\vec{AP} = (-2, 0, 1), \vec{B_1Q} = (x-2, -2, z-2)$ ，

因为 $B_1Q \perp AP$ ，

所以 $\vec{AP} \cdot \vec{B_1Q} = -2(x-2) + (z-2) = 0$ ，即 $z = 2x - 2$ ，

所以 $Q(x, 0, 2x-2)$ ，

则点 Q 到直线 AA_1 的距离为 $|2-x|$ ，

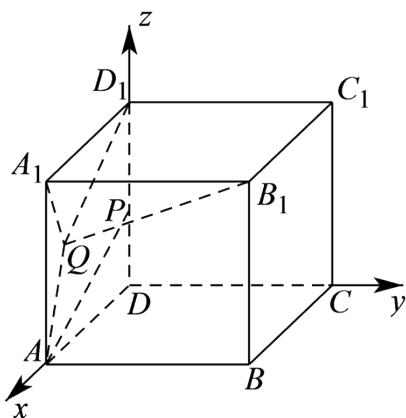
点 Q 到直线 A_1D_1 的距离为 $|2-(2x-2)| = 2|2-x|$ ，

所以 $x \neq 2$ ，

故 $S_{\triangle A_1D_1Q} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2|2-x| = 2|2-x|$ ， $S_{\triangle A_1AQ} = \frac{1}{2} \times 2 \times |2-x| = |2-x|$ ，

所以 $S_{\triangle A_1D_1Q} = 2S_{\triangle A_1AQ}$ 。

故选：A



【点睛】关键点点睛：以点 D 为原点建立空间直角坐标系，设 $Q(x, 0, z)$ ，根据 $B_1Q \perp AP$ 求出 x, z 的关系，是解决本题的关键。

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

9. 经过点 $(3, a)$ ， $(-2, 0)$ 的直线与直线 $x - 2y + 3 = 0$ 垂直，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 -10

【解析】

【分析】根据题意，由两直线垂直列出斜率的方程计算，即可得到结果。

【详解】因为经过点 $(3, a)$ ， $(-2, 0)$ 的直线与直线 $x - 2y + 3 = 0$ 垂直，

$$\text{则 } \frac{a}{3+2} \times \frac{1}{2} = -1, \text{ 解得 } a = -10.$$

故答案为： -10

10. 已知平面 α 的法向量为 $(2, -4, -2)$ ，平面 β 的法向量为 $(-1, 2, k)$ ，若 $\alpha // \beta$ ，则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 1

【解析】

【分析】根据 $\alpha // \beta$ ，可得两平面的法向量共线，再根据空间向量的共线定理即可得解。

【详解】因为 $\alpha // \beta$ ，

所以两平面的法向量共线，

所以存在唯一实数 λ ，使得 $(-1, 2, k) = \lambda(2, -4, -2)$ ，

$$\text{所以 } \begin{cases} -1 = 2\lambda \\ 2 = -4\lambda \\ k = -2\lambda \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ k = 1 \end{cases},$$

所以 $k=1$.

故答案为: 1.

11. 已知两圆 $C_1: x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$ 和 $C_2: x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$ 相交, 则圆 C_1 与圆 C_2 的公共弦所在直线的方程为_____.

【答案】 $2x+1=0$

【解析】

【分析】 将两圆的方程相减即可得解.

【详解】 将两圆的方程相减得 $2x+1=0$,

即圆 C_1 与圆 C_2 的公共弦所在直线的方程为 $2x+1=0$.

故答案为: $2x+1=0$.

12. 设 $\vec{v}_1 = (1, 2, -2)$, $\vec{v}_2 = (-2, 3, 2)$ 分别是空间两直线 l_1, l_2 的方向向量, 则直线 l_1, l_2 所成角的大小为_____.

【答案】 $\frac{\pi}{2}$

【解析】

【分析】 根据空间向量的坐标运算结合直线的位置关系分析求解.

【详解】 因为 $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 1 \times (-2) + 2 \times 3 + (-2) \times 2 = 0$,

可知 $l_1 \perp l_2$, 所以直线 l_1, l_2 所成角的大小为 $\frac{\pi}{2}$.

故答案为: $\frac{\pi}{2}$.

13. 已知 $P(2, 3)$ 是直线 l 上一点, 且 $\vec{n} = (1, -2)$ 是直线 l 的一个法向量, 则直线 l 的方程为_____.

【答案】 $x-2y+4=0$

【解析】

【分析】 由直线的法向量可求得直线的斜率, 再由点斜式方程可得解.

【详解】 因为 $\vec{n} = (1, -2)$ 是直线 l 的法向量,

所以直线 l 的斜率 $k = \frac{1}{2}$,

又点 $P(2, 3)$ 是直线 l 上点, 所以直线 l 的方程为 $y-3 = \frac{1}{2}(x-2)$,

整理得 $x-2y+4=0$.

故答案为: $x-2y+4=0$.

14. 设点 F_1, F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左, 右焦点, 点 P 是椭圆 C 上任意一点, 若使得

$\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = m$ 成立的点恰好是 4 个, 则实数 m 的一个取值可以为_____.

【答案】0 (答案不唯一)

【解析】

【分析】当 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$ 时, 说明椭圆上存在 4 点满足条件.

【详解】当 $m=0$ 时, $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$, 则 $\overrightarrow{PF_1} \perp \overrightarrow{PF_2}$,

由椭圆方程可知, $a^2=4, b^2=1, c^2=3$, 因为 $c>b$, 所以以 F_1F_2 为直径的圆与椭圆有 4 个交点, 使

得 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$ 成立的点恰好有 4 个, 所以实数 m 的一个取值可以为 0.

故答案为: 0 (答案不唯一)

三、解答题 (本大题共 3 小题, 共 30 分)

15. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点 $A(8,5), B(4,-2), C(-6,3)$, 求经过两边 AB 和 AC 的中点的直线的方程.

【答案】 $x+2y-9=0$

【解析】

【分析】首先求得中点坐标, 再根据直线的两点式方程求解即可.

【详解】设 AB 和 AC 的中点分别为 D, E ,

因为 $A(8,5), B(4,-2), C(-6,3)$,

所以 $D(6, \frac{3}{2}), E(1,4)$

所以直线 DE 的方程为: $\frac{y-4}{x-1} = \frac{\frac{3}{2}-4}{6-1}$,

整理得: $x+2y-9=0$,

经过两边 AB 和 AC 的中点的直线的方程为 $x+2y-9=0$.

16. 已知直线 $l: x+my-3=0$ 与圆 $C: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$.

(1) 若直线 l 与圆 C 相切, 求实数 m 的值;

(2) 当 $m = -2$ 时, 直线 l 与圆 C 交于点 E, F , 设 O 为原点, 求 $S_{\triangle EOF}$ 的面积.

【答案】(1) $m = \frac{4}{3}$

(2) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】(1) 根据圆心到直线的距离等于半径即可求解;

(2) 求出弦长 EF 及原点到直线的距离, 结合三角形面积公式即可求解.

【小问 1 详解】

由圆 $C: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$, 得圆心 $C(2, -3), r = 3$,

又直线 l 与圆 C 相切, 则圆心到直线的距离 $d = \frac{|2-3m-3|}{\sqrt{1+m^2}} = 3$, 解得 $m = \frac{4}{3}$

【小问 2 详解】

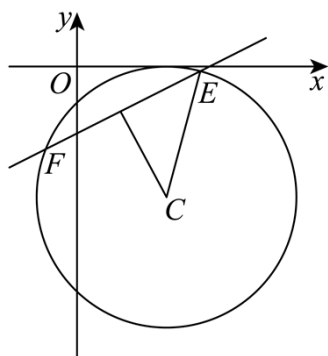
当 $m = -2$, 直线 $l: x - 2y - 3 = 0$,

则圆心到直线的距离为 $d_1 = \frac{|2+6-3|}{\sqrt{1+4}} = \sqrt{5}$,

则弦长 $EF = 2\sqrt{r^2 - d_1^2} = 2\sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = 4$,

原点到直线的距离为 $d_2 = \frac{|-3|}{\sqrt{1+4}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$,

则 $S_{\triangle EOF} = \frac{1}{2} \cdot |EF| \cdot d_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$.



17. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $PD = DC = 1$, $AD = 2$, M 为 BC 的中点.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/498066063135006117>