第 10 讲 用配方法求解一元二次方程

模块导航

模块一　思维导图串知识
模块二　基础知识全梳理（吃透教材）
模块三　核心考点举一反三
模块四　小试牛刀过关测

素养目标

1．会用直接开平方法解形如$(x+m)^2=n(n>0)$的方程；
2．会用配方法解一元二次方程进行配方及求解；
3．能够熟练地、灵活地应用配方法解一元二次方程.

模块一 思维导图串知识



模块二 基础知识全梳理

知识点一、直接开方法解一元二次方程：

(1)直接开方法解一元二次方程：利用平方根的定义直接开平方求一元二次方程的解的方法称为直接开平方法.

(2)直接开平方法的理论依据：平方根的定义.

(3)能用直接开平方法解一元二次方程的类型有两类：

①形如关于 x 的一元二次方程$x^2=a$，可直接开平方求解.

若$a>0$，则$x=\pm\sqrt{a}$；表示为$x_1=\sqrt{a}$，$x_2=-\sqrt{a}$，有两个不等实数根；

若$a=0$，则 x=0；表示为$x_1=x_2=0$，有两个相等的实数根；

若$a<0$，则方程无实数根.

②形如关于 x 的一元二次方程$(ax+n)^2=m(a\neq 0,\ m\geq 0)$，可直接开平方求解，两根是$x_1=\dfrac{-n+\sqrt{m}}{a}$，$x_2=\dfrac{-n-\sqrt{m}}{a}$.

要点：用直接开平方法解一元二次方程的理论依据是平方根的定义，应用时应把方程化成左边是含未知数的完全平方式，右边是非负数的形式，就可以直接开平方求这个方程的根.

知识点二、配方法解一元二次方程：

(1)配方法解一元二次方程：将一元二次方程配成$(x+n)^2=p(p\geq 0)$的形式，再利用直接开平方法求解，这种解一元二次方程的方法叫配方法.

(2)配方法解一元二次方程的理论依据是公式：$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$.

(3)用配方法解一元二次方程的一般步骤：

①把原方程化为$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的形式；

②将常数项移到方程的右边；方程两边同时除以二次项的系数，将二次项系数化为 1；

③方程两边同时加上一次项系数一半的平方；

④再把方程左边配成一个完全平方式，右边化为一个常数；

⑤若方程右边是非负数，则两边直接开平方，求出方程的解；若右边是一个负数，则判定此方程无实数解.

要点：（1）配方法解一元二次方程的口诀：一除二移三配四开方；

（2）配方法关键的一步是“配方”，即在方程两边都加上一次项系数一半的平方.

（3）配方法的理论依据是完全平方公式$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$.

知识点三、配方法的应用

1．用于比较大小：在比较大小中的应用，通过作差法最后拆项或添项、配成完全平方，使此差大于零（或小于零）而比较出大小.

2．用于求待定字母的值：配方法在求值中的应用，将原等式右边变为 0，左边配成完全平方式后，再运用非负数的性质求出待定字母的取值.

3．用于求最值：“配方法”在求最大（小）值时的应用，将原式化成一个完全平方式后可求出最值.

4．用于证明：“配方法”在代数证明中有着广泛的应用，我们学习二次函数后还会知道“配方法”在二次函数中也有着广泛的应用.

模块三 核心考点举一反三

考点一：直接开平方法解一元二次方程

例 1．（2024 八年级下·浙江·专题练习）解方程：

(1) $x^2-49=0$；　　(2) $2(x+1)^2-49=1$.

【答案】(1) $x_1=7$，$x_2=-7$

(2) $x_1=4$，$x_2=-6$

【分析】本题考查解一元二次方程：

（1）利用直接开平方法求解；

（2）先移项，再利用直接开平方法求解.

【详解】（1）解：$x^2-49=0$，

$x^2=49$，

$\therefore x=\pm7$，

$\therefore x_1=7$，$x_2=-7$；

（2）解：$2(x+1)^2-49=1$，

$(x+1)^2=25$，

$\therefore x+1=\pm5$，

$\therefore x_1=4$，$x_2=-6$.

【变式 1-1】（23-24 九年级上·广西柳州·期中）解方程：$(x+1)^2=9$.

【答案】$x_1=2$，$x_2=-4$

【分析】本题主要考查解一元二次方程，解一元二次方程常用的方法有：直接开平方法、因式分解法、公式法及配方法，解题的关键是根据方程的特点选择简便的方法．利用直接开平方法求解即可.

【详解】解：$x+1=\pm3$

$x+1=3$ 或 $x+1=-3$

$\therefore x_1=2$，$x_2=-4$.

【变式 1-2】（24-25 八年级上·全国·课后作业）求 x 的值：$4(x-1)^2=16$.

【答案】$x=3$ 或 $x=-1$

【分析】本题考查了解一元二次方程—直接开平方法，解题的关键是熟练掌握平方根的定义，

方程两边同时除以 4，再利用平方根的定义即可求解；

【详解】解：$\because 4(x-1)^2=16$

$\therefore (x-1)^2=4$

$\therefore x-1=2$ 或 $x-1=-2$，

解得 $x=3$ 或 $x=-1$.

【变式 1-3】（23-24 八年级下·全国·假期作业）用直接开平方法解下列方程：

(1) $9(x-1)^2-4=0$；　　(2) $(2x-1)^2=5$.

【答案】(1) $x_1=\dfrac{5}{3}$，$x_2=\dfrac{1}{3}$

(2) $x_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

【分析】本题考查的是用直接开平方法解一元二次方程．若$x^2=a(a\geq 0)$，则$x=\pm\sqrt{a}$．

（1）移项，得$9(x-1)^2=4$．

两边同除以 9，得$(x-1)^2=\frac{4}{9}$．

两边同时开平方，得$x-1=\frac{2}{3}$或$x-1=-\frac{2}{3}$，

$\therefore x_1=\frac{5}{3}$，$x_2=\frac{1}{3}$．

（2）直接开平方，得

$2x-1=\sqrt{5}$或$2x-1=-\sqrt{5}$，

$\therefore x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$．

考点二：直接开平方法解一元二次方程的条件

例 2.（23-24 九年级上·四川达州·期中）已知一元二次方程$mx^2+n=0(m\neq 0)$，若方程有解，则必须（　　）

A．$n=0$　　B．m,n同号　　C．n是m的整数倍　　D．m,n异号

【答案】D

【分析】此题主要考查了直接开平方法解一元二次方程，由$mx^2+n=0$移项得$mx^2=-n$，再两边同时除以m，可得$x^2=-\frac{n}{m}$，再根据偶次幂的非负性可得mn异号，解题的关键是把所含未知数的项移到等号的左边，把常数项移项等号的右边，化成$x^2=a(a\geq 0)$的形式，利用数的开方直接求解．

【详解】解：$mx^2+n=0$，

则$mx^2=-n$，

$\because m\neq 0$，

$\therefore x^2=-\frac{n}{m}$，

$\because x^2\geq 0$，$mn\neq 0$，

$\therefore mn$为异号，

故选：D．

【变式 2-1】（23-24 九年级上·四川成都·期末）若关于x的方程$(x-2)^2=m+1$有实数根，则m的取值范围是（　　）

A．$m>1$　　B．$m>-1$　　C．$m\geq 1$　　D．$m\geq -1$

【答案】D

【分析】本题考查的是一元二次方程的解法——直接开平方法，根据偶次方的非负性解答即可．熟记偶次方的非负性是解题的关键．

【详解】解：∵关于 x 的方程 $(x-2)^2=m+1$ 有实数根，

$\therefore m+1\geq 0$，

解得：$m\geq -1$，

故选：D．

【变式 2-2】（23-24 九年级上·广东汕头·期末）下列方程能用直接开平方法求解的是(　　)

A．$x^2-4x+1=0$　　B．$x^2-2x-1=0$　　C．$x^2-4x=0$　　D．$x^2-4=0$

【答案】D

【分析】本题考查一元二次方程的解法- 直接开方法，解题的关键是掌握直接开方法．形如 $(x+a)^2=b(b\geq 0)$ 的方程均可采用直接开方法进行解答，据此判断即可．

【详解】解：选项 A，B，C 方程左边均不能化为完全平方式，故选项 A，B，C 不能用直接开平方法求解；由 $x^2-4=0$ 得 $x^2=4$，故选项 D 能用直接开平方法求解．

故选：D．

【变式 2-3】（23-24 九年级上·江苏南京·阶段练习）一元二次方程 $(x-5)^2+1=0$ 的根的情况是（　）

A．有一个实数根　　B．有两个相等的实数根

C．有两个不相等的实数根　　D．没有实数根

【答案】D

【分析】将常数项移到等号的右边，利用平方的非负性即可进行判断．

【详解】解：将原方程可变形为：$(x-5)^2=-1$，

$\because (x-5)^2\geq 0$，

∴原方程没有实数根，

故选：D．

【点睛】本题考查一元二次方程根的情况．利用平方的非负性进行判断是解决此题的简便方法．

考点三：直接开平方法解一元二次方程的复合型

例 3.（23-24 九年级上·江西萍乡·期末）解方程：$(3x-1)^2=4(2x+3)^2$

【答案】$x_1=-\frac{5}{7}$，$x_2=-7$

【分析】本题考查了解一元二次方程－直接开平方法．开平方求出 $3x-1$ 的值，然后求出 x 的值即可．

【详解】解：$(3x-1)^2=4(2x+3)^2$，

$\therefore 3x-1=\pm 2(2x+3)$，

则$3x-1=-4x-6$或$3x-1=4x+6$，

解得$x_1=-\frac{5}{7}$，$x_2=-7$.

【变式 3-1】（23-24 九年级上·吉林白山·期末）用适当的方法解方程：$(3x-1)^2=(x-1)^2$

【答案】$x_1=0$，$x_2=\frac{1}{2}$.

【分析】本题考查一元二次方程的解法，熟知方程特点选择适当的解法是正确解决本题的关键，用直接开平方法或因式分解法都可以.

【详解】解：$(3x-1)^2=(x-1)^2$

开方得，$3x-1=x-1$或$3x-1=-(x-1)$

解得$x_1=0$，$x_2=\frac{1}{2}$.

【变式 3-2】（23-24 九年级上·江苏常州·期中）解方程：$9x^2-(x-1)^2=0$.

【答案】$x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{1}{4}$

【分析】本题考查了一元二次方程的解法，熟练掌握直接开平方法解一元二次方程是解题的关键.

【详解】$\because 9x^2-(x-1)^2=0$，

$\therefore 9x^2=(x-1)^2$，

$\therefore x-1=3x$或$x-1=-3x$，

解得$x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{1}{4}$.

【变式 3-3】（23-24 九年级上·安徽芜湖·期中）用适当的方法解方程：$(x-3)^2=(2x+5)^2$

【答案】$x_1=-8$，$x_2=-\frac{2}{3}$

【分析】本题考查一元二次方程的解法，根据方程的特点选择恰当解法是解题的关键．直接用开平方法求解即可.

【详解】解：原式直接开方得，$x-3=\pm(2x+5)$，

$x-3=2x+5$或$x-3=-(2x+5)$，

∴原方程的解为：$x_1=-8$，$x_2=-\frac{2}{3}$.

考点四：用配方法配二次项系数为 1 的一元二次方程

例 4.（23-24 八年级下·浙江金华·期中）用配方法解一元二次方程$x^2-2x=1$，配方后得到的方程是（　）

A．$(x-1)^2=2$　　B．$(x+1)^2=2$　　C．$(x+1)^2=0$　　D．$(x-1)^2=0$

【答案】A

【分析】本题考查了配方法解一元二次方程，将方程两边同时加上一次项系数一半的平方，再写成完全平方式即可得出答案.

【详解】解：∵$x^2-2x=1$，

∴$x^2-2x+1=1+1$，即$(x-1)^2=2$，

故选：A.

【变式 4-1】（2024·山西阳泉·三模）用配方法解一元二次方程$x^2-8x+10=0$配方后得到的方程是（　）

A．$(x+8)^2=54$　　B．$(x-8)^2=54$

C．$(x+4)^2=6$　　D．$(x-4)^2=6$

【答案】D

【分析】本题主要考查了一元二次方程的配方法．把常数项移到等式右边后，利用完全平方公式配方得到结果，即可做出判断.

【详解】解：$x^2-8x+10=0$，

移项得：$x^2-8x=-10$，

配方得：$x^2-8x+16=-10+16$，

整理得：$(x-4)^2=6$，

故选：D.

【变式 4-2】（23-24 八年级下·广西百色·期中）用配方法解方程$x^2-6x-1=0$时，配方结果正确的是（　）

A．$(x-3)^2=9$　　B．$(x-3)^2=10$　　C．$(x+3)^2=8$　　D．$(x-3)^2=8$

【答案】B

【分析】此题考查了配方法求解一元二次方程，解题的关键是掌握配方法求解一元二次方程的步骤．根据配方法的步骤，求解即可.

【详解】解：$x^2-6x-1=0$

移项得：$x^2-6x=1$

配方得：$x^2-6x+9=1+9$

即$(x-3)^2=10$

故选：B

【变式 4-3】（23-24 八年级下·广西百色·期中）用配方法解方程$x^2+4x-1=0$时，配方结果正确的是（　）

A．$(x+2)^2=5$　　B．$(x-2)^2=5$　　C．$(x-2)^2=3$　　D．$x(x+2)^2=3$

【答案】A

【分析】本题考查了配方法解一元二次方程，将常数项移到方程的右边，两边都加上一次项系数一半的平方配成完全平方式后即可得出答案.

【详解】解：$\because x^2+4x-1=0$，

$\therefore x^2+4x=1$，

$\therefore x^2+4x+4=1+4$，即$(x+2)^2=5$，

故选：A.

考点五：用配方法解二次项系数为 1 的一元二次方程

例 5. （2024·广东东莞·模拟预测）解方程：$x^2-2x=4$

【答案】$x_1=1+\sqrt{5}$，$x_2=1-\sqrt{5}$

【分析】本题考查了解一元二次方程-配方法：将一元二次方程配成$(x+m)^2=n$的形式，再利用直接开平方法求解，这种解一元二次方程的方法叫配方法．利用配方法得到$(x-1)^2=5$，然后利用直接开平方法解方程.

【详解】解：$x^2-2x=4$

$x^2-2x+1=4+1$，

$(x-1)^2=5$，

$x-1=\pm\sqrt{5}$，

$\therefore x_1=1+\sqrt{5}$，$x_2=1-\sqrt{5}$.

【变式 5-1】（23-24 八年级下·安徽安庆·阶段练习）解方程：$x^2+3x-4=0$（用配方法）

【答案】$x_1=1,x_2=-4$

【分析】此题考查了配方法解一元二次方程，把方程变形为$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$，开平方得到$x+\frac{3}{2}=\pm\frac{5}{2}$，解一元一次方程即可得到答案.

【详解】解：$x^2+3x-4=0$

$\therefore x^2+3x=4$

则$x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=4+\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$\therefore\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$

开平方得，$x+\frac{3}{2}=\pm\frac{5}{2}$

解得$x_1=1,x_2=-4$

【变式 5-2】（2024·甘肃陇南·一模）解方程：$x^2-14x+21=0$.

【答案】$x_1=7+2\sqrt{7}$，$x_2=7-2\sqrt{7}$

【分析】本题主要考查了解一元二次方程，直接利用配方法解方程即可.

【详解】解：$x^2-14x+21=0$，

$x^2-14x=-21$

$x^2-14x+49=28$

$(x-7)^2=28$

$x-7=\pm2\sqrt{7}$，

解得$x_1=7+2\sqrt{7}$，$x_2=7-2\sqrt{7}$.

【变式 5-3】（23-24 八年级上·上海青浦·期中）用配方法解方程：$x^2-2\sqrt{2}x-4=0$

【答案】$x_1=\sqrt{2}+\sqrt{6}$，$x_2=\sqrt{2}-\sqrt{6}$

【分析】本题考查了解一元二次方程-配方法：将一元二次方程配成$(x+m)^2=n$的形式，再利用直接开平方法求解，这种解一元二次方程的方法叫配方法.

移项，然后两边都加上一次项系数的一半的平方，再根据完全平方公式整理，然后求解即可.

【详解】解：移项得，$x^2-2\sqrt{2}x=4$，

配方得，$x^2-2\sqrt{2}x+2=4+2$，

即$(x-\sqrt{2})^2=6$，

$x-\sqrt{2}=\pm\sqrt{6}$，

$x_1=\sqrt{2}+\sqrt{6}$，$x_2=\sqrt{2}-\sqrt{6}$.

∴方程的解为$x_1=\sqrt{2}+\sqrt{6}$，$x_2=\sqrt{2}-\sqrt{6}$.

考点六：用配方法配二次项系数不为 1 的一元二次方程

例 6.（23-24 八年级下·安徽蚌埠·期中）用配方法解方程$4x^2-8x-1=0$时，变形正确的是（　）

A．$(x-1)^2=\frac{5}{4}$　　B．$(2x-1)^2=5$

C．$(x-1)^2=5$　　D．$(x-1)^2=\frac{5}{2}$

【答案】A

【分析】本题主要考查了用配方法解一元二次方程，先把常数项移到方程右边，再把二次项系数化为 1，接着把方程两边同时加上一次项系数一半的平方进行配方即可得到答案.

【详解】解：$4x^2-8x-1=0$

$4x^2-8x=1$

$x^2-2x=\frac{1}{4}$

$x^2-2x+1=\frac{5}{4}$

$(x-1)^2=\frac{5}{4}$，

故选：A.

【变式 6-1】（2024·内蒙古呼和浩特·模拟预测）用配方法解一元二次方程$2x^2-5x-1=0$，配方正确的是（　）

A. $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{33}{16}$　B. $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{41}{16}$　C. $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$　D. $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{29}{4}$

【答案】A

【分析】本题考查的是利用配方法解一元二次方程．先把原方程化为：$x^2-\frac{5}{2}x=\frac{1}{2}$，再“两边同时加上一次项系数一半的平方”，从而可得答案．

【详解】解：$\because 2x^2-5x-1=0$，

$\therefore x^2-\frac{5}{2}x=\frac{1}{2}$，

配方得$x^2-\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{1}{2}+\left(\frac{5}{4}\right)^2$，即$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{33}{16}$，

故选：A.

【变式 6-2】（23-24 八年级下·安徽滁州·期中）用配方法解方程$2x^2-12x+9=0$，下列配方正确的是（　）

A. $(x-3)^2=\frac{9}{2}$　B. $(x-3)^2=\frac{9}{4}$　C. $2(x-3)^2=\frac{9}{2}$　D. $(2x-3)^2=\frac{9}{4}$

【答案】A

【分析】本题主要考查了配方法解一元二次方程，先把常数项移到方程右边，再把二次项系数化为 1，接着把方程两边同时加上一次项系数一半的平方进行配方即可得到答案．

【详解】解：$2x^2-12x+9=0$

$2x^2-12x=-9$

$x^2-6x=-\frac{9}{2}$

$x^2-6x+9=\frac{9}{2}$

$(x-3)^2=\frac{9}{2}$，

故选：A.

【变式 6-3】（23-24 八年级下·安徽淮北·阶段练习）用配方法解方程$3x^2-4x-3=0$

，应把它先变形为（　）

A．$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{13}{9}$　　B．$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=0$　　C．$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$　　D．$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{10}{9}$

【答案】A

【分析】本题考查解一元二次方程-配方法，涉及完全平方差公式、等式性质等知识，由配方法，利用完全平方差公式恒等变形即可得到答案，熟练掌握配方法是解决问题的关键．

【详解】解：$3x^2-4x-3=0$，

二次项系数化为 1 得$x^2-\frac{4}{3}x-1=0$，

移常数项得$x^2-\frac{4}{3}x=1$，

配方得$x^2-\frac{4}{3}x+\left(-\frac{2}{3}\right)^2=1+\left(-\frac{2}{3}\right)^2$，

$\therefore x^2-\frac{4}{3}x+\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{13}{9}$，即$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{13}{9}$，

故选：A．

考点七：用配方法解二次项系数不为 1 的一元二次方程



例 7.（23-24 八年级下·山东烟台·期中）配方法解一元二次方程：$-2x^2+2x+1=0$．

【答案】$x_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$，$x_2=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

【分析】本题考查了解一元二次方程，解题的关键是掌握一元二次方程的解法：直接开平方法，配方法，公式法，因式分解法等．利用配方法解一元二次方程即可．

【详解】解：$-2x^2+2x+1=0$

两边同除以-2，得$x^2-x-\frac{1}{2}=0$，

移项，得$x^2-x=\frac{1}{2}$，

配方，得$x^2-x+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$，即$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$，

开平方，得$x-\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，或$x-\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore x_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$，$x_2=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$．

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/498070065020006111