

2017 年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标 II）

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. (5 分) $\frac{3+i}{1+i} = (\quad)$

- A. $1+2i$ B. $1-2i$ C. $2+i$ D. $2-i$

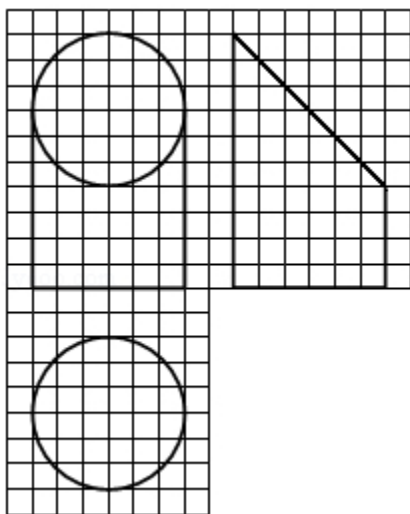
2. (5 分) 设集合 $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{x | x^2 - 4x + m = 0\}$. 若 $A \cap B = \{1\}$, 则 $B = (\quad)$

- A. $\{1, -3\}$ B. $\{1, 0\}$ C. $\{1, 3\}$ D. $\{1, 5\}$

3. (5 分) 我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题：“远看巍巍塔七层，红光点点倍加增，共灯三百八十一，请问尖头几盏灯？”意思是：一座 7 层塔共挂了 381 盏灯，且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 2 倍，则塔的顶层共有灯 ()

- A. 1 盏 B. 3 盏 C. 5 盏 D. 9 盏

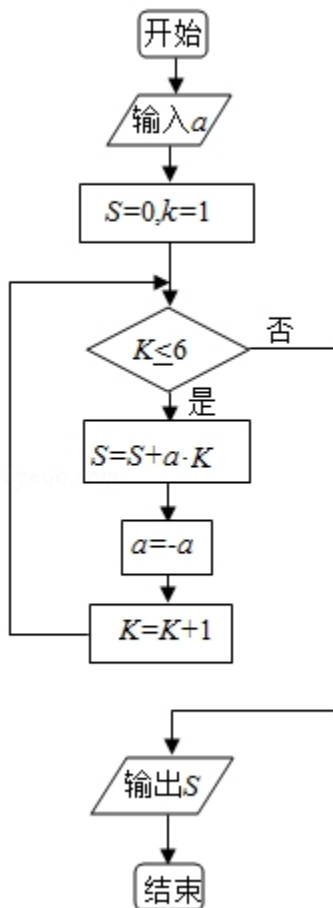
4. (5 分) 如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某几何体的三视图，该几何体由一平面将一圆柱截去一部分后所得，则该几何体的体积为 ()



- A. 90π B. 63π C. 42π D. 36π

5. (5 分) 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x+3y-3 \leq 0 \\ 2x-3y+3 \geq 0 \\ y+3 \geq 0 \end{cases}$, 则 $z=2x+y$ 的最小值是 ()

- A. - 15 B. - 9 C. 1 D. 9
6. (5分) 安排 3 名志愿者完成 4 项工作，每人至少完成 1 项，每项工作由 1 人完成，则不同的安排方式共有 ()
- A. 12 种 B. 18 种 C. 24 种 D. 36 种
7. (5分) 甲、乙、丙、丁四位同学一起去问老师询问成语竞赛的成绩. 老师说：你们四人中有 2 位优秀，2 位良好，我现在给甲看乙、丙的成绩，给乙看丙的成绩，给丁看甲的成绩. 看后甲对大家说：我还是不知道我的成绩. 根据以上信息，则 ()
- A. 乙可以知道四人的成绩 B. 丁可以知道四人的成绩
- C. 乙、丁可以知道对方的成绩 D. 乙、丁可以知道自己的成绩
8. (5分) 执行如图的程序框图，如果输入的 $a=-1$ ，则输出的 $S=$ ()



- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

9. (5分) 若双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线被圆 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 所截得的弦长为 2, 则 C 的离心率为 ()
- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
10. (5分) 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ABC = 120^\circ$, $AB = 2$, $BC = CC_1 = 1$, 则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为 ()
- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
11. (5分) 若 $x = -2$ 是函数 $f(x) = (x^2 + ax - 1)e^{x-1}$ 的极值点, 则 $f(x)$ 的极小值为 ()
- A. -1 B. $-2e^{-3}$ C. $5e^{-3}$ D. 1
12. (5分) 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, P 为平面 ABC 内一点, 则 $\vec{PA} \cdot (\vec{PB} + \vec{PC})$ 的最小值是 ()
- A. -2 B. $-\frac{3}{2}$ C. $-\frac{4}{3}$ D. -1

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

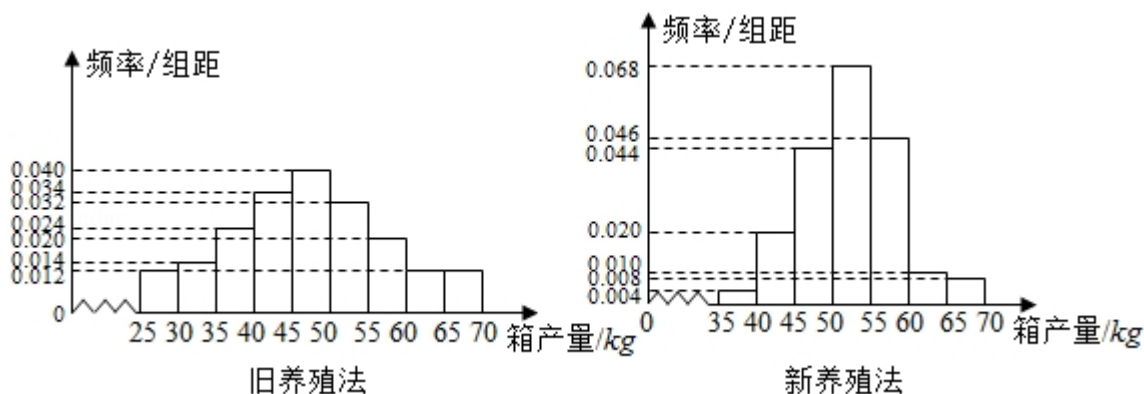
13. (5分) 一批产品的二等品率为 0.02, 从这批产品中每次随机取一件, 有放回地抽取 100 次. X 表示抽到的二等品件数, 则 $DX =$ _____.
14. (5分) 函数 $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{3} \cos x - \frac{3}{4}$ ($x \in [0, \frac{\pi}{2}]$) 的最大值是 _____.
15. (5分) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_3 = 3$, $S_4 = 10$, 则 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{S_k} =$ _____.
16. (5分) 已知 F 是抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点, M 是 C 上一点, FM 的延长线交 y 轴于点 N . 若 M 为 FN 的中点, 则 $|FN| =$ _____.

三、解答题 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答. (一) 必考题: 共 60 分.

17. (12分) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin(A+C) = 8\sin^2 \frac{B}{2}$.

- (1) 求 $\cos B$;
 (2) 若 $a+c=6$, $\triangle ABC$ 的面积为 2, 求 b .

18. (12 分) 海水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比, 收获时各随机抽取了 100 个网箱, 测量各箱水产品的产量 (单位: kg), 其频率分布直方图如图:



- (1) 设两种养殖方法的箱产量相互独立, 记 A 表示事件“旧养殖法的箱产量低于 50kg, 新养殖法的箱产量不低于 50kg”, 估计 A 的概率;
 (2) 填写下面列联表, 并根据列联表判断是否有 99% 的把握认为箱产量与养殖方法有关:

	箱产量 < 50kg	箱产量 \geq 50kg
旧养殖法		
新养殖法		

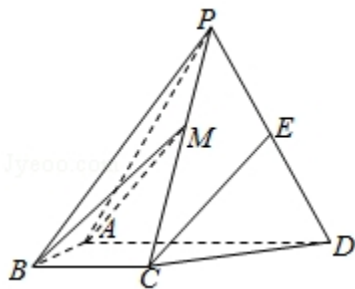
- (3) 根据箱产量的频率分布直方图, 求新养殖法箱产量的中位数的估计值 (精确到 0.01).

附:

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

19. (12分) 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 $ABCD$ ， $AB=BC=\frac{1}{2}AD$ ， $\angle BAD=\angle ABC=90^\circ$ ， E 是 PD 的中点。
- (1) 证明：直线 $CE \parallel$ 平面 PAB ；
- (2) 点 M 在棱 PC 上，且直线 BM 与底面 $ABCD$ 所成角为 45° ，求二面角 $M-AB-D$ 的余弦值。



20. (12分) 设 O 为坐标原点，动点 M 在椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 上，过 M 作 x 轴的垂线，垂足为 N ，点 P 满足 $\overrightarrow{NP} = \sqrt{2}\overrightarrow{NM}$ 。
- (1) 求点 P 的轨迹方程；
- (2) 设点 Q 在直线 $x = -3$ 上，且 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 1$ 。证明：过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F 。

21. (12分) 已知函数 $f(x) = ax^2 - ax - x \ln x$, 且 $f(x) \geq 0$.

(1) 求 a ;

(2) 证明: $f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0 , 且 $e^{-2} < f(x_0) < 2^{-2}$.

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。[选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

22. (10分) 在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho \cos \theta = 4$.

(1) M 为曲线 C_1 上的动点, 点 P 在线段 OM 上, 且满足 $|OM| \cdot |OP| = 16$, 求点 P 的轨迹 C_2 的直角坐标方程;

(2) 设点 A 的极坐标为 $(2, \frac{\pi}{3})$, 点 B 在曲线 C_2 上, 求 $\triangle OAB$ 面积的最大值

[选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

23. 已知 $a > 0$, $b > 0$, $a^3 + b^3 = 2$. 证明:

(1) $(a+b)(a^5 + b^5) \geq 4$;

(2) $a + b \leq 2$.

2017 年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标 II）

参考答案与试题解析

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. (5 分) $\frac{3+i}{1+i} = (\quad)$

- A. $1+2i$ B. $1-2i$ C. $2+i$ D. $2-i$

【考点】A5：复数的运算.

【专题】11：计算题.

【分析】分子和分母同时乘以分母的共轭复数，再利用虚数单位 i 的幂运算性质，求出结果.

【解答】解： $\frac{3+i}{1+i} = \frac{(3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{4-2i}{2} = 2-i$,

故选：D.

【点评】本题考查两个复数代数形式的乘除法，虚数单位 i 的幂运算性质，两个复数相除，分子和分母同时乘以分母的共轭复数.

2. (5 分) 设集合 $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{x | x^2 - 4x + m = 0\}$. 若 $A \cap B = \{1\}$, 则 $B = (\quad)$

- A. $\{1, -3\}$ B. $\{1, 0\}$ C. $\{1, 3\}$ D. $\{1, 5\}$

【考点】1E：交集及其运算.

【专题】34：方程思想；40：定义法；5J：集合.

【分析】由交集的定义可得 $1 \in A$ 且 $1 \in B$, 代入二次方程，求得 m , 再解二次方程可得集合 B .

【解答】解：集合 $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{x | x^2 - 4x + m = 0\}$.

若 $A \cap B = \{1\}$, 则 $1 \in A$ 且 $1 \in B$,

可得 $x^2 - 4x + m = 0$ ，解得 $m = 3$ ，

即有 $B = \{x | x^2 - 4x + 3 = 0\} = \{1, 3\}$ 。

故选：C。

【点评】 本题考查集合的运算，主要是交集的求法，同时考查二次方程的解法，运用定义法是解题的关键，属于基础题。

3. (5分) 我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题：“远看巍巍塔七层，红光点点倍加增，共灯三百八十一，请问尖头几盏灯？”意思是：一座7层塔共挂了381盏灯，且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的2倍，则塔的顶层共有灯（ ）

- A. 1盏 B. 3盏 C. 5盏 D. 9盏

【考点】 89：等比数列的前n项和。

【专题】 34：方程思想；40：定义法；54：等差数列与等比数列。

【分析】 设塔顶的 a_1 盏灯，由题意 $\{a_n\}$ 是公比为2的等比数列，利用等比数列前n项和公式列出方程，能求出结果。

【解答】 解：设塔顶的 a_1 盏灯，

由题意 $\{a_n\}$ 是公比为2的等比数列，

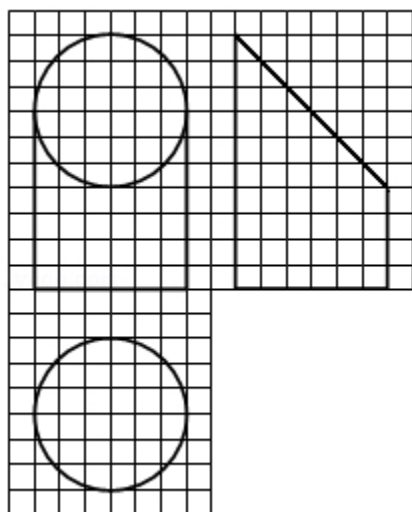
$$\therefore S_7 = \frac{a_1(1-2^7)}{1-2} = 381,$$

解得 $a_1 = 3$ 。

故选：B。

【点评】 本题考查等比数列的首项的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意等比数列的性质的合理运用。

4. (5分) 如图，网格纸上小正方形的边长为1，粗实线画出的是某几何体的三视图，该几何体由一平面将一圆柱截去一部分后所得，则该几何体的体积为（ ）



- A. 90π B. 63π C. 42π D. 36π

【考点】 L1: 由三视图求面积、体积.

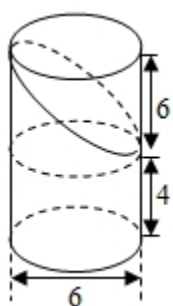
【专题】 11: 计算题; 31: 数形结合; 44: 数形结合法; 5Q: 立体几何.

【分析】 由三视图可得, 直观图为一个完整的圆柱减去一个高为 6 的圆柱的一半, 即可求出几何体的体积.

【解答】 解: 由三视图可得, 直观图为一个完整的圆柱减去一个高为 6 的圆柱的一半,

$$V = \pi \cdot 3^2 \times 10 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 3^2 \times 6 = 63\pi,$$

故选: B.



【点评】 本题考查了体积计算公式, 考查了推理能力与计算能力, 属于中档题.

5. (5分) 设 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} 2x+3y-3 \leq 0 \\ 2x-3y+3 \geq 0 \\ y+3 \geq 0 \end{cases}$$
 则 $z=2x+y$ 的最小值是 ()

- A. - 15 B. - 9 C. 1 D. 9

【考点】 7C: 简单线性规划.

【专题】 11: 计算题; 31: 数形结合; 35: 转化思想; 5T: 不等式.

【分析】 画出约束条件的可行域，利用目标函数的最优解求解目标函数的最小值即可.

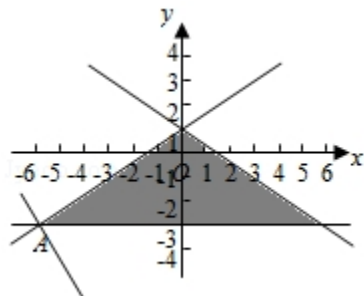
【解答】 解: x 、 y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x+3y-3 \leq 0 \\ 2x-3y+3 \geq 0 \\ y+3 \geq 0 \end{cases}$ 的可行域如图:

$z=2x+y$ 经过可行域的 A 时，目标函数取得最小值，

$$\text{由} \begin{cases} y=-3 \\ 2x-3y+3=0 \end{cases} \text{解得 A} (-6, -3),$$

则 $z=2x+y$ 的最小值是: - 15.

故选: A.



【点评】 本题考查线性规划的简单应用，考查数形结合以及计算能力.

6. (5分) 安排 3 名志愿者完成 4 项工作，每人至少完成 1 项，每项工作由 1 人完成，则不同的安排方式共有 ()
- A. 12 种 B. 18 种 C. 24 种 D. 36 种

【考点】 D9: 排列、组合及简单计数问题.

【专题】 11: 计算题; 49: 综合法; 50: 排列组合.

【分析】 把工作分成 3 组，然后安排工作方式即可.

【解答】 解: 4 项工作分成 3 组，可得: $C_4^2=6$,

安排 3 名志愿者完成 4 项工作，每人至少完成 1 项，每项工作由 1 人完成，
可得： $6 \times A_3^3 = 36$ 种。

故选：D.

【点评】 本题考查排列组合的实际应用，注意分组方法以及排列方法的区别，考查计算能力.

7. (5 分) 甲、乙、丙、丁四位同学一起去问老师询问成语竞赛的成绩. 老师说：你们四人中有 2 位优秀，2 位良好，我现在给甲看乙、丙的成绩，给乙看丙的成绩，给丁看甲的成绩. 看后甲对大家说：我还是不知道我的成绩. 根据以上信息，则 ()
- A. 乙可以知道四人的成绩 B. 丁可以知道四人的成绩
C. 乙、丁可以知道对方的成绩 D. 乙、丁可以知道自己的成绩

【考点】 F4：进行简单的合情推理.

【专题】 2A：探究型；35：转化思想；48：分析法；5M：推理和证明.

【分析】 根据四人所知只有自己看到，老师所说及最后甲说话，继而可以推出
正确答案

【解答】 解：四人所知只有自己看到，老师所说及最后甲说话，

甲不知自己的成绩

→乙丙必有一优一良，（若为两优，甲会知道自己的成绩；若是两良，甲也会知道自己的成绩）

→乙看到了丙的成绩，知自己的成绩

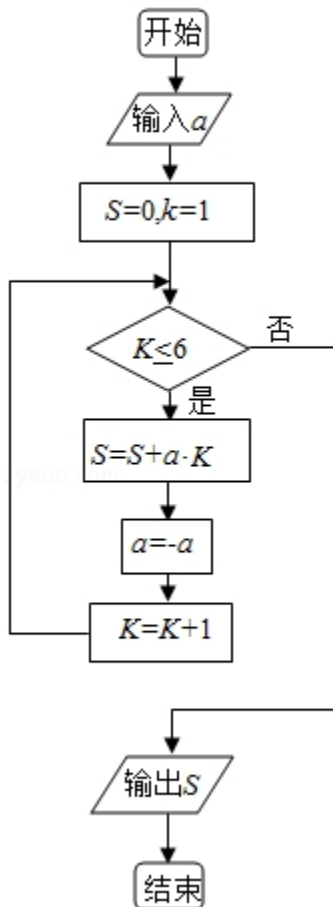
→丁看到甲、丁也为一优一良，丁知自己的成绩，

给甲看乙丙成绩，甲不知道自己的成绩，说明乙丙一优一良，假定乙丙都是优，则甲是良，假定乙丙都是良，则甲是优，那么甲就知道自己的成绩了. 给乙看丙成绩，乙没有说不知道自己的成绩，假定丙是优，则乙是良，乙就知道自己成绩. 给丁看甲成绩，因为甲不知道自己成绩，乙丙是一优一良，则甲丁也是一优一良，丁看到甲成绩，假定甲是优，则丁是良，丁肯定知道自己的成绩了

故选：D.

【点评】 本题考查了合情推理的问题，关键掌握四人所知只有自己看到，老师所说及最后甲说话，属于中档题.

8. (5分) 执行如图的程序框图，如果输入的 $a=-1$ ，则输出的 $S=$ ()



A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【考点】 EF：程序框图.

【专题】 11：计算题；27：图表型；4B：试验法；5K：算法和程序框图.

【分析】 执行程序框图，依次写出每次循环得到的 S ， K 值，当 $K=7$ 时，程序终止即可得到结论.

【解答】 解：执行程序框图，有 $S=0$ ， $K=1$ ， $a=-1$ ，代入循环，

第一次满足循环， $S=-1$ ， $a=1$ ， $K=2$ ；

满足条件，第二次满足循环， $S=1$ ， $a=-1$ ， $K=3$ ；

满足条件，第三次满足循环， $S=-2$ ， $a=1$ ， $K=4$ ；

满足条件，第四次满足循环， $S=2$ ， $a=-1$ ， $K=5$ ；

满足条件，第五次满足循环， $S=-3$ ， $a=1$ ， $K=6$ ；

满足条件，第六次满足循环， $S=3$ ， $a=-1$ ， $K=7$ ；

$K \leq 6$ 不成立，退出循环输出 S 的值为 3.

故选：B.

【点评】 本题主要考查了程序框图和算法，属于基本知识的考查，比较基础.

9. (5分) 若双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线被圆 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 所截得的弦长为 2，则 C 的离心率为 ()

A. 2

B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{2}$

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【考点】 KC: 双曲线的性质; KJ: 圆与圆锥曲线的综合.

【专题】 11: 计算题; 35: 转化思想; 49: 综合法; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】 通过圆的圆心与双曲线的渐近线的距离，列出关系式，然后求解双曲线的离心率即可.

【解答】 解 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线不妨为 $bx+ay=0$

圆 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 的圆心 $(2, 0)$ ，半径为：2，

双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线被圆 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 所截得

的弦长为 2，

可得圆心到直线的距离为： $\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}=\frac{|2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ，

解得： $\frac{4c^2-4a^2}{c^2}=3$ ，可得 $e^2=4$ ，即 $e=2$ 。

故选：A.

【点评】 本题考查双曲线的简单性质的应用，圆的方程的应用，考查计算能力.

10. (5分) 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $\angle ABC=120^\circ$ ， $AB=2$ ， $BC=CC_1=1$ ，则

异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【考点】 LM：异面直线及其所成的角.

【专题】 31：数形结合；40：定义法；5G：空间角.

【分析】 【解法一】设 M、N、P 分别为 AB， BB_1 和 B_1C_1 的中点，得出 AB_1 、 BC_1 夹角为 MN 和 NP 夹角或其补角；根据中位线定理，结合余弦定理求出 AC、MQ，MP 和 $\angle MNP$ 的余弦值即可.

【解法二】 通过补形的办法，把原来的直三棱柱变成直四棱柱，解法更简洁.

【解答】 解：【解法一】如图所示，设 M、N、P 分别为 AB， BB_1 和 B_1C_1 的中点，

则 AB_1 、 BC_1 夹角为 MN 和 NP 夹角或其补角

(因异面直线所成角为 $(0, \frac{\pi}{2}]$)，

可知 $MN=\frac{1}{2}AB_1=\frac{\sqrt{5}}{2}$ ，

$NP=\frac{1}{2}BC_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ；

作 BC 中点 Q，则 $\triangle PQM$ 为直角三角形；

$\therefore PQ=1$ ， $MQ=\frac{1}{2}AC$ ，

$\triangle ABC$ 中，由余弦定理得

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/498112136012006033>