第十五讲 等差等比性质综合

目录

热点题型归纳

题型 01 等差数列单调性

【解题攻略】

判断数列的单调性，常用的方法有作差比较法、作商比较法和函数图象法：

（1）作差比较法：当 $a_{n+1}-a_n>0$ 时，$\{a_n\}$ 递增；当 $a_{n+1}-a_n<0$ 时，$\{a_n\}$ 递减.

（2）作商比较法：若 $a_n>0$，则当 $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ 时，$\{a_n\}$ 递增；当 $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ 时，$\{a_n\}$ 递减.

（3）函数图象法：设 $a_n=f(n)$，则可用函数 $y=f(x)$ 的图象来研究数列 $\{a_n\}$ 的单调性

【典例 1-1】（2023 春·广东佛山·高二佛山市三水区三水中学校考阶段练习）设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_7=S_{13}$，且 $(n+1)S_n>nS_{n+1}(n\in N^*)$，则下列选项中正确的是（　）

A．$a_n>a_{n+1}$　　　　B．S_{10} 和 S_{11} 均为 S_n 的最大值

C．存在正整数 k，使得 $S_k=0$　　　　D．存在正整数 m，使得 $S_m=S_{3m}$

【典例 1-2】（2023·全国·高三专题练习）已知数列 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列，函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的单调递增的奇函数，数列 $\{f(a_n)\}$ 的前 n 项和为 S_n，对于命题：

①若数列 $\{a_n\}$ 为递增数列，则对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，$S_n>0$；

②若对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，$S_n>0$，则数列 $\{a_n\}$ 为递增数列；

③若存在 $m\in\mathbf{N}^*$，使得 $S_m=0$，则存在 $k\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_k=0$；

④若存在 $k\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_k=0$，则存在 $m\in\mathbf{N}^*$，使得 $S_m=0$；

其中正确命题的个数为（　）

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

【变式 1-1】（2019 秋·河南洛阳·高三统考）已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，其前 n 项和为 S_n，若 $S_n=S_{9-n}$（$n\in N^*$ 且 $n<9$），有以下结论：① $S_9=0$；② $a_5=0$；③ $\{a_n\}$ 为递增数列；④ $a_9=0$．则正确的结论的个数为

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

【变式 1-2】（2019 春·上海杨浦·高三复旦附中校考）已知数列$\{a_n\}$是公差不为零的等差数列，函数$f(x)$是定义在R上的单调递增的奇函数，数列$\{f(a_n)\}$的前n项和为S_n，对于命题：

①若数列$\{a_n\}$为递增数列，则对一切$n\in\mathbf{N}^*$，$S_n>0$

②若对一切$n\in\mathbf{N}^*$，$S_n>0$，则数列$\{a_n\}$为递增数列

③若存在$m\in N^*$，使得$S_m=0$，则存在$k\in\mathbf{N}^*$，使得$a_k=0$

④若存在$k\in\mathbf{N}^*$，使得$a_k=0$，则存在$m\in N^*$，使得$S_m=0$

其中正确命题的个数为

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

【变式 1-3】（2022·全国·高三专题练习）已知数列$\{a_n\}$是首项为a，公差为 1 的等差数列，数列$\{b_n\}$满足$b_n=\dfrac{1+a_n}{a_n}$.若对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，都有$b_n\geq b_6$成立，则实数a的取值范围是（　）

A．$[-6,-5]$　　B．$(-6,-5)$　　C．$[-5,-4]$　　D．$(-5,-4)$

题型 02 等比数列单调性

【解题攻略】

函数图象法：求出数列$\{a_n\}$的前 n 项和$S_n=f(n)$，利用函数$y=f(x)$的图象性质来研究S_n的最大最小值问题.

【典例 1-1】无穷数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$S_n=2^n$，则下列结论中正确的有（　）

A．$\{a_n\}$为等比数列　　B．$\{a_n\}$为递增数列

C．$\{a_n\}$中存在三项成等差数列　　D．$\{a_n\}$中偶数项成等比数列

【典例 1-2】等比数列$\{a_n\}$的公比为q，则“$q>1$”是“对于任意正整数 n，都有$a_{n+1}>a_n$”的（　）

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分又不必要条件

【变式 1-1】已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n(n\in\mathrm{N}^*)$，设$b_n=(n-\lambda)\cdot a_n\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，且数列$\{b_n\}$是单调递增数列，则实数$\lambda$的取值范围是（　）

A．$(-\infty,3)$　　B．$(3,+\infty)$

C．$(-\infty,3]$　　D．$[3,+\infty)$

【变式 1-2】.数列$\{a_n\}$是等比数列，首项为a_1，公比为 q，则$a_1(q-1)<0$是“数列$\{a_n\}$递减”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

【变式 1-3】数列{*an*}满足 $a_{n+1}=2a_n+1$，$a_1=1$，若 $b_n=\lambda a_n-n^2+4n$ 为单调递增数列，则λ的取值范围为（　）

A．$\lambda>\dfrac{1}{8}$　　B．$\lambda>\dfrac{1}{4}$　　C．$\lambda>\dfrac{3}{8}$　　D．$\lambda>\dfrac{1}{2}$

题型 03 等差数列不等式正负分界

【解题攻略】

邻项变号法：

若当$n\leq m$时，$a_n\geq 0$，当$n\geq m+1$时，$a_n\leq 0$，则数列$\{S_n\}$中，S_m最大；

若当$n\leq m$时，$a_n\leq 0$，当$n\geq m+1$时，$a_n\geq 0$，则数列$\{S_n\}$中，S_m最小.