重难点 06 空间角与空间距离（含探索性问题）

明考情·知方向

三年考情分析	2025 年考向预测
2022 年，第 17 题，考察线面角和二面角 2023 年，第 17 题，考察二面角和点到平面距离 2024 年，第 17 题，考察二面角和点到平面距离	空间角与空间距离问题一直是天津高考数学必考点与热点考向。通常出现在解答题第（2）（3）问，难度中等。在高考复习过程中除了掌握空间向量法，还需多锻炼几何法的应用。

重难点题型解读



题型 1 异面直线所成角

高分技法

设异面直线 l_1 和 l_2 所成角为 θ，其方向向量分别为 $\vec{u}$，$\vec{v}$；则异面直线所成角向量求法：

① $\cos<\vec{u},\vec{v}>=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

② $\cos\theta=|\cos<\vec{u},\vec{v}>|$

1．（24-25 高二上·天津·期末）在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $AB=BC=2,AA_1=4,E$ 为 A_1D_1 的中点，F

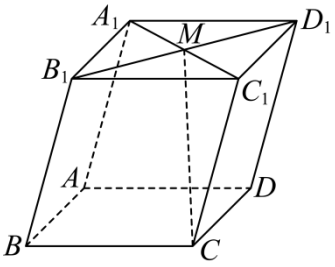
为CC_1的中点，则直线BD与EF所成角的余弦值为（　）

A．$\frac{1}{6}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{6}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{3}$

2．（23-24高一下·浙江宁波·期中）在正四棱锥$P-ABCD$中，$PA=AB$，M是PB的中点，则异面直线AM与BD所成角的余弦值为（　）

A．$\frac{\sqrt{30}}{6}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{6}}{6}$

3．（24-25高二上·天津滨海新·期末）如图，在平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，A_1C_1与B_1D_1的交点为M．



（1）设$\overrightarrow{BA}=\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b},\overrightarrow{BB_1}=\vec{c}$，则$\overrightarrow{CM}=$_____（用$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$表示）；

（2）若$BA=BC=BB_1$，且$\angle ABC=\angle ABB_1=\angle B_1BC=60^\circ$，则$CM$与$BA$所成角的余弦值为_____.

4．（24-25高二上·天津和平·阶段练习）在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\angle BCA=90^\circ$，D_1，F_1分别是A_1B_1，A_1C_1的中点，$BC=CA=CC_1$，则AD_1与BF_1所成角的余弦值是_____.

5．（24-25高三上·天津滨海新·期中）在四棱锥$S-ABCD$中，$SA\perp$平面$ABCD$，四边形$ABCD$为平行四边形，$\angle ABC=60^\circ$且$SA=AB=BC=2$，E为SA的中点，则异面直线SC与DE所成的角的余弦值为___.

题型2 直线与平面所成角（定值）

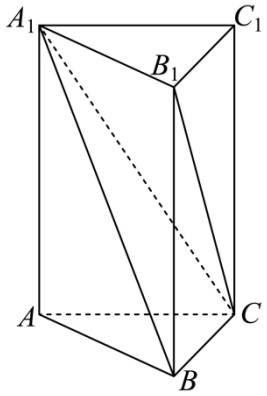
高分技法

设直线l的方向向量为$\vec{a}$，平面α的一个法向量为$\vec{n}$，直线l与平面α所成的角为θ，则①

$\cos<\vec{a},\vec{n}>=\frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\vec{a}||\vec{n}|}$；

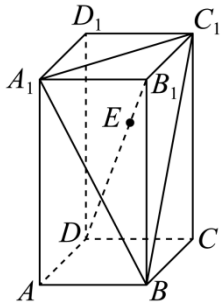
②$\sin\theta=|\cos<\vec{a},\vec{n}>|$.

1．（2024·四川攀枝花·一模）《九章算术》是我国古代数学名著，它在几何学中的研究比西方早一千多年，例如堑堵指底面为直角三角形，且侧棱垂直于底面的三棱柱；鳖臑指的是四个面均为直角三角形的三棱锥如图，在堑堵$ABC-A_1B_1C_1$中，$\angle ACB=90^\circ$，若$AC=BC=1$，$AA_1=2$，直线B_1C与平面ABB_1A_1所成角的余弦值为（　）



A．$\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　B．$\frac{\sqrt{10}}{10}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

2．（2023·河北保定·二模）如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=1$，$AA_1=2$，对角线 B_1D 与平面 A_1BC_1 交于 E 点．则 A_1E 与面 AA_1D_1D 所成角的余弦值为（　）

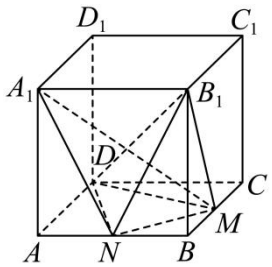


A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{3}$

3．（23-24 高二上·全国·期中）PA，PB，PC 是从点 P 引出的三条射线，每两条的夹角均为60°，则直线 PC 与平面 PAB 所成角的余弦值为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

4．（2024·全国·模拟预测）在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，动点 M，N 分别在棱 BC，AB 上，且满足 $AN=BM$，当 V_{D-MNB_1} 的体积最小时，B_1M 与平面 A_1MN 所成角的正弦值是_____．



5．（2024·海南·模拟预测）在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，已知点 $A(1,1,0)$，$B(0,3,2)$，$C(2,0,3)$，若平面 α // y 轴，且 $BC\subset\alpha$，则直线 AC 与平面 α 所成的角的正弦值为_____.

题型 3 直线与平面所成角（最值，范围）

高分技法

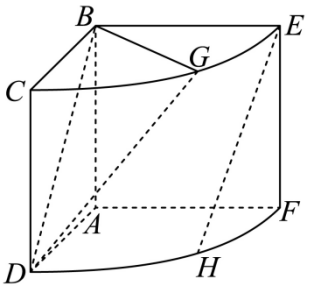
（1）设直线 l 的方向向量为 $\vec{a}$，平面 α 的一个法向量为 $\vec{n}$，直线 l 与平面 α 所成的角为 θ，则①

$\cos<\vec{a},\vec{n}>=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\vec{a}||\vec{n}|}$；

②$\sin\theta=|\cos<\vec{a},\vec{n}>|$.

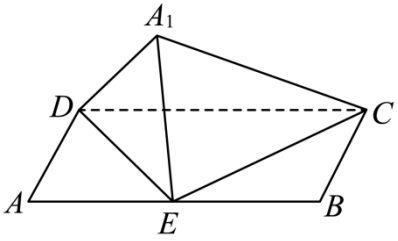
（2）常涉及到基本不等式，二次函数，求导等方法求最值或范围

1．（23-24 高三下·四川绵阳·阶段练习）如图所示的几何体是由正方形 $ABCD$ 沿直线 AB 旋转 90°得到的．设 G 是圆弧 $\overset{\frown}{CE}$ 的中点，H 是圆弧 $\overset{\frown}{DF}$ 上的动点（含端点），则直线 EH 与平面 BDG 所成角的正弦值最大为（　）



A．$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

2．（23-24 高三下·重庆沙坪坝·阶段练习）如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=2AD=2\sqrt{2}$，E 为边 AB 的中点，将 $\triangle ADE$ 沿直线 DE 翻折成 $\triangle A_1DE$．在翻折过程中，直线 A_1C 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值最大为（　）



A．$\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}$　　B．$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$　　C．$\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$　　D．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

3．（24-25 高二上·云南大理·阶段练习）在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AD=2$，$AA_1=1$，O 是 AC 的中点，点 P 在线段 A_1C_1 上，若直线 OP 与平面 ACD_1 所成的角为 θ，则 $\sin\theta$ 的取值范围是（　）

A．$\left[\dfrac{\sqrt{2}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$　　B．$\left[\dfrac{\sqrt{2}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right]$

C．$\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right]$　　D．$\left[\dfrac{\sqrt{3}}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$

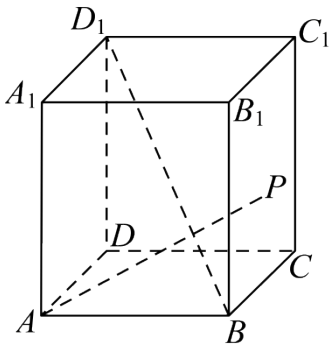
4．（23-24 高二上·安徽·阶段练习）在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AD=2$，$AA_1=3$，O 是 AC

的中点，点 P 在线段 A_1C_1 上（包含端点），若直线 OP 与平面 AB_1C 所成的角为 θ，则 $\sin\theta$ 的取值范围是（　）

A. $\left[\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$　　B. $\left[\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$

C. $\left[\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{3\sqrt{2}}{11},\frac{\sqrt{22}}{11}\right]$

5．（23-24 高二上·广东东莞·阶段练习）如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=3, AA_1=4, P$ 是侧面 BCC_1B_1 内的动点，且 $AP\perp BD_1$，记 AP 与平面 BCC_1B 所成的角为 θ，则 $\tan\theta$ 的最大值为（　）



A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{5}{3}$　　C. $\frac{5}{4}$　　D. $\frac{8\sqrt{15}}{15}$

题型 4 根据直线与平面所成角求参数

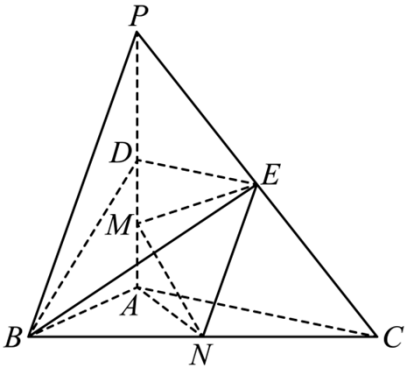


（1）设直线 l 的方向向量为 $\vec{a}$，平面 α 的一个法向量为 $\vec{n}$，直线 l 与平面 α 所成的角为 θ，则①$\cos<\vec{a},\vec{n}>=\frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\vec{a}||\vec{n}|}$；

②$\sin\theta=|\cos<\vec{a},\vec{n}>|$.

（2）常设点的坐标或者假设 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$

1．（2023·天津北辰·三模）如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 底面 ABC，$\angle BAC=90°$．点 D，E，N 分别为棱 PA，PC，BC 的中点，M 是线段 AD 的中点，$PA=AC=2$，$AB=1$．

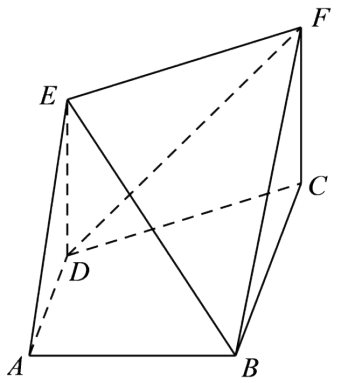


(1)求证：MN// 平面 BDE；

(2)求点 N 到直线 ME 的距离；

(3)在线段 PA 上是否存在一点 H，使得直线 NH 与平面 MNE 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{6}}{21}$，若存在，求出线段 AH 的值，若不存在，说明理由.

2．（2022·天津河东·二模）如图所示，直角梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，AD 垂直 AB，$AB=BC=2AD=2$，四边形 $EDCF$ 为矩形，$CF=\sqrt{3}$，平面 $EDCF \perp$ 平面 $ABCD$.

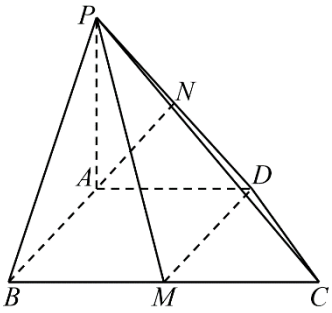


(1)求证：$DF \parallel$ 平面 ABE；

(2)求平面 ABE 与平面 EFB 所成二面角的正弦值；

(3)在线段 DF 上是否存在点 P，使得直线 BP 与平面 ABE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$，若存在，求出线段 BP 的长，若不存在，请说明理由.

3．（2022·天津·一模）如图，在四棱锥 P-$ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是直角梯形，$\angle ABC=\angle BAD=90°$，$AP\perp$ 平面 $ABCD$，$AB=BC=2AP=2AD=2$，点 M、N 分别为线段 BC 和 PD 的中点．

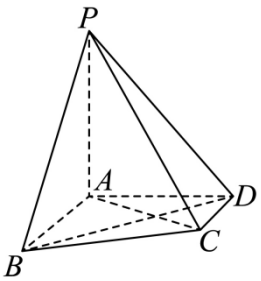


(1)求证：$AN\perp$平面 PDM；

(2)求平面 PDM 与平面 PDC 夹角的正弦值；

(3)在线段 PC(不包括端点)上是否存在一点 E，使得直线 BE 与平面 PDC 所成角的正弦值为$\frac{2}{3}$，若存在，求出线段 PE 的长：若不存在，请说明理由.

4．（24-25 高二上·天津·期中）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$平面 $ABCD$，$AB//CD$，$AB\perp AD$，$PA=AB$，$AB=2$，$AD=\sqrt{2}$，$CD=1$．



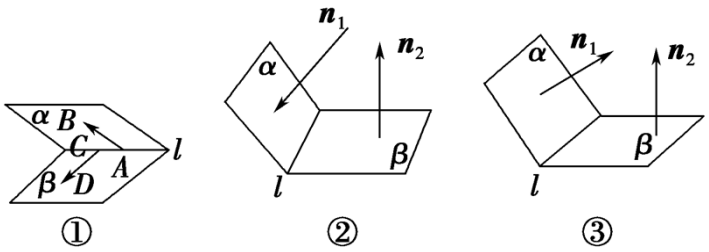
(1)证明：$BD\perp PC$；

(2)求平面 APC 与平面 DPC 夹角的余弦值；

(3)设 Q 为线段 PD 上的点，且直线 AQ 和平面 PAC 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{2}}{3}$，求$\frac{PQ}{PD}$的值．

题型 5 求二面角 （定值）

（1）如图①，AB，CD是二面角$\alpha-l-\beta$的两个面内与棱l垂直的直线，则二面角的大小$\theta=<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}>$.



（2）如图②③，$\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$分别是二面角$\alpha-l-\beta$的两个半平面α,β的法向量，则二面角的大小θ满足：

①$\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$；

②$\cos\theta=\pm\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>$

若二面角为锐二面角（取正），则$\cos\theta=|\cos<n_1,n_2>|$；

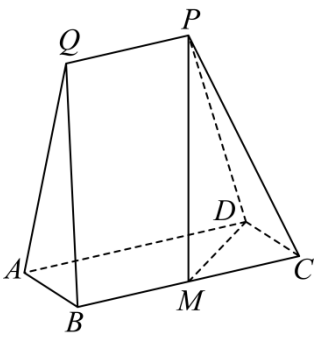
若二面角为钝二面角（取负），则$\cos\theta=-|\cos<n_1,n_2>|$；

（特别说明，有些题目会提醒求锐二面角；有些题目没有明显提示，需考生自己看图判定为锐二面角还是钝二面角.）

1．（24-25高二上·福建·阶段练习）在矩形$ABCD$中，$AD=a$，$AB=b$，$b>a$.将$\triangle ACD$沿着AC翻折，使D点在平面ABC上的投影E恰好在直线AB上，则此时二面角$B-AC-D$的余弦值为（　）

A．$\dfrac{a^2}{b^2}$　　B．$\dfrac{a}{b}$　　C．$\dfrac{\sqrt{ab}}{b}$　　D．$\dfrac{a+b}{2b}$

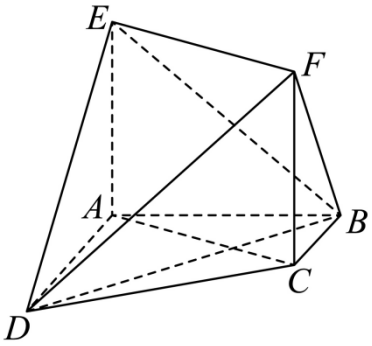
2．（24-25高二上·安徽马鞍山·阶段练习）如图，在体积为5的多面体$ABCDPQ$中，底面$ABCD$是平行四边形，$\angle DAB=45°$，$BC=2PQ=2\sqrt{2}AB=2\sqrt{2}$，$M$为$BC$的中点，$PQ\parallel BC$，$PD\perp DC$，$QB\perp MD$．则平面$PCD$与平面$QAB$夹角的正弦值为（　）



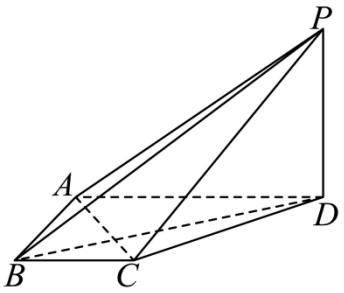
A．$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　B．$\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$　　C．$\dfrac{6\sqrt{37}}{37}$　　D．$\dfrac{\sqrt{37}}{37}$

3．（24-25 高二上·天津和平·阶段练习）已知矩形 $ABCD$，$AB=20$，$BC=15$，沿对角线 AC 将 $\triangle ABC$ 折起，使得 $BD=\sqrt{481}$，则二面角 $B-AC-D$ 的余弦值是_____

4．（22-23 高三上·天津河北·期末）如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，$AE\perp$ 平面 $ABCD$，$AEFC$ 是平行四边形，且 $AD//BC$，$AB\perp AD$，$AD=AE=2$，$AB=BC=1$，则二面角 $A-DE-B$ 的余弦值为_____.



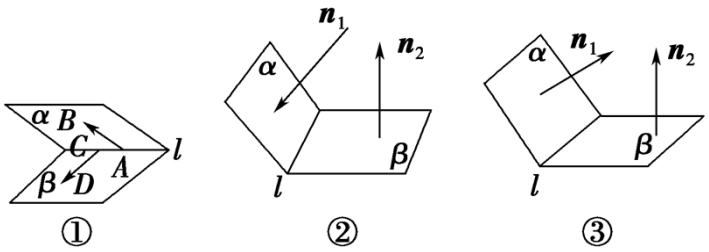
5．（2024 高三·全国·专题练习）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是直直角梯形，$AD//BC$，$AD=2BC$，$\angle DAB=90°$，平面 $PDB\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\perp BD$，$AB\perp PD$，$BC=1$，$PD=\sqrt{2}$，则二面角 $D-PC-B$ 的余弦值为_____



题型 6 求二面角（最值，范围）



（1）如图①，AB，CD 是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的两个面内与棱 l 垂直的直线，则二面角的大小 $\theta=<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}>$.



（2）如图②③，$\vec{n_1}$，$\vec{n_2}$ 分别是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的两个半平面 α,β 的法向量，则二面角的大小 θ 满足：

① $\cos<\vec{n_1},\vec{n_2}>=\dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$；

② $\cos\theta=\pm\cos<\vec{n_1},\vec{n_2}>$

若二面角为锐二面角（取正），则 $\cos\theta=|\cos<n_1,n_2>|$；

若二面角为顿二面角（取负），则 $\cos\theta=-|\cos<n_1,n_2>|$；

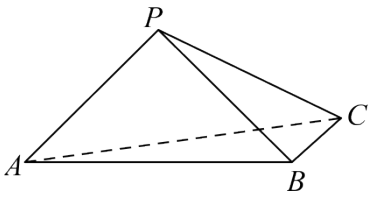
（特别说明，有些题目会提醒求锐二面角；有些题目没有明显提示，需考生自己看图判定为锐二面角还是钝二面角.）

（2）常涉及到基本不等式，二次函数，求导等方法求最值或范围

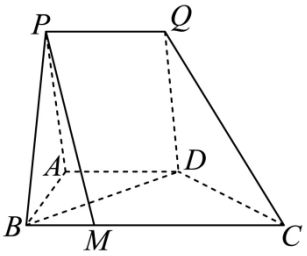
1．（24-25 高二上·重庆·阶段练习）长方体 $ABCD-ABC_1D_1$，$AB=BC=1$，$BB_1=2$，动点 P 满足 $\vec{BP}=\lambda\vec{BC}+\mu\vec{BB_1}(\lambda,\mu\in[0,1])$，$AP\perp BD_1$，则二面角 $P-AD-B$ 的正切值的取值范围是（　）

A．$\left[0,\frac{1}{4}\right]$　　B．$\left[0,\frac{1}{2}\right]$　　C．$\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$　　D．$\left[\frac{1}{2},1\right]$

2．（23-24 高二上·福建泉州·期末）如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp PB$，$PA=PB$，$AB=2BC=2$，平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，则三棱锥 $P-ABC$ 的体积的最大值为_____；二面角 $P-AC-B$ 的正弦值的最小值为_____.



3．（2024·重庆·模拟预测）如图，在多面体 $ABCDPQ$ 中，四边形 $APQD$ 为矩形，四边形 $ABCD$ 为直角梯形，$AD//BC$，$\angle ABC=90°,2AD=2AB=BC=4$，且 $PA=PB$.



(1)当 $\vec{BC}=4\vec{BM}$ 时，求证：$PM\perp BD$；

(2)当点 M 在线段 BC 上（包含端点），$DQ=2$ 时，求平面 PAM 与平面 CDQ 的夹角的余弦值的取值范围.

4．（24-25 高二上·黑龙江·期末）如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，$CC_1=2$，$\angle C_1CA=60°$，D，E 分别是线段 AC，CC_1 的中点，且平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 ABC.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/498133072106007027